



# Handreichung VERA 8 Mathematik 2009 Testheft A



Liebe Kollegin, lieber Kollege,

die vorliegende "Handreichung Vergleichsarbeiten – VERA-8 (2009)", enthält die Aufgabenstellungen, Lösungen und didaktischen Kommentierungen der "Vergleichsarbeiten Mathematik 8. Klasse (2009)", Testheft I, wie sie vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen der Humboldt-Universität zu Berlin (IQB) für die Länder erstellt wurden. Ergänzend finden Sie zudem kurz gefasst allgemeinere Erläuterungen zu den Zielen, den Verwendungsmöglichkeiten und der Konstruktionsweise von Vergleichsarbeiten.

Diese "Handreichung Vergleichsarbeiten" soll auf diese Weise nicht nur ganz konkret über die Bildungsstandards Mathematik und einen entsprechenden Kompetenzorientierten Unterricht informieren, sondern sie soll vor allem Sie als Lehrkraft in Ihrem täglichen Bemühen um einen solchen Unterricht unterstützen.

Die Handreichung wendet sich daher nicht ausschließlich an diejenigen unter Ihnen, die im März 2009 mit ihren Klassen diese Arbeiten (als "Lernstandserhebung", "Kompetenztest" o. ä.) geschrieben haben, sondern an alle interessierten Kolleginnen und Kollegen. Auch Eltern sowie Schülerinnen und Schüler oder an Unterrichtsqualität interessierte Dritte finden hierin möglicherweise nützliche Anregungen. Denn es kommt Ihnen als Lehrkraft im Unterricht zwar eine zentrale Rolle bei der Umsetzung der Bildungsstandards zu, doch ohne entsprechende Rahmensetzungen durch Schulpolitik und Schulverwaltung wie auch ohne eine breite Unterstützung durch Eltern, Schüler und Bevölkerung ist eine solche Aufgabe nicht zu bewältigen.

Aus diesem Grund werden in dieser Handreichung zunächst fachübergreifend Ziele, Möglichkeiten, Konstruktion und Abläufe von VERA erläutert. In einem folgenden fachbezogenen Teil werden das fachspezifische Kompetenzmodell und Charakteristika eines kompetenzorientierten Unterrichts erläutert. In einem dritten Teil werden die im VERA-8-Durchgang 2009, Testheft I eingesetzten Aufgaben mitsamt ihren jeweiligen Lösungen und didaktischen Kommentierungen wiedergegeben. Ein abschließender vierter Teil widmet sich exemplarisch der Kompetenzentwicklung im Unterricht. Die Handreichung enthält somit keine Ergebnisse aus der eigentlichen Testdurchführung im März 2009; diese liegen ausschließlich den Ländern bzw. deren Behörden und Schulen vor.

Sie können diese Handreichung für Ihre persönlichen (Unterrichts-) Zwecke in gewohnter Weise vervielfältigen und weitergeben. Die Aufgaben enthalten teilweise urheberrechtlich geschütztes Material (Fotografien, Grafiken, Texte etc.). Das IQB hat für die Länder bzw. deren Behörden, Schulen, Lehrkräfte, Schüler und Eltern für April 2009 bis März 2010 die

2

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Weitere grundsätzliche Informationen zu VERA finden sich auch unter http://www.iqb.hu-berlin.de/vera; dort auch Links zu den Informationsangeboten der Länder.

nicht-kommerziellen, räumlich und medial unbeschränkten Nutzungsrechte erworben.<sup>2</sup> Ab April 2010 dürfen die Aufgaben der Testhefte 2009 nicht mehr für den allgemeinen Gebrauch vervielfältigt oder elektronisch verteilt werden.<sup>3</sup>

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg und auch viel Spaß im Unterricht mit unserer "Handreichung Vergleichsarbeiten VERA-8 (2009)"

lhr

Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Trotz intensiver Bemühungen war es leider nicht für alle Materialquellen möglich, die Rechteinhaber ausfindig zu machen und zu kontaktieren, um erforderliche Veröffentlichungsrechte einzuholen. Wir bitten um Verständnis und bitten die Rechteinhaber sowie die Verlage, deren Rechte berührt sind, sich ggf. mit uns in Verbindung zu setzen. In einigen Fällen haben Rechteinhaber und Verlage nicht auf unsere Kontaktbemühungen reagiert. Auch in diesen Fällen bitten wir freundlich darum, sich mit uns in Verbindung zu setzen.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Eine kommerzielle Verwendung der Aufgaben – etwa im Rahmen von Verlagspublikationen – muss bei den Rechteinhabern gesondert vereinbart werden. Kontakt über das IQB.

1. Fächerübergreifende Erläuterungen	5
2. Fachallgemeine Erläuterungen	
3. Testaufgaben "Vergleichsarbeiten Mathematik 8. Klasse"	15
Aufgabe 1: Apfelkauf	16
Aufgabe 2: Zwanzig Prozent	
Aufgabe 3: Termberechnung	
Aufgabe 4: Fahrradverleih	
Aufgabe 5: Ganze Zahlen	
Aufgabe 6: Skianzug	26
Aufgabe 7: Waschpulver	28
Aufgabe 8: Internetauktion	31
Aufgabe 9: Computernutzung	33
Aufgabe 10: Glücksrad	38
Aufgabe 11: Steckwürfelfiguren	
Aufgabe 12: Schokoladenriegel	
Aufgabe 13: Gleichung lösen	
Aufgabe 14: Kleinanzeigen	
Aufgabe 15: Fähre	
Aufgabe 16: Vaters Alter	
Aufgabe 17: Dreisatz	
Aufgabe 18: Zoobesuch	
Aufgabe 19: Würfelnetze	
Aufgabe 20: Im Koordinatensystem	
Aufgabe 21: Dreiecksfläche	
Aufgabe 22: Quadratfläche färben	
Aufgabe 23: Feuerlöschdecke	
Aufgabe 24: Rechteckszeichnung	70
Aufgabe 25: Quadrat und Dreieck	
Aufgabe 26: Würfel erforschen	
Aufgabe 27: Trapez	
4. Kompetenzentwicklung im Mathematik-Unterricht: Modellieren	
5. Literaturverzeichnis	89

# 1. Fächerübergreifende Erläuterungen

*VERA-8 – Vergleichsarbeiten in 8. Klassen* (auch "Lernstandserhebung", "Kompetenztest", o.ä.)

Anfang März 2009 wurden in den meisten 8. Klassen der allgemein bildenden Schulen in Deutschland parallel Arbeiten in Mathematik, Deutsch und/oder Erster Fremdsprache (Englisch / Französisch) geschrieben. Dieses Vorhaben – übergreifend "VERA-8" genannt – geht auf einen Beschluss der Kultusministerkonferenz zurück<sup>4</sup>, schließt an ähnliche Erhebungen einzelner Bundesländer in den Vorjahren an und soll fortan jährlich durchgeführt werden.

Zuständig sind jeweils die Länder. Sie organisieren den Ablauf wie auch die Auswertung in je eigener Verantwortung und haben dabei teilweise unterschiedliche Regelungen getroffen: So werden zum einen die Arbeiten teilweise nicht in allen Fächern verpflichtend geschrieben; zum anderen unterscheidet sich die Form der Ergebnisrückmeldung und -berücksichtigung. Auch die Bezeichnung für VERA variiert - so z.B. als "Kompetenztest" oder "Lernstandserhebung".

Es gibt jedoch Rahmendaten, Materialien und Abläufe, die für alle Länder weitgehend gleich sind. Hier sind vorrangig die Testhefte und Ergänzungsmaterialien für die VERA-8-Arbeiten zu nennen, die die Länder zentral über das Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) der Humboldt-Universität zu Berlin entwickeln lassen.

Die Testdurchführung und meist auch die erste Auswertung liegen bei den Lehrkräften; spezielle Testleiter kommen nicht zum Einsatz. Im Unterschied zu den Schulleistungsuntersuchungen "PISA", "IGLU" oder "TIMSS" ist VERA *kein* Stichprobengestütztes "*System Monitoring*", mit dem die Entwicklung der Leistungsfähigkeit von Teilen des Bildungssystems überwacht wird. VERA ist vielmehr ein Instrument der Unterrichtsentwicklung, mit dem die Lehrkräfte an allen Schulen die Leistungsfähigkeit ihrer Schülerinnen und Schüler über den Bezugsrahmen ihrer Klasse und Schule sowie des konkreten Lehrplans hinaus beurteilen können.

Diese vor allem klassenbezogenen kompetenzorientierten Diagnosen stellen den Lehrkräften in Ergänzung ihrer unterrichtspraktisch-professionellen Erfahrungen Ansatzpunkte für den Unterricht bereit. Zudem soll das zentrale Einbeziehen der Lehrkräfte den Anstoß für eine fachdidaktische Diskussion und Kooperation in den Kollegien und Fachkonferenzen geben, die im idealen Fall die Form einer internen Evaluation und eines kontinuierlichen Optimierungsprozesses annehmen.

Die hierfür hilfreiche Auswertung der Tests (s. u.) und die Rückmeldung der Ergebnisse an Schulen und Lehrkräfte übernehmen die Länder, wie oftmals auch eine zentrale schriftliche Unterrichtung der Schülerinnen und Schüler bzw. deren Eltern.

### VERA-Testhefte und Bildungsstandards

Für jedes der vier Fächer wurden jeweils drei Testhefte erstellt, die zwar jeweils einige Aufgaben gemeinsam haben, sich untereinander aber in ihrem Gesamt-Schwierigkeitsgrad unterscheiden: Das Heft A (oder "1") ist als "leicht", das Heft B (bzw. "2") als "mittel" und das Heft C (bzw. "3") als "schwer" eingestuft. Die unterschiedliche Gesamtschwierigkeit der Hefte kommt durch die jeweilige Zusammenstellung aus unterschiedlich schweren Aufgaben zustande. In allen Heften sind jedoch sowohl einfache als auch mittlere und schwierige Aufgaben zu finden, so dass individuelle Leistungsunterschiede auch innerhalb von Klassen angemessen berücksichtigt werden. Die Testhefte wurden jeweils für einen 2 x 40-minütigen Testdurchgang entwickelt.

\_

<sup>4</sup> http://www.kmk.org/schul/Bildungsmonitoring\_Brosch%FCre\_Endf.pdf

Die Kompetenz-Orientierung des Tests ergibt sich durch die Entwicklung der einzelnen Testaufgaben auf Basis der länderübergreifenden Bildungsstandards, die von den Kultusministern als Zielvorgabe für Schülerleistungen und als Grundlage von Lehrplanentwicklung und Lehrerfortbildung ab dem Schuljahr 2004/2005 verbindlich eingeführt worden sind.

Bildungsstandards sind bekanntlich fachdidaktisch begründete und auf mittlerem Abstraktionsgrad formulierte Leistungserwartungen an die Schülerinnen und Schüler. Sie nehmen damit eine Mittelstellung zwischen sehr allgemeinen Bildungszielen einerseits und konkreten Aufgabenstellungen andererseits ein und setzen diese untereinander in Bezug. Sie sind dadurch sowohl zukunfts- und verwendungsoffen als auch gesellschaftlich konsensfähig. Die erwarteten Leistungen bestehen im Nachweis des Könnens seitens der Schülerinnen und Schüler, fachbezogene Problemaufgaben zu lösen.<sup>5</sup>

Bildungsstandards bestehen dreidimensional aus einer generalisierten inhaltsbezogenen Komponente ("Leitidee", "Basiskonzept"), die am ehesten den Inhalten traditioneller Lehrpläne entspricht, einer prozessual-formalen Komponente (allgemeine fachbezogene Kompetenzen) und einer eher kognitiven Komponente (Anforderungsbereiche, z. B. Anwendung / Übertragung / Kritik). Sie fokussieren auf den Kernbereich des jeweiligen Faches und zielen kumulatives, d.h. systematisch vernetztes Lernen an. Ihre Schwerpunkte legen sie stärker auf die prozessbezogenen und weniger auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen. Wie dies im Einzelnen aussieht, wird in Teil II dieser Handreichung fachbezogen ausgeführt.

Die Bildungsstandards im Fachbereich Mathematik sind aufgrund eines Beschlusses der Kultusministerkonferenz seit dem Schuljahr 2004/2005 bzw. 2005/2006 verbindliche Zielvorgaben für die Lehrplanentwicklung und die Lehrerbildung. Sie differenzieren nach angestrebtem Schulabschluss (HSA / MSA). Sie werden vom IQB in konkrete Testaufgaben umgesetzt ("operationalisiert").

Entscheidend für das Konzept der Bildungsstandards ist damit *erstens*, dass diese zwar auf eine (kumulativ zu erweiternde) Basis des theoretischen Fachwissens aufbauen, aber – aufgrund ihres Fokus auf der Lösung von fachlichen Problemen – v. a. dem tatsächlichen Handeln (-Können) und dem reflexiv-kritischen Bewerten (-Können) den entscheidenden Stellenwert einräumen, angestrebt über einen langfristigen Kompetenzaufbau.

Entscheidend für das Konzept der Bildungsstandards ist *zweitens*, dass diese *Output*-orientiert sind, also Zielformulierungen enthalten und lediglich Hinweise für die Lehrkräfte geben, wie diese erreicht werden können. Jede Schule bzw. Fachkonferenz soll in Form eines Schul-Curriculums einen eigenen, den jeweiligen Schülern angepassten, fördernden und differenzierenden Weg zu diesem Ziel finden.

Die den VERA-8-Arbeiten zugrundeliegenden Bildungsstandards beziehen sich auf die neunte bzw. die zehnte Klasse. Der relativ frühe Testzeitpunkt – vier Monate vor Ende der achten Klasse – ist mit Absicht gewählt, da auf diese Weise den Schülern und Lehrkräften genügend Zeit bleibt, dem Standort der Klasse im Hinblick auf den Haupt- bzw. Mittleren Schulabschluss Rechnung tragen und rechtzeitig Fördermaßnahmen einleiten zu können.

\_

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Das Kompetenz-Konzept der Bildungsstandards unterscheidet sich dementsprechend von den sog. "Schlüsselkompetenzen" (fachliche, methodische, soziale und personale Kompetenz) der berufspädagogischen Diskussion. Zum Konzept der Bildungsstandards s. die sog. Klieme-Expertise, zugänglich u. a. beim BMBF (http://www.bmbf.de/pub/zur\_entwicklung\_nationaler\_bildungsstandards.pdf).

# Der Aufbau der VERA-8-Testaufgaben

Die Testaufgaben bestehen aus einer Anleitung, einem Text bzw. einer Abbildung (dem "Stimulus") und aus teilweise mehreren Aufgabenstellungen (den "Items"). Die Items sollen möglichst unabhängig voneinander lösbar sein. Die Lösung kann in Form einer Ankreuzaufgabe, als Lücken- bzw. Kurzantwort oder mit ausführlicher Darlegung des Lösungswegs abgefordert werden.

Die in den VERA-Testheften eingesetzten Aufgaben wurden von erfahrenen Lehrkräften aus allen Schulformen und allen Bundesländern entwickelt und erprobt, von mit den Bildungsstandards vertrauten Wissenschaftlern aus den jeweiligen Fachdidaktiken bewertet und überarbeitet sowie schließlich ein Jahr vor ihrem Einsatz an einer Stichprobe von ca. 3.000 Schülern erprobt und normiert.

Dieser aufwändige, statistisch ausgewertete Vortest soll zum einen sicherstellen, dass die auf ihre fachdidaktische Güte überprüften Aufgaben fair (also z. B. geschlechterneutral, Minderheiten nicht benachteiligend etc.) und "trennscharf" sind (d.h., dass schwierigere Aufgaben eher von stärkeren Schülern eher als von schwächeren gelöst werden). Zum anderen werden über diesen Vortest realistische "Schwierigkeitswerte" gewonnen, die die Grundlage für die Zusammenstellung der Testhefte und die Ergebniswertung der Vergleichsarbeiten bilden.

Die statistischen Berechnungen, die die Aufgabeneignung prüfen und den Schwierigkeitswert ergeben, erfordern eine für manche Lehrkräfte ungewohnte Auswertung: Es wird nur "richtig" oder "falsch" gewertet; eine Teilrichtigkeit ist ebenso wie eine Gewichtung mit unterschiedlich hohen Punktzahlen nicht vorgesehen, und es wird eine oft als eng empfundene zeitliche Taktung vorgegeben. Der Verzicht auf unterschiedliche Punktzahlen liegt in der Berücksichtigung der empirisch ermittelten Schwierigkeit begründet (s.o.). Bezüglich des "Alles-oder-Nichts-Prinzips" der Wertung der einzelnen Items sei darauf verwiesen, dass dieses zum einen durch die Kleinteiligkeit der Teilaufgaben und zum anderen durch deren Anordnung nach Schwierigkeit kompensiert wird (zu Beginn des Testheftes stehen tendenziell die eher leichten, zum Schluss die eher schwierigen Aufgaben). Auch erlaubt dieses Prinzip eine zeitökonomische Korrektur.

Bei den in VERA verwendeten Aufgaben ist schließlich zu beachten, dass es sich um *Test*aufgaben handelt; sie sollen für Überprüfungszwecke einzelne Aspekte der Bildungsstandards möglichst trennscharf, isoliert und kleinschrittig *abprüfen*. Für den Kompetenzerwerb im Hinblick auf die umfassenden Bildungsstandards sind spezifische *Lern*aufgaben jedoch grundsätzlich besser geeignet. Durch die hiermit vorliegende Handreichung soll es aber möglich werden, auch die Testaufgaben kompetenzfördernd und lernwirksam im Unterricht einzusetzen.

# Testauswertung und Ergebnisinterpretation

Eine einfache Form der Ergebnisrückmeldung ist die Angabe, wie viel Prozent der Schülerinnen und Schüler eine (Teil-) Aufgabe korrekt gelöst haben (Lösungshäufigkeit). Wenn die Lehrkräfte hierzu Vergleichswerte erhalten (z. B. Ergebnisse anderer Schulen des gleichen Typs), ist ihnen eine näherungsweise Einschätzung ihrer Klassen oder von Schülergruppen möglich.

Da jedoch von den meisten Aufgaben die Schwierigkeitsgrade bekannt sind, kann durch eine statistische Berechnung auch ein Punktwert zurückgemeldet werden. Diese Werte (wie sie auch von PISA bekannt sind) werden inhaltlich illustriert durch Beschreibungen der Kompetenzniveaus, die den Stand der Schülerinnen und Schüler verallgemeinernd charakterisieren.

Das Testergebnis bezogen auf einzelne Schüler/-innen bedarf ergänzender diagnostischer Informationen, z. B. zum individuellen Lernfortschritt. Klassenergebnisse sind hingegen als zuverlässig und von hohem Wert zu betrachten. Um diesen Wert, der den Ausgangspunkt für

eine kompetenzorientierte Unterrichtsentwicklung bilden kann, nicht zu gefährden, sind verengende Vorbereitungsmaßnahmen ("teaching to the test") sowie unzulässige Hilfestellungen bei der Testdurchführung zu vermeiden.

# 2. Fachallgemeine Erläuterungen

# Kompetenzorientiertes Unterrichten von Mathematik

Zuerst werden die wesentlichen Komponenten der Bildungsstandards Mathematik sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt. Danach werden einige allgemeine Überlegungen skizziert, wie das Fach Mathematik so unterrichtet werden kann, dass gute Chancen auf die Erreichung der durch die Standards vorgegebenen Ziele bestehen.

# 1. Die Bildungsstandards Mathematik

Wie – fächerübergreifend – in Abschnitt I ausgeführt worden ist, beschreiben Bildungsstandards die fachbezogenen *Kompetenzen*, die Schüler bis zu gewissen Zeitpunkten ihrer Schullaufbahn erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die nur in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen *Fachinhalten* erworben werden können. Illustriert und konkretisiert werden solche Kompetenzen durch *Aufgaben*, zu deren Lösung diese Kompetenzen benötigt werden. Das wesentliche Ziel von Bildungsstandards ist es, die *Qualität des Unterrichts* zu steigern (siehe II.3) und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schüler zu verbessern. Daneben sollen die Standards eine *Orientierung* über verbindliche Zielerwartungen bieten ebenso wie Möglichkeiten zur *Überprüfung*, inwieweit diese Ziele bis zu definierten Punkten in Bildungsgängen erreicht worden sind.

Konkret werden bei den Bildungsstandards *Mathematik* für den mittleren Schulabschluss drei "Dimensionen" unterschieden, die man als "Prozess"-, "Inhalts"- und "Anspruchs"-Dimension bezeichnen kann:

Anspruch (Anforderungsbereiche) (Leitideen)

- 1) Die "*Prozess*"-Dimension besteht aus den allgemeinen mathematischen *Kompetenzen*, deren Erwerb im Mittelpunkt des Unterrichts stehen soll; im Einzelnen sind dies<sup>6</sup>:
  - Mathematisch argumentieren (K1),
  - Probleme mathematisch lösen (K2),
  - Mathematisch modellieren (K3),
  - Mathematische Darstellungen verwenden (K4),
  - Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5),
  - Mathematisch kommunizieren (K6).

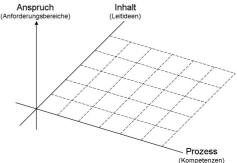


Abb. II.1: Kompetenzmodell

Diese Aufschlüsselung von "mathematischer Kompetenz" in einzelne Kompetenzen soll eine gezielte Entwicklung dieser Fähigkeiten und Fertigkeiten ermöglichen. Dabei ist es weder möglich noch beabsichtigt, die einzelnen Kompetenzen scharf voneinander abzugrenzen. Vielmehr ist es geradezu typisch für mathematisches Arbeiten, dass mehrere Kompetenzen im Verbund benötigt werden und sich die verschiedenen Kompetenzen gegenseitig durchdringen. Parallel zum Erwerb von Kompetenzen sind im Unterricht auch mathematisches Grundwissen sowie Grundvorstellungen von mathematischen Begriffen und Methoden langfristig aufzubauen.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Genauer werden die Kompetenzen im Buch "Bildungsstandards Mathematik: konkret" (Hrsg. W. Blum u.a., Cornelsen-Scriptor 2006) beschrieben.

- 2) Die "Inhalts"-Dimension wird bestimmt von den inhaltsbezogenen Leitideen, anhand derer die Kompetenzen erworben werden sollen; im Einzelnen sind dies:
  - Leitidee Zahl (L1),
  - Leitidee Messen (L2),
  - Leitidee Raum und Form (L3),
  - Leitidee funktionaler Zusammenhang (L4),
  - Leitidee Daten und Zufall (L5).

Innerhalb dieser Leitideen gibt es konkrete Inhalte, die sogenannten *inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen*, die typischerweise zum mathematischen Schulcurriculum gehören und mit deren Hilfe die allgemeinen mathematischen Kompetenzen erworben werden sollen. Die – eher "phänomenologisch" orientierten – Leitideen sind nicht identisch mit den klassischen *Stoffgebieten* der Schulmathematik (Zahlen und Größen, Geometrie, Algebra, Stochastik), es gibt aber offensichtliche enge Beziehungen zwischen Leitideen und Stoffgebieten. Die Strukturierung der Inhalte nach Leitideen soll stärker als bisher die *Verbindungen* zwischen den verschiedenen Stoffgebieten betonen (z.B. funktionale Beziehungen im geometrischen Kontext).

- 3) Die "Anspruchs"-Dimension ergibt sich aus den Anforderungsbereichen, die den kognitiven Anspruch kompetenzbezogener mathematischer Tätigkeiten vor allem beim Bearbeiten von Aufgaben auf theoretischer Ebene beschreiben sollen. Bei den Mathematik-Standards unterscheidet man pragmatisch drei solche Anforderungsbereiche (d.h. Anspruchsniveaus), die kurz mit
  - "Reproduzieren" (AB I),
  - "Zusammenhänge herstellen" (AB II),
  - "Verallgemeinern und reflektieren" (AB III)

überschrieben sind. Natürlich sind die Übergänge zwischen diesen Bereichen fließend. Je nachdem, wie viele Kompetenzen auf welchen dieser Anspruchsniveaus gefordert sind, werden Aufgaben einem der drei Anforderungsbereiche zugeordnet<sup>7</sup>. Dieses theoretische Anspruchsniveau einer Aufgabe darf keinesfalls mit der *empirischen* Schwierigkeit der Aufgabe verwechselt werden (wobei kognitiv anspruchsvollere Aufgaben natürlich tendenziell auch schwieriger sind; mehr dazu im folgenden Abschnitt).

Bildungstheoretische Grundlage dieses dreidimensionalen "Kompetenzmodells" ist der Allgemeinbildungsauftrag des Unterrichtsfachs Mathematik, wie er prägnant von Heinrich Winter beschrieben worden ist (Winter, 2003). Hierauf beziehen sich die von der KMK verabschiedeten Bildungsstandards Mathematik in ihrer Präambel ausdrücklich: Schüler sollen im Mathematikunterricht drei *Grunderfahrungen* kennenlernen, nämlich Mathematik

- als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt um uns in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen,
- als geistige Schöpfung und Welt eigener Art,
- als Hilfsmittel zum Erwerb fachbezogener und fachübergreifender Fähigkeiten.

Selbstverständlich kann und soll Bildung nicht auf fachbezogene kognitive Leistungen eingeschränkt werden; vielmehr schließt eine umfassende schulische Bildung u.a. auch soziale Kompetenzen sowie motivationale und emotionale Faktoren mit ein. Dies wird in Abschnitt IV exemplarisch deutlich, wenn es um die Förderung von Modellierungskompetenz geht.

# 2. Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die im vorangegangenen Abschnitt dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik ist *theoretischer* Natur. Interessant ist nun natürlich zu wissen, wie schwierig einzelne Aufgaben tatsächlich sind und was Schüler verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge in Bezug auf diese Aufgaben tatsächlich "können"; hierfür braucht man *empirische* Daten. Damit kann man dann sowohl die Aufgaben – nach

\_

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> Siehe die Tabelle am Anfang des Abschnitts III.

Schwierigkeit – als auch die Schüler – nach Leistungsfähigkeit – gewissen "Stufen" zuordnen, was allen Beteiligten hilfreiche Orientierungen geben kann.

Wie bereits in Abschnitt I ausgeführt worden ist, ist der Vera-8-Test aus Aufgaben zusammengesetzt, die an einer repräsentativen Stichprobe von annähernd 3000 Achtklässlern getestet worden sind. Die Ergebnisse sind dann aus rein technischen Gründen mithilfe gängiger statistischer Verfahren auf eine Skala mit Mittelwert 500 und Standardabweichung 100 transformiert worden<sup>8</sup>. Jeder Aufgabe ist hierdurch also ein solcher Kennwert, der ein Maß für die relative *Schwierigkeit der Aufgaben* ist, zugeordnet. Leichte Aufgaben haben somit auf dieser Skala Kennwerte von 400 und darunter, schwierige Aufgaben Kennwerte von 600 und darüber. Selbstverständlich stellt das, was als "leicht" oder "schwer" eingestuft wird, nur eine Momentaufnahme dar, die zu einem späteren Zeitpunkt – je nach unterrichtlichen Schwerpunktsetzungen – auch anders ausfallen kann.

Wie ebenfalls in Abschnitt I ausgeführt, kann man die mathematische *Kompetenz von Schülern* in direkte Beziehung zur Schwierigkeit von Aufgaben setzen und auf derselben Skala abbilden<sup>9</sup>. Auf diese Weise ist eine inhaltliche Beschreibung von bestimmten Intervallen auf dieser Skala, *Kompetenzstufen* genannt<sup>10</sup>, und damit auch eine Setzung von Standards aufgrund inhaltlicher Kriterien möglich. Sowohl für den Mittleren Schulabschluss als auch für den Hauptschulabschluss ist die Skala – jeweils abschlussspezifisch – in fünf solche Intervalle eingeteilt worden (Kompetenzstufen I bis V), wobei das erste nach unten und das letzte nach oben offen sind. Die folgende Abbildung zeigt die Stufen, wie sie für den mittleren Schulabschluss definiert worden sind; die "Perzentile" geben dabei an, wie viel Prozent der Aufgaben bzw. der Schüler bei idealer Verteilung bis zu den entsprechenden Skalenwerten vorhanden sind.

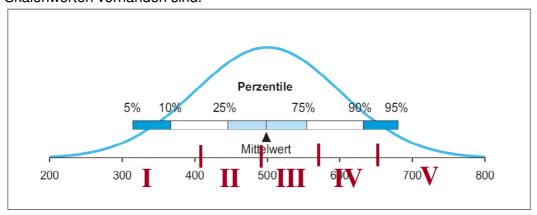


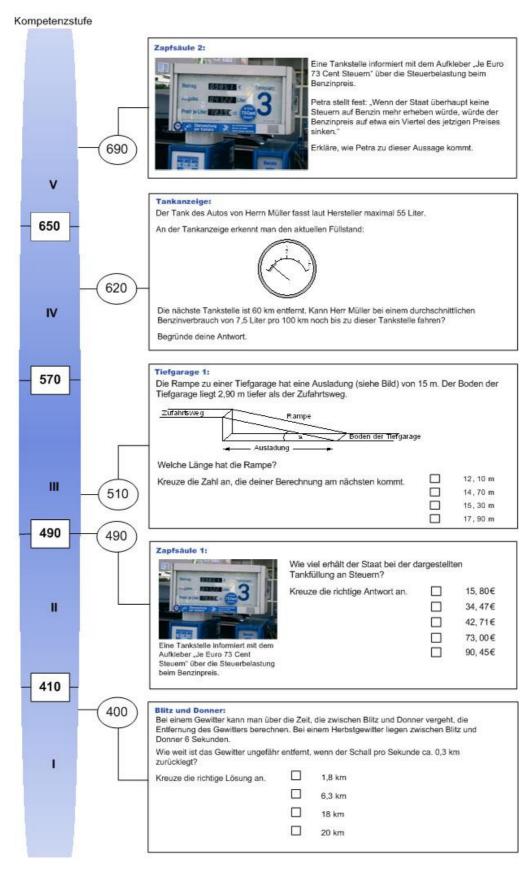
Abb. II.2: Zusammenhang der Perzentile und Kompetenzstufen

In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet worden (wieder für den mittleren Schulabschluss).

<sup>9</sup> Genauer wurde die Skala der Bildungsstandards so normiert, dass ein Schüler mit einem bestimmten Personen-(Fähigkeits-)Kennwert eine Aufgabe mit demselben Aufgaben-(Schwierigkeits-)Kennwert mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa zwei Drittel lösen kann.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup> Diese Transformation ist im Grunde willkürlich und wurde unter pragmatischen Gesichtspunkten gewählt (Anschlussfähigkeit an PISA).

Dieser Begriff könnte insofern missverständlich sein, als Stufen der mathematischen Kompetenz von Schülern gemeint sind, nicht Stufungen der einzelnen Kompetenzen. Man könnte vielleicht besser – bezogen auf die Aufgaben – von "Schwierigkeitsstufen" sprechen. Genauere Erläuterungen und detaillierte Beschreibungen zu den Kompetenzstufen für den Mittleren Schulabschluss einschließlich vieler illustrierender Beispiele finden sich im Buch "Bildungsstandards: Kompetenzen überprüfen. Mathematik Sekundarstufe I" (Hrsg. M. Katzenbach u.a., Cornelsen-Scriptor 2009, Kap. 3.4, S. 15ff).



Aus Platzgründen sind die Aufgaben in modifiziertem Layout dargestellt.

Abb. II.3: Kompetenzstufen mit Beispielaufgaben

Als Ausgangswert für diese Stufen-Einteilungen wurde jeweils das obere Ende von Kompetenzstufe I gewählt und zwar so, dass alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts nur solche Anforderungen stellen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von

allen Schülern des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss; man spricht hier vom *Mindeststandard* des Bildungsgangs. Schüler, die diesen Mindeststandard nicht erfüllen, haben ganz besonderen *Förderbedarf*.

Der Regelstandard, den die Schüler des betreffenden Bildungsgangs zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Wer den Regelstandard für den mittleren Schulabschluss erfüllt, soll über "Sekundarstufe I-typische" mathematische Kompetenzen verfügen. Hierzu gehört eine mathematische Grundbildung<sup>11</sup>, die u.a. elementare Begründungen, basale Begriffsbildungen und Standardmodellierungen einschließt und die einen Beitrag dazu leistet, dass Jugendliche in Alltag und Beruf als "mündiger Bürger" handeln können. Der entsprechende Schwellenwert liegt etwa in der Mitte von Kompetenzstufe III. Für den Hauptschulabschluss sind die Anforderungen geringer angesetzt; in jedem Fall soll mathematische Grundbildung hier das Arbeiten mit Standardmodellen sowie basale arithmetische und geometrische Begriffsbildungen mit einschließen.

# 3. Unterrichtsqualität

Aufgaben wie die im Vera-Test enthaltenen können nicht nur zur Feststellung von Leistungsständen, sondern auch zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben per se bei den Schülern zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Schülerfähigkeiten angepasste Auswahl von Aufgaben und deren adäguate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so sagen alle empirischen Untersuchungen – ausreichend viele Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren u. v. a. m. Die Ergebnisse von nationalen und internationalen Leistungsvergleichen weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schüler im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen "kompetenzorientierten Unterricht" achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Schüler und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus. Einige diesbezügliche Anregungen sind in Abschnitt IV zu finden; viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind enthalten z.B. in Bruder/Leuders/Büchter (2008) oder in Blum u.a. (2007).

Die eben stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für "*Unterrichtsqualität*" im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden<sup>12</sup>:

- Eine fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung, die Schülern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren, usw.) und bei der auch immer vielfältige Vernetzungen hergestellt werden sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität.
- Eine konsequente kognitive Aktivierung der Lernenden, wo der Unterricht geistige Schülertätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.
- Eine effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine

\_

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup> Zu diesem Begriff vergleiche man auch die Ausführungen in Klieme/Neubrand/Lüdtke (2001).

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup> Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum u. a. (2007).

störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird, Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind, u. a. m.

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind (vgl. u a. Helmke, 2003, Baumert u.a., 2004). Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums *kompetenzorientierter Aufgaben*, darunter auch "selbstdifferenzierende" (d.h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schüler gleichermaßen geeignet sind). Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, indem sie Schülern ermöglichen, entsprechend ihren Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schülerlösungen präsentieren und diskutieren lassen. In Abschnitt IV geben wir etwas konkretere Hinweise, wie Kompetenzen (hier speziell: die Modellierungskompetenz) im Unterricht gefördert werden können.

# 3. Testaufgaben "Vergleichsarbeiten Mathematik 8. Klasse"

# Übersichtstabelle

	No do . A. Coole .	и		Kompetenz					Leitidee				AB		
Nr.	Name der Aufgabe		Item	K1	K2	К3	K4	K5	K6	L1	L2	L3	L4	L5	AB
1	Apfelkauf	M1403701_	_Apfelkauf			Х		Х		Х					I
2	Zwanzig Prozent	M1403801_	_Zwanzig Prozent					Х		Х					I
3	Termberechnung	M1401701	Termberechnung					Х		Х					1
4.1	Fahrradverleih	M1402101_	_Fahrradverleih			Х		Х		Х					П
4.2	Fahrradverleih	M1402102_	_Fahrradverleih			Х		Х		Х					Ш
4.3	Fahrradverleih	M1402103_	_Fahrradverleih			Х		х	Х	Х					I
5.1	Ganze Zahlen	M1403201_	_Ganze Zahlen					Х		Х					- 1
5.2	Ganze Zahlen	M1403202_	_Ganze Zahlen		Х			Х		Х					I
5.3	Ganze Zahlen	M1403203	Ganze Zahlen		Х			Х		Х					Ш
6	Skianzug	M1403501_	Skianzug	Х		Х		Х		Х					Ш
7.1	Waschpulver	M1400401	Waschpulver			Х		Х	Х	Х					I
7.2	Waschpulver	M1400402	Waschpulver			Х		Х	Х	Х					I
8.1	Internetauktion	M5401201	Internetauktion				х	Х						х	I
8.2	Internetauktion	M5401203	Internetauktion			Х	х	Х						х	Ш
9.1	Computernutzung	M5402201	Computernutzung				х							х	I
9.2	Computernutzung	M5402202	Computernutzung				х		Х					х	Ш
10.1	Glücksrad	M5401001	Glücksrad			х	х							х	ı
10.2	Glücksrad	M5401002	Glücksrad			Х	Х							х	1
10.3	Glücksrad	M5401003	Glücksrad			х	х							Х	ı
10.4	Glücksrad	M5401005	Glücksrad		Х	х	Х	Х	Х					Х	Ш
11.1	Steckwürfelfiguren	M5400401	Steckwürfelfiguren			Х			Х					х	ı
11.2	Steckwürfelfiguren	M5400402	Steckwürfelfiguren			х			Х					Х	ī
12	Schokoladenriegel	M5402301	_Schokoladenriegel			х			Х					Х	ī
13	Gleichung lösen	M4402301	_Gleichung lösen					Х					Х		ı
14.1	Kleinanzeigen	M4400301	Kleinanzeigen			х							Х		ī
14.2	Kleinanzeigen	M4400302	Kleinanzeigen			Х		Х					Х		ī
14.3	Kleinanzeigen	M4400303	Kleinanzeigen		х	Х		Х					Х		ī
14.4	Kleinanzeigen	M4400304	Kleinanzeigen			Х		Х					Х		Ш
15	Fähre	M4400201	Fähre			Х	х	Х	Х				Х		Ш
16.1	Vaters Alter	M4401401	Vaters Alter		х	Х		Х					Х		II
16.2	Vaters Alter	M4401402	Vaters Alter			х		Х					Х		Ш
17	Dreisatz	M2400201	Dreisatz		Х		Х	Х					х		Ш
18.1	Zoobesuch	M4401701	Zoobesuch	Х	Х	Х		Х	Х				Х		Ш
18.2	Zoobesuch	M4401702	Zoobesuch	Х	Х	Х		Х	Х				Х		Ш
19	Würfelnetze	M3402901	Würfelnetze				Х					Х			Ī
20.1	Im Koordinatensystem	M4400901	_Im Koordinatensystem				Х	Х				Х			i
20.2	Im Koordinatensystem	M4400902	_Im Koordinatensystem		Х		Х	Х				Х			Ī
20.3	Im Koordinatensystem	M4400903	_Im Koordinatensystem				Х	Х				Х			II
21	Dreiecksfläche	M2401501	Dreiecksfläche	Х			Х	Х			Х				II.
22	Quadratfläche färben	M2401901_	Quadratfläche färben	Ė			Х	Х			Х				Ī
23	Feuerlöschdecke	M2401701_	Feuerlöschdecke		х			Х			Х				i
24	Rechteckszeichnung	M2400701	_Rechteckszeichnung		Х		х	Х			Х				i II
25	Quadrat und Dreieck	M3401101	Quadrat und Dreieck				Х	Х			<u> </u>	х			<u>;</u>
26.1	Würfel erforschen	M2404601	Würfel erforschen					X			х	-			İ
26.2	Würfel erforschen	M2404602	Würfel erforschen					X			X				i
27	Trapez	M2404501	Trapez	х			Х	X	Х		X				III

# Aufgabe 1: Apfelkauf

# Aufgabentext

4 kg Äpfel kosten 9,60 €.

Berechne, wie viel 6 kg derselben Sorte kosten.

M1403701a

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 1. Zahl	
Allgemeine Kompetenz: 3, 5	
Anforderungsbereich: I	

# Kodieranweisung

Aufgabe 1: Apfelkauf						
Item: M1403701						
RICHTIG						
	14,40 €					
FALSCH						
	alle anderen Antworten					

# Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe ist mithilfe eines Standardverfahrens ("Dreisatz") lösbar und kann daher der Leitidee Zahl (L1) zugeordnet werden. Da diesem Verfahren eine proportionale Zuordnung zugrundeliegt, gehört die Aufgabe ebenso zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4). Die Schüler stellen zunächst ein direkt erkennbares und vertrautes mathematisches Modell auf (K3) und errechnen mit dessen Hilfe den gesuchten Preis (K5). Beim Aufstellen des Modells können unterschiedliche Proportionalitäts-Vorstellungen angewendet werden, z. B. die des Vervielfachens, d. h. zum anderthalbfachen Gewicht gehört der anderthalbfache Preis. Alternativ können sie von der Grundvorstellung der Proportionalität ausgehend beispielsweise den Preis von 2,40 € pro Kilo verwenden.

Diese Aufgabe wird dem Anforderungsbereich I zugeordnet, da die Lösung eine direkte Anwendung eines grundlegenden Verfahrens erfordert.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

 Beim Kombinieren der Grundvorstellungen des Vervielfachens und des Addierens unterlaufen Fehler. In der nachstehenden Schülerlösung ist erkennbar, dass zunächst der Preis für die Einheit (hier: 1kg) richtig errechnet wird, dann aber ein Fehler bei der Ermittlung des Preises der Vielheit unterläuft. Statt den Preis für 2kg zu den gegebenen 9,60 € zu addieren, wird lediglich der Preis für 1kg addiert und somit der Preis für 5kg Äpfel berechnet (Fehllösung 12€) (K3).

- Die Aufgabenstellung wird ungenau gelesen und 9,60€ als Kilopreis gedeutet, und der sich ergebende Betrag wird nicht reflektiert (Fehllösung 57,60€) (u.a. K3, K5).
- Die Grundvorstellung des Vervielfachens wird auf nicht zusammengehörige Größen angewendet, wie die nächste Schülerlösung zeigt (K3).

Berechne, wie viel 6 kg derselben Sorte kosten. 
$$geg: 4 kg = 9.606$$
 $ges: *?$ 
 $4:(4 kg -> 9.606): 4$ 
 $> 1 kg -> 2.466$ 
 $? 14 \cdot (2.46 -> 23.046) \cdot 2.4$ 
 $4 kg = 9.606$ 
 $4 kg/t$ 
 $6 kg$  koolen  $23.046$ 

- Grundvorstellungen zu Prozent und zu Proportionen werden miteinander vermischt (K3).
- Die gegebenen Größen werden ohne einen Bezug zur Realität miteinander kombiniert (K3).

# Aufgabe 2: Zwanzig Prozent

# Aufgabentext

Berechne 20% von 150 €.

M1403801a

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 1. Zahl	
Allgemeine Kompetenz: 5	
Anforderungsbereich: I	

# Kodieranweisung

Aufgabe 2	Aufgabe 2: Zwanzig Prozent					
Item: M1403	801					
RICHTIG						
	30 €					
	Anmerkung: Die Einheit muss angegeben werden.					
FALSCH						
	alle anderen Antworten					

# Aufgabenbezogener Kommentar

Bei dieser Aufgabe ist die Prozentrechnung sachgerecht anzuwenden, weshalb die Aufgabe zur Leitidee Zahl (L1) gehört.

Man muss technisch arbeiten (K5), um den gesuchten Prozentwert zu ermitteln. Dabei können verschiedene Grundvorstellungen zur Prozentrechnung aktiviert werden. Wird z.B.

die Hundertstel-Vorstellung angewandt, wird der gesuchte Wert durch " $\frac{20}{100} \cdot 150 \in$ " oder

"0,2·150€" ermittelt. Alternativ kann auch 10% von 150€ bestimmt und der erhaltene Prozentwert verdoppelt werden.

Diese Aufgabe ist dem Anforderungsbereich I zuzuweisen, da in einem abgegrenzten Gebiet ein grundlegendes Verfahren direkt angewendet wird.

# Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Die Umrechnung des Prozentsatzes in einen Dezimal- oder in einen Hundertstel-Bruch gelingt nicht (Fehllösungen: 3€ bzw. 3000€) (K5).
- Der gegebene Grundwert wird als Prozentwert gedeutet, und dieser wird durch den Prozentsatz dividiert (Fehllösungen: 7,50€ oder 750€). Die abgebildete Schülerlösung illustriert diesen Fehlertyp (K5).

Berechne 20 % von 150 €.		٠.		M1403801a
200: Pw: 150E	120€			•
P 301	1001218			
200 :00 16	X-150.100=750		÷	
•	90	•		

 Beim Bilden des Anteils wird nur die Einheit ermittelt, so dass z. B. nur 1% oder 10% von 150€ angegeben werden (Fehllösungen: 1,50€ bzw. 15€) (K5).

# Aufgabe 3: Termberechnung

# Aufgabentext

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 5
Anforderungsbereich: I

# Kodieranweisung

Aufgabe 3	Aufgabe 3: Termberechnung					
Item: M1401	Item: M1401701					
RICHTIG						
	3. Kästchen wurde angekreuzt					
FALSCH	<u> </u>					
	alle anderen Antworten					

# Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört der Leitidee Zahl (L1) an, da zur Ermittlung des Werts des Terms elementare Rechenoperationen unter Beachtung einfacher Vorrangregeln durchgeführt werden müssen.

Die Aufgabe wird rein technisch gelöst (K5).

Da nur elementares Rechnen in einem wiederholenden Zusammenhang nötig ist, gehört die Aufgabe zum Anforderungsbereich I.

# Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- (Fehllösung 12): Das Multiplikationszeichen wird übersehen, und es werden lediglich alle Zahlen addiert (Rechnung: 5 + 2 + 4 + 1 = 12) (K5).
- (Fehllösung 14): Unter Missachtung der Klammer, jedoch unter Beachtung des Vorrangs der Multiplikation vor der Addition, wird von links nach rechts gerechnet (Rechnung: 5 + 2 4 + 1 = 14) (K5).
- (Fehllösung 29): Zuerst werden 5 und 2 addiert. Diese Summe wird anschließend mit 4 multipliziert, und schließlich wird 1 addiert. Mehrere Vorrangregeln werden somit missachtet (Rechnung: (5 + 2) 4 + 1) (K5).
- (Fehllösung 35): Um 5 + 2 wird eine Klammer gedacht. Dann werden zuerst die Summen in beiden Klammern gebildet und anschließend miteinander multipliziert (vgl. Schülerlösung) (K5).

Berechne 5 + 2 · Kreuze das richtig		M1401701a				
				×		
12	14	15	29	35		
					·.	
5+2=7	7.5	-				
4+ 4=5						

# Aufgabe 4: Fahrradverleih

# Teilaufgabe 4.1:Fahrradverleih

# Aufgabentext

Beim Fahrradverleih beträgt die Leihgebühr für ein Fahrrad pro Woche 21 €.

Familie Meier leiht drei Fahrräder für zwei Wochen und bekommt 10% Rabatt gewährt.

Wie hoch ist die Leihgebühr?

M1402101a

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: II

# Kodieranweisung

Aufgabe 4	Aufgabe 4.1: Fahrradverleih					
Item: M1402	Item: M1402101					
RICHTIG						
	113,40 € (auch korrekt: ca. 113 €)					
	Anmerkung: Die Einheit muss angegeben sein!					
FALSCH						
	alle anderen Antworten					

# Teilaufgabe 4.2: Fahrradverleih

# Aufgabentext

Eine Schulklasse leiht 18 Fahrräder für eine Woche und bezahlt 320 €.

Wie viel Prozent Rabatt wurde gewährt?

M1402102a

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: II

# Kodieranweisung

Aufgabe 4.2: Fahrradverleih	
Item: M1402102	
RICHTIG	
	Es wurden ca. 15 % Rabatt (genaues Ergebnis: 15,343915%) gewährt. Alle korrekt gerundeten Werte werden akzeptiert!
FALSCH	
	alle anderen Antworten

# Teilaufgabe 4.3: Fahrradverleih

# Aufgabentext

Der Besitzer des Fahrradverleihs kauft neue Fahrräder. Er bezahlt für jedes Fahrrad 410 €.

M1402103a

Wie viele Wochen muss ein Fahrrad zur Leihgebühr von 21 € mindestens verliehen werden, damit die Einnahmen so hoch sind wie der Kaufpreis?

Mögliche Reparaturkosten und Ähnliches bleiben unberücksichtigt.

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 1. Zahl	
Allgemeine Kompete	nz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich	:1

# Kodieranweisung

Aufgabe 4.3: Fahrradverleih	
Item: M1402103	
RICHTIG	
	Ca. 20 Wochen (akzeptiert wird auch ca. 19,5 Wochen)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

# Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da es um die Durchführung elementarer Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen bzw. Größen sowie Prozenten geht.

Zur Lösung der ersten beiden Teilaufgaben sind auf der Grundlage von Vorstellungen zum Prozentbegriff geeignete Modelle auszuwählen (K3), um die gesuchten Größen (Leihgebühr oder Rabatt in Prozent) berechnen zu können (K5).

In Teilaufgabe 2 müssen zunächst die Leihgebühren ohne Rabatt und anschließend die prozentuale Ermäßigung berechnet werden. Die in diesem Zusammenhang durchzuführenden Rechenverfahren sind mehrschrittig (K5).

Bei Teilaufgabe 3 beruht die Auswahl des richtigen mathematischen Modells auf einer Divisions-Vorstellung im Sinne des Aufteilens (K3). Die anschließend erforderliche Rechnung ist elementar (K5). Alle zur Bearbeitung dieser Teilaufgabe benötigten Informationen sind dem Aufgabentext zu entnehmen (K6).

Aufgrund des mehrschrittigen Lösungsprozesses ist den Teilaufgabe 1 und 2 jeweils der Anforderungsbereich II zuzuordnen. Teilaufgabe 3 dagegen gehört aufgrund der direkten Anwendbarkeit mathematischer Kompetenzen sowie des einschrittigen Lösungsweges dem Anforderungsbereich I an.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

# Zu [01]:

- Die Anzahl der geliehenen Fahrräder bzw. die Leihdauer wird vernachlässigt. So wird beispielsweise die Leihgebühr für drei Räder in einer Woche bei 10% Rabatt berechnet (Fehllösung: 56,70 €) (K3, K6).
- Es wird nicht die Leihgebühr, sondern die Höhe des Rabatts in Euro bestimmt (Fehllösung: 12,60 €) (K3, K6).
- Die Leihgebühr ohne den Rabatt von 10% wird berechnet (Fehllösung: 126 €) (K3, K6).
- Anstelle der 10% werden 10 € als Rabatt von der Leihgebühr abgezogen (Fehllösung: 116 €) (K3, K5).

### Zu [02]:

- Es wird der Rabatt in Euro ermittelt (Fehllösung: 58 €) (K3, K6).
- Die Einsparung von 58 € wird direkt in Prozent "umgewandelt" (Fehllösung: 58%; 5,8% oder 0,58%).
- Die Einsparung in Euro (58 €) wird bei der Berechnung der prozentualen Ermäßigung in Bezug zum reduzierten Preis (320 €) gesetzt (Fehllösung: 18%) (K3).
- Es wird nicht die prozentuale Ermäßigung, sondern der prozentuale Anteil des zu zahlenden Betrags bestimmt (Fehllösung: 85%) (K3).

### Zu [03]:

• Das Ergebnis wird inhaltlich falsch gerundet (Fehllösung: 19) (K3, K5).

Aufgabe 5: Gan	ze Zahlen			
Teilaufgabe 5.1: G	anze Zahlen			
Aufgabentext				
	<b>7</b> -bl 40	h:- 40. 40. 0. 0.	- 0- 0- 10	
-	anzen Zahlen von -10	bis 10: -10; -9; -8; .	; 8; 9; 10 .	M1403201
Wie viele Zahlen sir	nd das?			
Kreuze an.				
9	10	20	<u></u> 21	
9	10	20	21	
Aufgabenkennwerte	9			
Merkmale:				
Leitidee: 1. Zahl Allgemeine Kompeter	nz: 5			
Anforderungsbereich:				
<u> </u>				
Kodieranweisung				
Aufgabe 5.1: Ganze	Zahlen			
RICHTIG				
	en wurde angekreuzt			
FALSCH				
alle ander	ren Antworten			
Toiloufacha E 2: C	Sanza Zahlan			
Teilaufgabe 5.2: G	aanze zamen			
Aufgabentext				
Wähle aus den gege aus, dass gilt: a + b	ebenen Zahlen zwei <b>v</b> o = -18.	<b>erschiedene</b> Zahlen	ı für a und b so	M1403202
Gib zwei solche Zah	len a und b an:			
a=	b =			
A f a. a la a . a l. a . a . a				
Aufgabenkennwerte	<del></del>			
Merkmale: Leitidee: 1. Zahl				
Allgemeine Kompeter	nz: 2, 5			
Anforderungsbereich:				

# Kodieranweisung

Aufgabe 5.2: Ganze Zahlen		
Item: M1403	Item: M1403202	
RICHTIG		
	Angabe zweier verschiedenen Zahlen, deren Summe -18 ergibt.  Z.B. a = -8; b = -10  ODER:	
	a= -10; b= -8	
FALSCH		
	alle anderen Antworten	

# Teilaufgabe 5.3: Ganze Zahlen

# Aufgabentext

Wähle aus den gegebenen Zahlen zwei **verschiedene** Zahlen für a und b so aus, dass sich für  $(a + b)^2$  der größtmögliche Wert ergibt.

Gib zwei solche Zahlen a und b an:

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 1. Zahl	
Allgemeine Kompetenz: 2, 5	
Anforderungsbereich: II	

# Kodieranweisung

Aufgabe 5.3: Ganze Zahlen		
Item: M14032	Item: M1403203	
RICHTIG	RICHTIG	
	a= -10; b= -9 (bzw. a= -9; b= -10)	
	ODER:	
	a= 10; b= 9 (bzw. a= 9; b= 10)	
FALSCH		
	alle anderen Antworten	

M1403203a

# Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da es um den verständigen Umgang mit ganzen Zahlen geht.

Bei Teilaufgabe 1 müssen die Schüler durch geschicktes Abzählen oder Berechnen die Anzahl der ganzen Zahlen in der angegebenen Menge bestimmen (K5). Aufgrund dieser rein reproduktiven Anforderungen wird diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich I zugewiesen.

Teilaufgabe 2 erfordert zur Lösung zusätzlich die Anwendung elementarer heuristischer Hilfsmittel und Strategien (K2). Dabei bietet es sich insbesondere an durch systematisches Probieren oder inhaltliche Überlegungen eine der möglichen Zahlenkombinationen (a = -8, b = -10 oder a = -10, b = -8) zu ermitteln. Aufgrund der direkten Anwendbarkeit bekannter Problemlösestrategien wird diese Teilaufgabe ebenfalls dem Anforderungsbereich I zugeordnet.

Zur Lösung der Teilaufgabe 3 sind dieselben Kompetenzen wie bei Teilaufgabe 2 anzuwenden. Allerdings sind die Anforderungen an das symbolische, technische und formale Arbeiten anspruchsvoller, da aufgrund der vorgegebenen Bedingung entweder mehrere Rechenschritte durchgeführt werden müssen oder aber ein verständnisorientierter Umgang mit den Rechenregeln zur Addition und Multiplikation rationaler Zahlen nötig ist. Vor diesem Hintergrund ist diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich II zuzuweisen.

# Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

### Zu [01]:

- Die Null wird nicht berücksichtigt (Fehllösung: 20) (K5).
- Es wird nur die Anzahl der negativen bzw. der positiven Zahlen ermittelt (Fehllösung: 10) (K5).

### Zu [02]:

- Die beiden ausgewählten Zahlen sind nicht verschieden (Fehllösung: a = b = -9).
- Es werden Zahlen außerhalb des angegebenen Bereichs einbezogen (z.B. Fehllösung: a = -28; b = 10).
- Das negative Vorzeichen des Ergebnisses wird vernachlässigt (Fehllösung: a = 8; b = 10) (K5).

# Zu [03]:

- Die beiden ausgewählten Zahlen sind nicht verschieden (Fehllösung: a = b= 10).
- Es wird für  $(a + b)^2$  nicht der *größtmögliche* Wert gefunden (z.B. Fehllösung: a = 8; b = 9) (K2, K5).

# Aufgabe 6: Skianzug

# Aufgabentext

M1403501a

Ein Skianzug hat im November 225 € gekostet. Nach Weihnachten wurde der Preis um 20% gesenkt. Anfang März wurde der Preis noch einmal um 30% gesenkt.

Jetzt kauft Maike den Anzug und freut sich: "Ich habe 50% gespart." Beurteile diese Aussage.

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 1, 3, 5
Anforderungsbereich: II

# Kodieranweisung

# Aufgabe 6: Skianzug

# Item: M1403501 RICHTIG

Richtige Beurteilung der Aussage (Maikes Behauptung ist falsch!) und angemessene Begründung, in welcher auf die unterschiedlichen Grundwerte verwiesen wird.

Anmerkung 1: Falls nicht gerechnet wird, so muss explizit auf die Änderung des Grundwerts hingewiesen werden. Wenn dann doch ein Rechenergebnis angegeben wird, so darf dieses auch falsch sein.

Anmerkung 2: Akzeptiert werden auch Antworten, in denen die Behauptung als richtig beurteilt wird, sofern aus der Begründung ersichtlich ist, dass bei der zweiten Ermäßigung (um 30%) auch der ursprüngliche Preis zugrunde gelegt wurde. Auch in diesem Fall kann die Begründung auf rechnerischer und inhaltlicher Ebene erfolgen.

### Z.B.:

Maikes Behauptung ist falsch.

# **Rechnerische Begründung 1:**

Preis nach Weihnachten: 225 € · 0,8 = 180 € Preis Anfang März: 180 € · 0,7 = 126 €

126 € / 225 € = 0,56

Der Preis wurde nur um 44% gesenkt.

### ODER:

Maikes Behauptung ist falsch.

# **Rechnerische Begründung 2:**

 $1 \cdot 0.8 \cdot 0.7 = 0.56$ 

Der Preis wurde nur um 44% gesenkt.

### ODER:

Maikes Behauptung ist falsch.

### Inhaltliche Begründung:

Die beiden Prozentsätze beziehen sich auf unterschiedliche Grundwerte (Preise). Deshalb darf man die Prozentsätze nicht addieren.

### **FALSCH**

Alle falschen, fehlerhaften, unvollständigen Antworten

### Z.B.:

Maikes Behauptung ist falsch, weil sie nicht berücksichtigt hat, dass Prozentsätze nicht einfach addiert werden dürfen.

# Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da hier eine Aussage zu einer zweimaligen prozentualen Preissenkung beurteilt werden muss.

Hierzu ist der Realsituation unter Rückgriff auf sinntragende Vorstellungen zur Prozentrechnung ein passendes mathematisches Modell zuzuordnen (K3), mit dessen Hilfe anschließend – falls für nötig erachtet – der jeweils neue Preis nach der Ermäßigung sowie die anteilige Ersparnis berechnet werden können (K5). Auf diesem Hintergrund ist die Aussage dann begründet zu widerlegen oder – falls unter "Preis" beide Male der Ausgangspreis von 25 Euro verstanden wird – zu bestätigen. Dies kann nicht nur auf rechnerischer Ebene, sondern auch auf rein inhaltlicher Ebene durch Bezug auf die jeweils verwendeten Grundwerte beider Prozentsätze erfolgen (K1).

Aufgrund der mehrschrittigen Modellierung, deren Ergebnisse zu interpretieren und zur Beurteilung der gegebenen Aussage zu nutzen sind, sowie der hiermit verzahnten mehrschrittigen Argumentation wird die Aufgabe dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

# Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Die Aussage wird lediglich als falsch bzw. richtig eingestuft, diese Entscheidung wird jedoch nicht begründet (K1).
- Die Aussage wird als richtig beurteilt, ohne dass aus der Darlegung ersichtlich wird, dass als Grundwert für beide Ermäßigungen der ursprüngliche Preis angesehen wurde, d.h. die Prozentwerte werden offenbar gedankenlos addiert (K1, K3).

Aufgabe 7: Waschpulver Teilaufgabe 7.1: Waschpulver Aufgabentext



Im Rahmen einer Werbeaktion wird das Waschpulver WASCHI in einer 1,575 kg-Packung angeboten.

Diese Packung kostet genauso viel wie die Normalpackung zu 1,350 kg Waschpulver.

Überprüfe die Behauptung "+ 15%" durch eine Rechnung.

M1400401a

# Aufgabenkennwerte

# Merkmale:

Leitidee: 1. Zahl

Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6

Anforderungsbereich: I

# Kodieranweisung

# Aufgabe 7.1: Waschpulver

Item: M1400401

# **RICHTIG**

Eine richtige Rechnung mit zutreffender Beschreibung des Überprüfungsergebnisses.

<u>Anmerkung:</u> Auch mathematisch korrekt gerundete Werte (z.B. 1,553 kg oder 1,55 kg) werden akzeptiert. Die Einheit muss nicht angegeben werden! Der Rechenweg und dessen Notation ist beliebig, sofern mathematisch korrekt.

Z.B.:

$$\frac{1,575kg}{1,35kg} \approx 1,17$$

Die Aussage stimmt nicht, weil mehr als 15% vorhanden ist.

ODER:

$$1,35 \text{ kg} \cdot 1,15 = 1,5525 \text{ kg}$$

Es ist mehr Waschpulver in der Werbepackung als in der Werbung versprochen.

**ODER** 

$$1,35 \text{ kg} \cdot 1,15 = 1,5525 \text{ kg}$$

Die Aussage stimmt. Es ist sogar mehr Waschpulver drin als versprochen.

# **FALSCH**

alle anderen Antworten

Z.B.:

$$\frac{1,575kg}{1,35kg} \approx 1,17 \text{ (ohne Aussage)}$$

# Teilaufgabe 7.2: Waschpulver

# Aufgabentext

Für einen Korb Wäsche benötigt man ungefähr 75 g dieses Waschpulvers. Wie viele Körbe mit Wäsche kann man mit einer **Normalpackung** WASCHI waschen?

Gib das Ergebnis an.

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: I

# Kodieranweisung

Aufgabe 7.2: Waschpulver		
Item: M1400402		
RICHTIG	RICHTIG	
	18 (Wäschekörbe)	
FALSCH		
	alle anderen Antworten	

# Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da zur Lösung der Aufgabe elementare Rechenverfahren mit Zahlen bzw. Größen durchzuführen und die Prozentrechnung sachgerecht anzuwenden sind.

Bei Teilaufgabe 1 ist zur gegebenen Sachsituation unter Rückgriff auf Prozent-Vorstellungen ein passendes mathematisches Modell zu finden (K3), mit dessen Hilfe die Werbeaussage "+15% Gratis" rechnerisch überprüft werden kann (K5).

Bei der 2. Teilaufgabe erfolgt die Auswahl eines geeigneten mathematischen Modells (K3) auf der Grundlage von Vorstellungen zur Division (im Sinne des Aufteilens). Die auszuführende Grundrechenoperation ist sehr einfach (K5). Zur Bearbeitung beider Items müssen die benötigten Informationen dem Aufgabentext bzw. dem Bild entnommen werden (K6).

Aufgrund der direkten Anwendbarkeit bekannter Standardmodelle und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet gehören beide Teilaufgaben dem Anforderungsbereich I an.

M1400402a

# Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

### Zu [01]:

- Trotz richtig durchgeführter Rechnung wird die Werbeaussage nicht als richtig bzw. falsch ausgewiesen (K3).
- Als Grundwert wird der Inhalt einer Packung der Werbeaktion (1,575 kg) verwendet (K6).
- Die Differenz der beiden Waschmittelpackungen von 225 g wird direkt in eine Prozentzahl "umgewandelt" (Fehllösungen: 22,5 %, 2,25 % oder 0,225 %).

### Zu [02]:

- Es wird berechnet, wie viele Wäschekörbe mit dem Inhalt einer Waschpulverpackung aus der Werbeaktion gewaschen werden können (Fehllösung: 1575 g: 75 g = 21) (K6).
- Es kommt zu Fehlern bei der Umwandlung von Kilogramm in Gramm (Fehllösung: 135 g : 75 g  $\approx$  2) (K5).

# Aufgabe 8: Internetauktion

Teilaufgabe 8.1: Internetauktion

# Aufgabentext

Bei einer Internetauktion beobachtet Rolf die Preisentwicklung für Notebooks. Insgesamt werden neun Notebooks des gleichen Typs versteigert.

Rolf hat sich folgende Endpreise für die Notebooks aufgeschrieben:

Auktionsnummer	Endpreis
1	390€
2	422€
3	394€
4	355€
5	449€
6	396€
7	380€
8	423€
9	373€

M5401201a

Wie groß ist der Preisunterschied zwischen dem teuersten und dem billigsten Notebook?

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 5. Daten und Zufall	
Allgemeine Kompetenz: 4, 5	
Anforderungsbereich: I	

# Kodieranweisung

Aufgabe 8.1: Internetauktion		
Item: M5401201		
RICHTIG		
	94 € (Die Einheit muss angegeben werden! Die Angabe von	
	Nachkommastellen ist akzeptabel.)	
FALSCH		
	alle anderen Antworten	

# Teilaufgabe 8.2: Internetauktion

# Aufgabentext

Gib den durchschnittlichen Preis der neun Notebooks an.

M5401203a

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: II

# Kodieranweisung

Aufgabe 8.2: Internetauktion		
Item: M5401	203	
RICHTIG		
	398 € (Die Einheit muss angegeben sein! Die Angabe von Nachkommastellen ist akzeptabel.)	
FALSCH		
	alle anderen Antworten	

# Aufgabenbezogener Kommentar

Diese realitätsbezogene Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da die Schüler sich mit einer Statistik zur Preisentwicklung auseinandersetzen. Dabei sind mit der sachgerechten Anwendung der Prozentrechnung sowie der Durchführung elementarer Rechenoperationen ebenso auch inhaltsbezogene Kompetenzen der Leitidee Zahl (L1) von Bedeutung.

Zunächst sind die zur Bearbeitung der einzelnen Teilaufgaben benötigten Informationen, d.h. die Daten der statistischen Erhebung, der Tabelle zu entnehmen (K4).

Bei Teilaufgabe 1 ist lediglich der Preisunterschied zwischen dem teuersten und dem billigsten Notebook (Spannweite) zu berechnen (K5), bei Teilaufgabe 2 werden Vorstellungen zum Mittelwert (K3) sowie geeignete Verfahren zu dessen Berechnung benötigt. Die hierbei durchzuführenden Rechenoperationen sind mehrschrittig (K5).

Während Teilaufgabe 1 zum Anforderungsbereich I gehört, ist die Teilaufgabe 2 aufgrund des mehrschrittigen Lösungsweges dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

# Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

# Zu [01]:

• Die Preise werden nicht nach der Größe geordnet, so dass zur Berechnung der Spannweite die falschen Preise verwendet werden (K5).

# Zu [02]:

- Statt des arithmetischen Mittelwerts wird der Zentralwert angegeben (Fehllösung: 394 €) (K3).
- Das arithmetische Mittel der Preise des teuersten und des billigsten Notebooks wird berechnet (Fehllösung: 402 €) (K3).

# Aufgabe 9: Computernutzung

Teilaufgabe 9.1: Computernutzung

Aufgabentext

Eine Schülergruppe führt in der Schule eine Befragung zur Computernutzung durch.

Von den Befragten nutzen den Computer

53% für E-Mails,

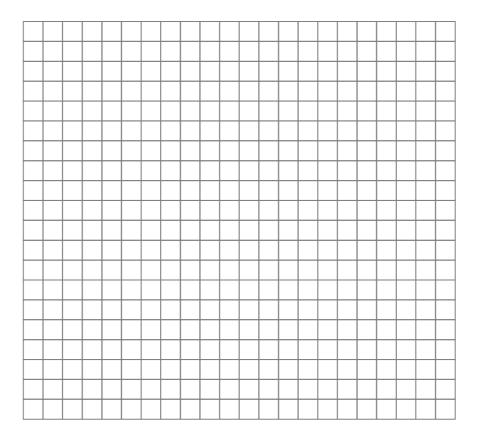
82% zum Chatten,

73% zum Spielen,

35% für Internetrecherchen,

10% benutzen den Computer gar nicht.

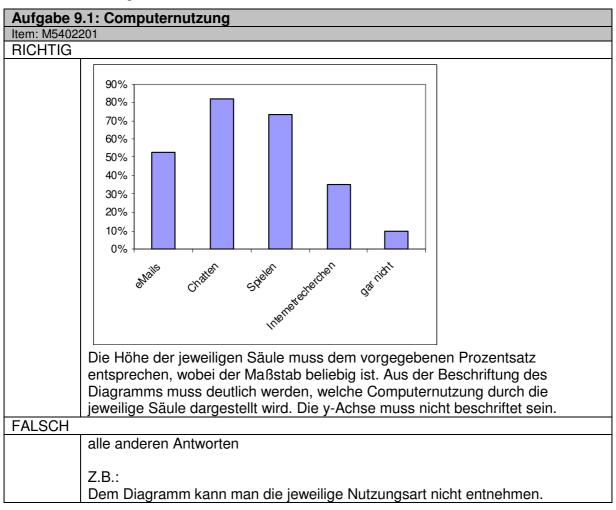
# Erstelle ein Säulendiagramm, in dem die Computernutzung dargestellt wird.



# Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 4
Anforderungsbereich: I

# Kodieranweisung

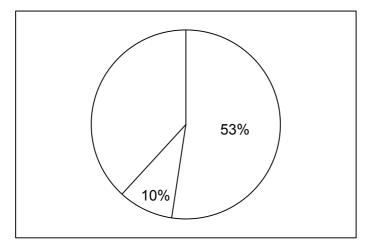


# Teilaufgabe 9.2: Computernutzung

# Aufgabentext

M5402202a

Steven will die Angaben aus der Befragung in einem Kreisdiagramm darstellen. Er hat schon angefangen zu zeichnen.



Erläutere warum es nicht sinnvoll ist, die Ergebnisse der Befragung in einem Kreisdiagramm darzustellen.

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 5. Daten und Zufall	
Allgemeine Kompetenz: 4, 6	
Anforderungsbereich: II	

#### Kodieranweisung

Aufgabe 9	Aufgabe 9.2: Computernutzung	
Item: M5402	Item: M5402202	
RICHTIG		
	Adäquate Erläuterung, in welcher darauf verwiesen wird, dass Doppelnennungen möglich sind oder die Summe größer als 100% ist, so dass die Angaben somit nicht als Kreisdiagramm dargestellt werden können.	
	Z.B.: Die Summe der Prozentzahlen ist größer als 100%. Deshalb können nicht alle Prozentzahlen als Kreisausschnitte dargestellt werden.	
	ODER: In der Befragung geben einige Schüler zwei Nutzungsarten an. Dass lässt sich nicht im Kreisdiagramm darstellen.	
FALSCH		
	alle anderen Antworten	
	Z.B.: Peter hat das Kreisdiagramm zu klein gezeichnet. Die einzelnen Anteile können nicht dargestellt werden.	
	ODER: Die Anteile passen nicht in einen Kreis.	

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese realitätsbezogene Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da es um die graphische Darstellung statistischer Daten geht. Bei Teilaufgabe 1 sind diese in Form eines Säulendiagramms darzustellen, wobei eine geeignete Skalierung zu wählen ist (K4).

Bei Teilaufgabe 2 werden die Schüler aufgefordert, die Eignung eines bereits begonnenen Kreisdiagramms (bei Vorwegnahme des Argumentationsziels) zur Darstellung der in Prozentzahlen angegebenen Umfrageergebnisse zu beurteilen (K4) und ihre Argumente verständlich darzulegen (K6). Die in diesem Zusammenhang durchzuführenden Rechenoperationen sind elementar, denn es ist lediglich festzustellen, dass die Summe der Prozentzahlen 100% übersteigt und es demzufolge bei der Befragung zu Mehrfachnennungen gekommen sein muss. Die Daten sind somit nicht sinnvoll in Form eines Kreisdiagramms darstellbar.

Da es bei Teilaufgabe 1 lediglich um die Erstellung eines Säulendiagramms – ein für Schüler vertrauter Darstellungstyp – geht, gehört diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich I an. Teilaufgabe 2 ist aufgrund der erforderlichen Stellungsnahme zur Eignung des Kreisdiagramms und den hiermit verbundenen kognitiven Anforderungen dem Anforderungsbereich II zuzuordnen.

#### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

#### Zu [01]:

- Die Höhen der einzelnen Säulen entsprechen nicht der Skalierung bzw. passen maßstäblich nicht zusammen (K4).
- Die Beschriftung der Säulen ist unvollständig oder fehlt (K4).

#### Zu [02]:

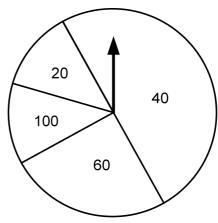
• In der Erläuterung wird weder auf die Möglichkeit der Mehrfachnennungen noch auf die Summe der in Form von Prozentzahlen angegebenen Umfrageergebnisse eingegangen (K4, K6).

# Aufgabe 10: Glücksrad

Teilaufgabe 10.1: Glücksrad

## Aufgabentext

Bei diesem Glücksrad bekommt der Spieler so viele Cent, wie das Feld anzeigt, auf dem der Pfeil nach dem Drehen stehen bleibt.



Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt der Spieler 60 Cent?

M5401001a

### Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 5. Daten und Zufall	
Allgemeine Kompetenz: 3, 4	
Anforderungsbereich: I	

### Kodieranweisung

Aufgabe 1	10.1: Glücksrad
Item: M5401	001
RICHTIG	
	1/4 (auch 0,25, 25/100 oder 25% etc. wird akzeptiert)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

# Teilaufgabe 10.2: Glücksrad

### Aufgabentext

Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt er weniger als 60 Cent?

M5401002a

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 4
Anforderungsbereich: I

# Kodieranweisung

Aufgabe 10.2: Glücksrad		
Item: M5401	Item: M5401002	
RICHTIG		
	5/8 (auch 0,625 oder 62,5% oder ungefähr 63% wird akzeptiert)	
FALSCH		
	alle anderen Antworten	

# Teilaufgabe 10.3: Glücksrad

# Aufgabentext

Für ein Spiel muss der Spieler 55 Cent Gebühr entrichten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt er mehr, als er bezahlen muss?

M5401003a

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 5. Daten und Zufall	
Allgemeine Kompetenz: 3, 4	
Anforderungsbereich: I	

# Kodieranweisung

Aufgabe 10.3: Glücksrad	
Item: M5401003	
RICHTIG	
	3/8 (auch 0,375 oder 37,5% oder ungefähr 38% wird akzeptiert)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

### Teilaufgabe 10.4: Glücksrad

### Aufgabentext

Die Klasse 8f hat dieses Spiel auf dem Sportfest in der Schule angeboten. Pro Spiel hat sie eine Gebühr von 60 Cent verlangt. Der Klassensprecher ist unzufrieden mit dem Gewinn. Im nächsten Jahr möchte er einen höheren Gewinn erzielen und deshalb das Spiel verändern, ohne jedoch zu mogeln.

Beschreibe eine Möglichkeit das Spiel zu verändern.

M5401005a

#### Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 2, 3, 4, 5, 6
Anforderungsbereich: II

# Kodieranweisung

Aufgabe 1	10.4: Glücksrad
Item: M5401	005
RICHTIG	
	Eine sachlich passende Möglichkeit wird angegeben,
	Z.B.:
	Er kann die Spielgebühr heraufsetzen.
	ODER: Er kann die Felder der kleineren Gewinne vergrößern und/oder die der größeren Gewinne verkleinern.
	ODER: Er kann eine oder mehrere Gewinnzahlen herabsetzen.
FALSCH	
	alle anderen Antworten

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese realitätsbezogene Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da es hier um das Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei einem einfachen Zufallsexperiment (Drehen eines Glücksrads) geht. Dabei ist bei den ersten drei Teilaufgaben der Umgang mit vertrauten und direkt erkennbaren Modellen (K3) ebenso erforderlich wie die gezielte

Informationsentnahme aus der gegebenen Darstellung, dem Glücksrad (K4), wobei die gesuchte Wahrscheinlichkeit jeweils als Bruch oder in Prozent angegeben werden muss. Aufgrund der vertrauten Modelle und Darstellungen sind alle drei Teilaufgaben dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

Bei Teilaufgabe 4 muss das gegebene Spiel zielgerichtet verändert werden. Dazu muss überlegt und berechnet werden, welche Auswirkungen bestimmte Veränderungen des Glücksrads oder der Gewinnvorschriften auf den Gewinn haben (K3, K5). Da es vielfältige Veränderungsmöglichkeiten gibt, muss der Schüler geeignete erkennen und unter Umständen unter mehreren Möglichkeiten auswählen (K2) und diese anschließend beschreiben (K6). Aufgrund des zielgerichteten Veränderns eines gegebenen einfachen Modells ist es naheliegend, diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich II zuzuordnen.

#### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

#### Zu [01]:

- Der Winkel von 90° wird fälschlich als die entsprechende Wahrscheinlichkeit angesehen (Fehllösung: 90%).
- Die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis wird angegeben (Fehllösung: 75%) (K3).

#### Zu [02]:

Das mit 60 Cent beschriftete Feld wird hinzugenommen (Fehllösung: 87,5%).

#### Zu [02, 03]:

- Es wird übersehen, dass es jeweils zwei Felder gibt, bei denen ein Spieler weniger als 60 Cent bzw. mehr als 55 Cent erhält (Fehllösungen [02]: 50% oder 12,5% [03]: 25% oder 12,5%) (K4).
- Die Größe der Felder bleibt unberücksichtigt (Fehllösung: 50%) (K3).
- Die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis wird angegeben (Fehllösungen [02]: 37,5% [03]: 62,5%) (K3).

#### Zu [04]:

• Es wird eine Veränderung des Spiels angegeben, die einen niedrigeren oder denselben Gewinn zur Folge hat (K3).

# Aufgabe 11: Steckwürfelfiguren

Teilaufgabe 11.1: Steckwürfel

Aufgabentext

Diese Figuren wurden jeweils aus vier kleinen Würfeln zusammengesteckt.



Sie werden gut gemischt in ein Säckchen gefüllt. Es wird anschließend ohne Hinzuschauen eine Figur aus dem Säckchen gezogen.

Gib an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die gezogene Figur einfarbig ist.

M5400401a

### Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 6
Anforderungsbereich: I

### Kodieranweisung

Aufgabe 11.1: Steckwürfelfiguren		
Item: M5400-	Item: M5400401	
RICHTIG		
	$\frac{3}{10}$ (auch 0,3 oder 30% wird akzeptiert)	
FALSCH		
	alle anderen Antworten.	

# Teilaufgabe 11.2: Steckwürfel

### Aufgabentext

Gib an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die gezogene Figur genau einen hellen Würfel enthält.

M5400402a

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 6
Anforderungsbereich: I

### Kodieranweisung

Aufgabe 1	11.2: Steckwürfelfiguren
Item: M5400-	402
RICHTIG	
	$\frac{2}{10}$ (auch 0,2 oder 20% wird akzeptiert)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese realitätsbezogene Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da hier Wahrscheinlichkeiten bei einem einfachen Zufallsexperiment bestimmt werden müssen. Dabei ist bei beiden Teilaufgaben der Umgang mit vertrauten und direkt erkennbaren Modellen (K3) ebenso erforderlich wie die gezielte Informationsentnahme aus dem gegebenen Foto (K6). Bei Teilaufgabe 2 muss zudem die Bedeutung des Worts "genau" verstanden werden (K6). Da es sich bei beiden Teilaufgaben um den Umgang mit direkt erkennbaren Standardmodellen handelt, sind beide Teilaufgaben dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

#### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

#### Zu [01, 02]:

• Falsches Abzählen kann zu Fehllösungen führen (K6).

#### Zu [01]:

- Der Begriff "einfarbig" wird auf nur eine Farbe (schwarz oder weiß) reduziert (K6).
- Anstelle der Wahrscheinlichkeit wird fälschlicherweise das Verhältnis von "günstigen" zu "ungünstigen" Ergebnissen aufgestellt (Fehllösung 3/7) (K3).

#### Zu [02]:

• Anstelle der Wahrscheinlichkeit wird fälschlicherweise das Verhältnis von "günstigen" zu "ungünstigen" Ergebnissen aufgestellt (Fehllösung 2/8) (K3).

# Aufgabe 12: Schokoladenriegel

### Aufgabentext

Anne und Martin würfeln abwechselnd.

M5402301a

Anne erhält von Martin einen Schokoladenriegel, wenn eine der Zahlen 1, 2, 3 oder 4 fällt. Fällt hingegen eine 5 oder eine 6, so muss Anne Martin einen Schokoladenriegel geben.

Ermittle die Wahrscheinlichkeit, mit der Martin einen Schokoladenriegel erhält.

## Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 6
Anforderungsbereich: I

# Kodieranweisung

Aufgabe 1	2: Schokoladenriegel
Item: M54020	301
RICHTIG	
	$\frac{1}{3}$ (auch akzeptiert wird: $\frac{2}{6}$ ; 0, $\frac{1}{3}$ ; 0,34; 33% oder 30%)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

#### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese realitätsbezogene Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da hier eine Wahrscheinlichkeit bei einem einfachen Laplace-Experiment zu bestimmen ist. Dabei ist der Umgang mit einem vertrauten und direkt erkennbaren Modell (K3) ebenso erforderlich wie die gezielte Informationsentnahme aus dem kurzen, einfach zu verstehenden Text (K6). Da zur Bearbeitung dieser Aufgabe lediglich reproduzierende Tätigkeiten erforderlich sind, ist diese Aufgabe dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

#### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass Martin einen Schokoladenriegel erhält, wird mit der Wahrscheinlichkeit, dass Anna einen Schokoladenriegel erhält, verwechselt (Fehllösung 2/3) (K6).
- Es wird das entsprechende Verhältnis anstatt der korrekten Wahrscheinlichkeit angegeben (Fehllösung 2/4 bzw. 1/2) (K3).

# Aufgabe 13: Gleichung lösen

# Aufgabentext

Löse die Gleichung x + 8 = 24.

M4402301a

## Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 5
Anforderungsbereich: I

# Kodieranweisung

Aufgabe 13: Gleichung lösen		
Item: M4402	Item: M4402301	
RICHTIG		
	16	
FALSCH		
	alle anderen Antworten	

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese innermathematische Aufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da eine einfache Gleichung zu lösen ist.

Die Bearbeitung dieser einfachen Aufgabe kann rein kalkülmäßig erfolgen (K5), aber auch durch systematisches Probieren.

Die direkte Anwendbarkeit eines Verfahrens führt zu einer Einordnung dieser Aufgabe in den Anforderungsbereich I.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Beim Umstellen der Gleichung unterläuft ein Vorzeichenfehler (Fehllösung 32) (K5).
- Statt 8 zu subtrahieren wird durch 8 dividiert (Fehllösung 3) (K5).

# Aufgabe 14: Kleinanzeigen

### Teilaufgabe 14.1: Kleinanzeigen

### Aufgabentext

In einer Stadtillustrierten werden die Preise für Kleinanzeigen bei Privatkunden folgendermaßen berechnet:

1-5 Zeilen 10,00 € Jede weitere Zeile 1,80 €

Hier sind zwei Anzeigen:

Wer hat Lust auf Jazz-Dance in Essen? Bin 26 (w) und suche noch jmd., der mitmacht. Würde mich freuen, wenn's klappt... HbH 丞 ☎

Anzeige 1

Wie teuer war die erste Anzeige?

nce he ŭrn's Softball-Damenteam der Duisburg Dockers sucht Verstärkung! Wir suchen Mädels zwischen 16 und 40, die Lust haben, in einem netten Team etwas Neues auszuprobieren. Softball ist ähnlich dem amerik. Baseball und wird insbes. von Frauen gespielt. Schnuppertraining auf Anfrage. TRAUT EUCH – wir freuen uns!!! Kontakt: @aol.com

Anzeige 2

M4400301a

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3
Anforderungsbereich: I

#### Kodieranweisung

Aufgabe 1	Aufgabe 14.1: Kleinanzeigen		
Item: M4400	Item: M4400301		
RICHTIG			
	10 ( Euro )		
FALSCH			
	alle anderen Antworten		

Teilaufgabe 1 Aufgabentext	4.2: Kleinanze	igen			
Wie teuer war o Kreuze an.	die zweite Anzeig	ge?			M4400302
10,00€	19,00€	23,40€	24,40€	26,00€	
Aufgabenkenn	werte				
Merkmale:					
	ktionaler Zusamn	nenhang			
Allgemeine Kom		<b>y</b>			
Anforderungsbe					
Kodieranweisu	ng				
Aufgabe 14.2: I	Kleinanzeigen				
Item: M4400302					
RICHTIG	IZ"				
	Kästchen wurde	angekreuzt			
FALSCH alle	e anderen Antwo	rten			
and	anderen Antwo	11011			

Teilaufgabe 14.3: Kleinanzeigen

Aufgabentext

Eine dritte Anzeige hat 38,80 € gekostet. Wie viele Zeilen hatte sie?

M4400303a

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 2, 3, 5
Anforderungsbereich: I

### Kodieranweisung

Aufgabe 14.3: Kleinanzeigen		
Item: M4400	Item: M4400303	
RICHTIG		
	21 (Zeilen)	
FALSCH		
	alle anderen Antworten	

### Teilaufgabe 14.4: Kleinanzeigen

### Aufgabentext

Wenn eine Anzeige ganz in fett und gelb unterlegt gedruckt werden soll, kostet das 15,00 € mehr. Um wie viel Prozent verteuert sich dadurch die dritte Anzeige?

M4400304a

Kreuze an.

um ca. 15%	um ca. 28%	um ca. 39%	um ca. 61%	um ca.72 %

#### Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: II

#### Kodieranweisung

Aufgabe 14.4: Kleinanzeigen			
Item: M4400304			
RICHTIG			
	3. Kästchen wurde angekreuzt		
FALSCH			
	alle anderen Antworten		

#### Aufgabenbezogener Kommentar

Alle Teilaufgaben dieser Aufgabe werden der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) zugeordnet, da implizit und explizit Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge genutzt werden sowie funktionale Zusammenhänge zu erkennen sind. Teilaufgabe 4 enthält zusätzlich Aspekte der Leitidee Zahl (L1), da Prozentrechnung anzuwenden ist.

Bei Teilaufgabe 1 ist die beschriebene Realsituation (Festlegung von Preisen für Kleinanzeigen) in ein einfaches mathematisches Modell zu übersetzen (K3), wobei nichts zu

berechnen ist. Die Bearbeitung von Teilaufgabe 2 erfolgt in ähnlicher Weise. Im Rahmen des Modellierens (K3) ist nun der Preis für 13 Zeilen zu bestimmen, wobei hier nun auch einfache rechnerische Tätigkeiten (K5) vonnöten sind.

Bei der Lösung von Teilaufgabe 3 wird erneut ein einfaches mathematisches Modell (K3) aufgestellt, innerhalb dessen Berechnungen (K5) erforderlich sind. Zusätzlich muss hier die Problemlösestrategie des Rückwärtsarbeitens angewendet werden (K2) und, ausgehend vom gegebenen Preis einer dritten Anzeige, die Anzahl ihrer Zeilen bestimmt werden.

Diese ersten drei Teilaufgaben sind dem Anforderungsbereich I zuzuordnen, da ihre Bearbeitung die direkte Anwendung grundlegender Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet erfordert.

In Teilaufgabe 4 ist eine sehr einfache Modellierung der Realsituation erforderlich (K3), und die Schüler müssen den Grund- und den Prozentwert erkennen, um davon ausgehend die prozentuale Veränderung des Preises der dritten Anzeige zu errechnen (K5).

Es ist naheliegend, die vierte Teilaufgabe dem Anforderungsbereich II zuzuweisen, da bei ihrer Bearbeitung auf verschiedenen Gebieten der Mathematik erworbene Fertigkeiten und Fähigkeiten miteinander zu verknüpfen sind.

#### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

#### Zu [01]:

• Es wird überlesen, dass der Preis für 1 bis 5 Zeilen bereits angegeben ist, stattdessen wird irrtümlich mit den Kosten für "jede weitere Zeile" gearbeitet und 5•1,80€ gerechnet (Fehllösung 9,00€) (K3).

#### Zu [01, 02]:

 (Fehllösung 1,80€): Diese Fehllösung zeigt Defizite in der Kompetenz des Kommunizierens, da der Preis für die "kleine" Anzeige mit dem angegebenen "kleinen" Preis gleichgesetzt wird. Bei Schülern, die diesen Fehler machen, ist naheliegend, dass sie zudem beim in Teilaufgabe 2 gesuchten Preis der zweiten ("großen") Anzeige den "großen" Preis ankreuzen (u.a. K3).

#### Zu [02]

- (Fehllösung 10,00€): Beim Ankreuzen dieser Fehllösung wird entweder im Aufgabentext überlesen, dass es um die "zweite" Anzeige geht, oder es wird lediglich der Preis für 1-5 Zeilen übernommen (u.a. K3).
- (Fehllösung 19,00€): Dieses Ergebnis ergibt sich, wenn zweifach mit der ersten Anzeige gearbeitet wird. Der gesuchte Preis ergibt sich dann als Summe aus dem Preis der ersten Anzeige (10,00€) und dem zweiten Abdruck der ersten Anzeige, was als fünfmal "jede weitere Zeile" gedeutet wird. Die zugehörige Rechnung lautet: 10,00€ + 5•1,80€ = 19,00€. Rechnerisch würde sich ebenfalls 19,00€ ergeben, wenn der Preis für 15 Zeilen bestimmt würde (Zählfehler) (u.a. K3).
- (Fehllösung 23,40€): Eine fehlerhafte Deutung des beschriebenen Preismodells als lineares Modell führt zum Ankreuzen dieser Fehllösung. Dabei wird missachtet, dass der Preis der ersten fünf Zeilen sich von jenem der weiteren Zeilen unterscheidet. Folglich wird der Preis für 13 einzelne Zeilen durch 13•1,80€ = 23,40€ ermittelt (K3).
- (Fehllösung 26,00€): Hierbei wird die gegebene 13zeilige Anzeige in zweimal fünf Zeilen sowie den Rest unterteilt. Der Preis für die restlichen drei Zeilen ergibt sich als

Anteil des Preises für fünf Zeilen, und es wird gerechnet:  $10,00€ + 10,00€ + \frac{3}{5}$ von 10,00€ = 26,00€ (K3).

#### Zu [03]

• (Fehllösung 16 Zeilen): Hierbei wird zwar korrekt zunächst der Preis für 1-5 Zeilen vom gegebenen Preis subtrahiert und dann die Anzahl der Zeilen für die restlichen

28,80€ ermittelt, anschließend wird jedoch vergessen, beide Anzahlen der Zeilen zu addieren. Diesen häufig beobachtbaren Fehler zeigt die folgende Schülerlösung (K3).

Eine dritte Anzeige hat 38,80 € gekostet. Wie viele Zeilen hatte sie?

M4400303a

• (Fehllösung 21,5 Zeilen): Hier liegt die Fehlvorstellung vor, dass Anzeigenpreise auch pro halbe Zeile erhoben werden. Auch dieser Fehllösung liegt eine unkritische Annahme eines linearen Preismodells zugrunde (vgl. Fehllösungen der Teilaufgabe 2), und der gegebene Preis von 38,80€ wird durch 1,80€ als konstanter Preis pro Zeile dividiert (K3).

### Zu [04]:

- (Fehllösung: um ca. 15%): Beim Ankreuzen dieser Fehllösung liegt ein sog. Signalfehler vor. Ungenaues Lesen führt dazu, dass 15€ mit 15% verwechselt oder gar gleichgesetzt wird (u.a. K6, K3).
- (Fehllösung: um ca. 28%): In diesem Falle werden Grund- und Prozentwert nicht richtig zugeordnet, und der Anteil der Preiserhöhung für die fett und gelb unterlegt gedruckte Anzeige an dem erhöhten Preis für diese Anzeige wird errechnet: 15€: 53,80€ ≈ 0,278 ≈ 28% (K3).
- (Fehllösung: um ca. 61%): Hier liegt vermutlich ein Lesefehler vor. Es wird mit einem verminderten statt mit einem erhöhten Preis gearbeitet, und der Anteil des verminderten Preises (hier: 38,80€ 15€ = 23,80€) an dem Normalpreis der dritten Anzeige wird errechnet: 23,80€: 38,80€ ≈ 0,613 ≈ 61% (u.a. K6, K3).
- (Fehllösung: um ca. 72%): Das Ankreuzen dieser Fehllösung zeigt, dass Grund- und Prozentwert nicht richtig erkannt werden. Rechnerisch wird der Anteil des regulären Preises der dritten Anzeige am erhöhten Preis der Anzeige ermittelt, und so wird 38,80€: 53,80€ ≈ 0,721 ≈ 72% gerechnet (K3).

# Aufgabe 15: Fähre

# Aufgabentext

M4400201a

Frau Weitzel fährt einen PKW mit 5 Sitzen. Sie muss in der nächsten Woche viermal auf die andere Rheinseite (und zurück) und benutzt die Autofähre. Welche Karte sollte sie kaufen, um möglichst wenig zu bezahlen?

Begründe deine Antwort mit einer Rechnung.

Preistafel					
	Einfach	10er-Karte	Wochenkarte		
Fußgänger	1,40	8,-	7,-		
Fahrrad, Moped	1,80	14,-	12		
Motorrad	2,00	16,-	13,-		
PKW bis 5 Sitze	3,00	24,-	17,-		
PKW ab 6 Sitze (Kombi, Kleintransporter)	3,50	27,-	19,-		

"Einfach" bedeutet eine Einzelfahrt (ohne Rückfahrt)

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang	
Allgemeine Kompetenz: 3, 4, 5, 6	
Anforderungsbereich: II	

### Kodieranweisung

Aufgabe 15: Fäh	re
-----------------	----

Item: M4400201

#### **RICHTIG**

Richtige Antwort (Wochenkarte) und rechnerischer Begründung, wobei die entsprechenden Preise (bezogen auf 8 Fahrten) für die Wochenkarte und die Einzelkarten berechnet werden müssen (entweder die Kosten für 8 Fahrten oder die Kosten pro Fahrt).

Z.B.:

Einzelfahrt:  $8 \cdot 3,00 \in 24,00 \in 100$  10er-Karte:  $8 \cdot 2,40 \in 19,20 \in 17,00 \in 100$  17,00 €

Frau Weitzel sollte für die nächste Woche eine Wochenkarte kaufen.

ODER:

Einzelfahrt: 3,00 € pro Fahrt

10er-Karte: 2,40 €

Wochenkarte: 17,00 €/8 ≈ 2,13 €

Frau Weitzel sollte für die nächste Woche eine Wochenkarte kaufen.

ODER:

Einzelfahrt:  $8 \cdot 3,00 \in 24,00 \in 37,00 \in 37,0$ 

Sie sollte die Wochenkarte nehmen.

**FALSCH** 

alle anderen Antworten

#### Aufgabenbezogener Kommentar

Bei dieser Aufgabe wird eine realitätsnahe Fragestellung bearbeitet, indem eine funktionale Beziehung mithilfe geeignet aufzustellender Terme untersucht wird. Die Aufgabe gehört daher zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4).

Zunächst sind jene Informationen aus dem Text (K6) und aus der Tabelle (K4) zu entnehmen, die benötigt werden, um ein passendes mathematisches Modell aufzustellen (K3). Mittels einfacher Rechnungen wird der Preis für die günstigste Karte ermittelt (K5).

Speziell die Anforderungen an die Informationsentnahme und die dabei notwendige Verknüpfung der in sprachlicher sowie in tabellarischer Form gegebenen Informationen führen zu einer Einordnung dieser Aufgabe in den Anforderungsbereich II.

#### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Es wird missachtet, dass die jeweiligen Rückfahrten ebenfalls zu bezahlen sind, oder die vier Fahrten werden als zwei Hin- und zwei Rückfahrten gedeutet (Fehllösung 12 €) (u.a. K4, K6).
- Es wird richtig erkannt, dass der Kauf einer Wochenkarte am günstigsten ist, aber die gegebene (rechnerische) Begründung ist unvollständig oder fehlerhaft (u.a. K5).
- Lediglich die Kosten für acht Einzelfahrten werden ermittelt, und eine Betrachtung, ob es ein günstigeres Angebot für diese acht Fahrten gibt, unterbleibt (Fehllösung 24 €) (u.a. K3).

Wo beli K4)	liglich der Preis chenkarte verglich ebig oft gefahren	en. Zudem w werden kanı	vird dabei mis n, wie die fo	ssachtet, das Igende Schi	ss mit einer ülerlösung ze	Wochenkarte eigt (u.a. K3,	;
Einfo	of: 3,00.8= 24E Hode: 24:10= 2,406 Nave: 17:2=2,40E	Sie	soll d	le 10er	Karte 1	nekmen	
10er	Lade: 24:10= 2.40€	dar	nit kommt	sie am b	pilligsten	ueg. and	
Woole	harte: 12 = 2,40€	sie	Lan	noch ei	n andersmo	e Rion	
		unc	zaráck	Cohren			
I				J			
Ein	wird erfasst, dass zelkarten ist, aber egt (Fehllösung 19	statt eines f					
Aufgabe	e 16: Vaters A	lter					
Teilaufga	be 16.1: Vaters	Alter					
Aufgaben	text						
Vor zwei . alt.	Jahren war der Vat	er dreimal sc	alt wie Lars.	Jetzt ist Lar	s 16 Jahre		
Wie alt ist	der Vater jetzt?						M4401401a
Kreuze ar	1.						
40 Ja	hre 42 Jahre	44 Jahre	46 Jahre	48 Jahre	50 Jahre		
Aufgaben	kennwerte						
Merkmale:							
Leitidee: 4.	Funktionaler Zusa						
	Kompetenz: 2, 3,	5					
Antorderur	igsbereich: II						
Kodieranv	veisung						
	6.1: Vaters Alter						
Item: M44014 RICHTIG	HU I						
	3. Kästchen wurd	e angekreuzt					
FALSCH							
	alle anderen Antw	<i>ı</i> orten					

### Teilaufgabe 16.2: Vaters Alter

#### Aufgabentext

Welche der folgenden Gleichungen passt zu der Beschreibung? (In den Gleichungen ist v das jetzige Alter des Vaters.)

Kreuze an.

3 · 16 = v - 2	3 · v = 16 - 3
3 · 16 = v - 2	

### Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang	
Allgemeine Kompetenz: 3, 5	
Anforderungsbereich: II	

#### Kodieranweisung

Aufgabe 16.2: Vaters Alter			
Item: M4401402			
RICHTIG			
	3. Kästchen wurde angekreuzt (links unten)		
FALSCH			
	alle anderen Antworten		

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da ein linearer Zusammenhang zu erfassen und zu formalisieren ist.

In Teilaufgabe 1 müssen die im Text gegebenen Informationen in ein passendes mathematisches Modell übersetzt werden (K3). Dabei wird das Alter des Vaters mit dem Alter seines Sohnes in Beziehung gesetzt, und durch ein geeignetes Verfahren (K2), d.h. durch systematisches Probieren mithilfe einer Tabelle oder durch Aufstellen einer Gleichung wird das gesuchte Alter des Vaters bestimmt (K5).

Wegen der Anforderungen an das Problemlösen sowie der Mehrschrittigkeit der Betrachtungen ist diese Teilaufgabe in den Anforderungsbereich II einzuordnen.

Bei Teilaufgabe 2 sind mehrere in symbolischer Form gegebene mathematische Modelle (K3) mit dem in natürlicher Sprache beschriebenen Zusammenhang zwischen dem Alter des Vaters und dem seines Sohnes (K6) zu vergleichen, und entsprechende Formalisierungen sind vorzunehmen (K5).

Die Mehrschrittigkeit und die Formalisierungsanforderungen rechtfertigen eine Einordnung dieser Teilaufgabe in den Anforderungsbereich II.

M4401402a

#### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

# Zu [01]:

- (Fehllösung 42): Es wird richtig berechnet, wie alt der Vater vor zwei Jahren war, aber es wird vergessen, 2 zu addieren (K3).
- (Fehllösung 46): Das Produkt aus 16 und 3 wird gebildet, und die 2 wird anschließend subtrahiert (zugehörige Rechnung: Alter = 16•3-2) (K3).
- (Fehllösung 48): Lediglich das Produkt aus 16 und 3 wird gebildet, oder es wird zweimal 2 subtrahiert, sodass dies sich wieder aufhebt (zugehörige Rechnung: Alter-2 = 16•3-2) (K3).
- (Fehllösung 50): Es wird missachtet, dass der Sohn vor zwei Jahren 14 und nicht 16 war (zugehörige Rechnung: Alter = 16•3+2) (u.a. K3).

#### Zu [02]:

- (Fehllösung 3•16 = v-2): Die Angaben im Text werden falsch formalisiert (entsprechend der Fehllösung 50 aus 01) (K3).
- (Fehllösung 3•v = 16-2): Die Verdreifachung geschieht an der falschen Stelle (K3).
- (Fehllösung 3•16-2 = v-2): Hierbei werden die Vorrangregeln missachtet (Klammer fehlt), so wird faktisch von dem verdreifachten Alter des Sohnes 2 subtrahiert (entsprechend der Fehllösung 48 aus 01) (u.a. K5, K3).

# Aufgabe 17: Dreisatz

## Aufgabentext

x und y sind direkt proportional zueinander. Ergänze alle vier freien Felder der Tabelle passend.

M2400201a

X	у
2	
6	30
	60

### Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang	
Allgemeine Kompetenz: 2, 4, 5	,
Anforderungsbereich: II	

### Kodieranweisung

Aufgabe 17: Dreisatz					
Item: M2400	201				
RICHTIG					
		Χ	у		
		2	10		
		6	30		
		12	60		
	Z.B.	24	120		
	Die vierte Zeile kann unter Berücksichtigung der Vorgabe (proportionale Zuordnung, d.h.: y/x=5) beliebig ausgefüllt werden				
FALSCH					
	alle ande	eren Antw	orten		

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da eine Tabelle zu einer proportionalen Zuordnung geeignet zu vervollständigen ist.

Zunächst sind, ausgehend von dem gegebenen Wertepaar, der Proportionalitätsfaktor zu ermitteln (K5) und in der Tabelle die jeweils fehlenden Ausgangswerte bzw. deren zugeordnete Werte zu ergänzen (K4), wobei das vierte Wertepaar frei wählbar ist. Bei diesen Rechnungen können verschiedene Problemlösestrategien angewendet werden, und es kann vorwärts oder rückwärts gearbeitet werden (K2).

Das Herstellen von Zusammenhängen und der verständige Umgang mit der vorliegenden Wertetabelle begründen eine Einordnung dieser Aufgabe in den Anforderungsbereich II.

#### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

• Der Begriff "proportional" und der entsprechende Zusammenhang zwischen den Ausgangsgrößen und den jeweils zugeordneten Größen werden missverstanden oder missachtet. Die Tabelle wird z.B. derart vervollständigt, dass in beiden Spalten separate additive bzw. multiplikative Zahlenfolgen entstehen. Dies zeigen die beiden dargestellten Schülerlösungen exemplarisch. Während in der ersten Schülerlösung die x-Werte jeweils um 4 und die y-Werte um 30 vergrößert werden (linearer, aber nicht proportionaler Zusammenhang), wird in der zweiten Schülerlösung der x-Wert jeweils verdreifacht und der y-Wert verdoppelt (multiplikativer Zusammenhang).

Х	У
2 .	0
6	30
10	60
19	30

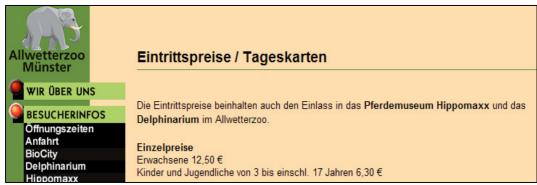
X	V
2	80.7
6	30
10	60
cu	120
3 7	1

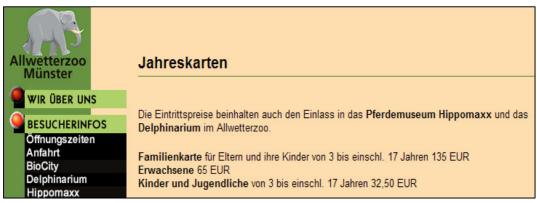
 Die beiden fehlenden Werte in der ersten und dritten Zeile werden korrekt ergänzt, es wird jedoch kein passendes neues Zahlenpaar gewählt. Aufgabe 18: Zoobesuch

Teilaufgabe 18.1: Zoobesuch

Aufgabentext

Du siehst hier zwei Bildschirmfotos aus dem Internetauftritt des Zoos in Münster.





Frau Jahn hat zwei Kinder, Pia (11 Jahre) und Max (14 Jahre), die Tiere sehr interessant finden. Frau Jahn plant, sechsmal im Jahr mit den Kindern in den Zoo zu gehen. Was sollte sie am besten kaufen, um möglichst wenig Geld auszugeben?

Kreuze an.

Jedes Mal Tagestickets für sich und die Kinde
Eine Familien-Jahreskarte
Für jeden eine Jahreskarte

Begründe deine Entscheidung.

M4401701a

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 1, 2, 3, 5, 6
Anforderungsbereich: II

# Kodieranweisung

Aufgabe 18.1: Zoobesuch		
Item: M44017	Item: M4401701	
RICHTIG		
	3. Kästchen angekreuzt. (für jeden eine Jahreskarte.)	
	UND: angemessene Begründung, in welcher auf die Ersparnis verwiesen wird	
	Z.B.: Kosten Einzelkarten = 12·6,30 € +6·12,50 € =150,60 € Kosten Familienkarte = 135 € Kosten Jahreskarten = 2·32,50 € +65 € =130 €	
	ODER: Kosten Einzelkarten größer als 12 · 6 € + 6·12 € = 144 € Kosten Jahreskarten = 2 · 32,50 € + 65 € = 130 €	
FALSCH		
	alle anderen Antworten	

# Teilaufgabe 18.2: Zoobesuch

# Aufgabentext

Herr und Frau Schöffler haben drei Kinder (fünf, sieben und zehn Jahre). Sie wollen eine Familien-Jahreskarte kaufen.

Ermittle, wie oft sie zusammen in den Zoo gehen müssen, damit sich der Kauf im Vergleich zu den Tageskarten auch lohnt.

Notiere deine Rechnung.

M4401702a

Merkmale:	
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang	
Allgemeine Kompetenz: 1, 2, 5, 6	
Anforderungsbereich: II	

### Kodieranweisung

Aufgabe 18.2: Zoobesuch	
Item: M4401702	
RICHTIG	
	Richtige Antwort (ab dem vierten Zoobesuch) und angemessene Notation des Rechenweges.
	Z.B.: Eintritt mit Tagestickets: 2 ·12,5 € + 3 · 6,3 € = 43,90 € 3 · 43,90 € = 131,70 €
	Familienkarte: 135 €
	Die Familienjahreskarte ist ab dem vierten Zoobesuch günstiger.
	ODER: Kosten für "Einmaliger Eintritt der ganzen Familie mit Tageskarten" = 2 ·12,5 € + 3 · 6,3 € = 43,90 € Familienkarte = 135 € 135€ / 43,90 € = 3,07
	Die Familienjahreskarte ist ab dem vierten Zoobesuch günstiger.
FALSCH	
	alle fehlerhaften, falschen oder unvollständigen Antworten
	Z.B.:
	ca. 4 mal

#### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) an, da es in beiden Teilaufgaben darum geht, zu erkennen, dass die Entscheidung für eine Eintrittskarte in den Zoo von der Anzahl an geplanten Besuchen sowie der Anzahl an Personen und deren Alter abhängig ist.

Die zur Bearbeitung von Teilaufgabe 1 benötigten Informationen sind dem Aufgabentext sowie den beiden Fotos zu entnehmen, wobei zwischen unwichtigen und wichtigen Informationen zu unterscheiden ist (K6). Anschließend ist unter Rückgriff auf geeignete Vorstellungen zu proportionalen Zuordnungen ein passendes Modell auszuwählen (K3), um die anfallenden Kosten beim Kauf von Einzelkarten, Jahreskarten oder einer Familienkarte berechnen bzw. abschätzen und miteinander vergleichen zu können (K5). Gesteuert werden diese Rechnungen und Vergleiche von einer naheliegenden Problemlösestrategie (K2). Die dabei auffallenden Unterschiede sind vor dem Hintergrund der Sachsituation als Möglichkeit der Ersparnis beim Kauf einzelner Jahreskarten aufzufassen und zur Begründung der Antwort heranzuziehen (K1).

Zur Bearbeitung von Teilaufgabe 2 sind dieselben Kompetenzen erforderlich. Die Auswahl eines geeigneten Modells setzt hier adäquat entwickelte funktionale Vorstellungen voraus (K3). Auch diese Teilaufgabe erfordert den Einsatz einer naheliegenden

Problemlösestrategie, wie beispielsweise das gegebene Problem in Teilprobleme zu zerlegen und zunächst die anfallenden Kosten beim Kauf von einzelnen Tagestickets zu berechnen (K2). Die in diesem Rahmen durchzuführenden vertrauten Rechenoperationen und -verfahren sind mehrschrittig und beinhalten ein mit Bezug zur Sachsituation sinnvolles Runden (K5).

Aufgrund der mehrschrittigen Modellierung sowie der Informationsdichte des Aufgabenkontexts gehören beide Teilaufgaben dem Anforderungsbereich II an.

#### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

#### Zu [01, 02]:

• Vordergründige Antworten wie "Es ist billiger" (K3).

#### Zu [01]:

- Der Kauf von Tagestickets wird empfohlen, da die Eintrittsgelder für Frau Jahn unberücksichtigt bleiben (K3, K6).
- Es wird die Familien-Jahreskarte als preisgünstigste Variante angegeben, wobei vermutlich von einer "normalen" Familie mit 2 Erwachsenen und 2 Kindern ausgegangen wurde (K3, K6).

#### Zu [02]:

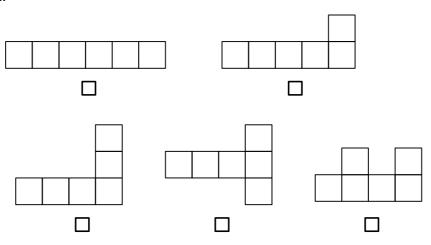
- Das rechnerisch ermittelte Ergebnis wird der Sachsituation nicht angemessen abgerundet (Fehllösung: ab dem 3. Zoobesuch) (K3, K5).
- Die Eintrittsgelder für Herrn und Frau Schöffler werden vernachlässigt (Fehllösung: ab dem 8. Zoobesuch) (K3, K6).
- Es wird die jeweils notwendige Zahl an Besuchen für beide Eltern, einen Elternteil, drei Kinder oder jedes einzelne Kind bestimmt (K3).

# Aufgabe 19: Würfelnetze

#### Aufgabentext

Bei welchem Netz (Abwicklung) handelt es sich um die Oberfläche eines Würfels?

Kreuze an.



M3402901a

Merkmale:
Leitidee: 3. Raum und Form
Allgemeine Kompetenz: 4
Anforderungsbereich: I

### Kodieranweisung

Aufgabe 19: Würfelnetze	
Item: M3402901	
RICHTIG	
	4. Kästchen wurde angekreuzt (untere Reihe, Mitte)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

# Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Raum und Form (L3), da zu ihrer Bearbeitung räumliches Vorstellungsvermögen (oder zumindest spezifisches Wissen über Würfelnetze) unerlässlich ist. Es ist notwendig, gedanklich mit den gegebenen Würfelnetzen zu operieren (K4), d.h. es muss untersucht werden, ob sich die gegebenen Netze zu einem Würfel falten lassen oder nicht. Da es sich bei den Würfelnetzen um für die Schüler vertraute Darstellungen handelt, ist es naheliegend diese Aufgabe - trotz des notwendigen Transfers von ebenen zu räumlichen Konfigurationen - dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

Im Unterricht bietet es sich an, Schüler selbst mögliche Netze aus jeweils sechs Quadraten erstellen zu lassen und ihnen anschließend die Möglichkeit zu geben, selbst zu erkunden, ob diese Netze zu Würfeln gefaltet werden können oder nicht. Als Maßnahme zur Binnendifferenzierung wäre es z.B. möglich, leistungsstarke Schüler erkunden zu lassen, wie viele verschiedene Würfelnetze es gibt oder Kriterien für "unmögliche" Würfelnetze angeben zu lassen.

#### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Es wird davon ausgegangen, dass jedes zusammenhängende Netz, das aus 6 kongruenten Quadraten besteht, zu einem Würfel gefaltet werden kann (K4).
- Es wird nicht berücksichtigt, ob einzelne Quadrate beim Falten übereinanderliegen (K4).

# Aufgabe 20: Im Koordinatensystem

# Teilaufgabe 20.1: Im Koordinatensystem

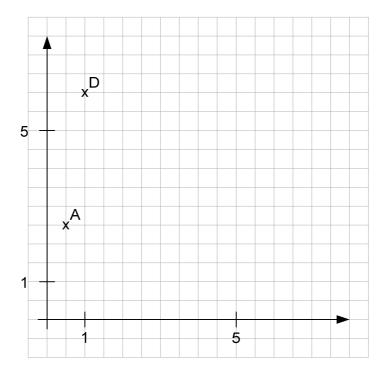
Aufgabentext

M4400901a

Gib die Koordinaten der beiden Punkte an:

A( | )

D( | )



# Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 3. Raum und Form	
Allgemeine Kompetenz: 4, 5	
Anforderungsbereich: I	

# Kodieranweisung

Aufgabe 20.1: Im Koordinatensystem	
Item: M4400901	
RICHTIG	
	A (0,5   2,5) und D (1  6) oder A ( $\frac{1}{2}$   $\frac{5}{2}$ ) und D (1  6)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

# Teilaufgabe 20.2: Im Koordinatensystem

# Aufgabentext

Zeichne zwei Punkte B und C so in das Koordinatensystem in Teilaufgabe 1 ein, dass ein Parallelogramm mit den Eckpunkten A, B, C, D entsteht.

Verbinde die Punkte.

M4400902a

#### Merkmale:

Leitidee: 3. Raum und Form

Allgemeine Kompetenz: 2, 4, 5

Anforderungsbereich: I

# Kodieranweisung

### Aufgabe 20.2: Im Koordinatensystem

Item: M4400902

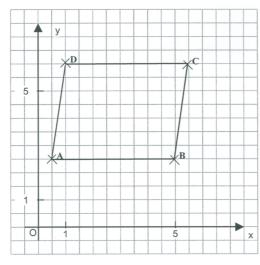
#### RICHTIG

Werden die Punkte verbunden, muss ein Parallelogramm entstehen.

Anmerkung: Die Punkte müssen nicht bezeichnet werden.

### Z.B.:

B (5/2,5) und C (5,5/6)



# FALSCH

alle anderen Antworten

Z.B.

Die Seiten (Verbindungslinien) der Punkte wurden nicht eingezeichnet.

# Teilaufgabe 20.3: Im Koordinatensystem

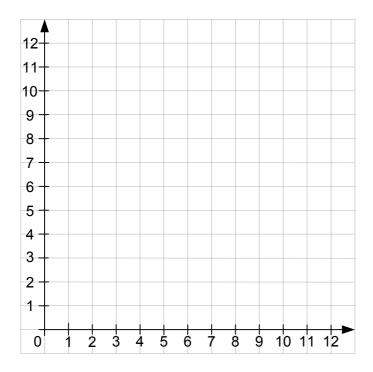
# Aufgabentext

Die Punkte E und H haben die Koordinaten E (6|7) und H (8|11). Welche beiden Punkte F und G bilden mit den Punkten E und H ein Parallelogramm?

Du kannst den abgebildeten Teil eines Koordinatensystems als Hilfsmittel zur Lösung benutzen.

Kreuze an.





# Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 3. Raum und Form	
Allgemeine Kompetenz: 4, 5	
Anforderungsbereich: II	

# Kodieranweisung

Aufgabe 20.3: Im Koordinatensystem		
Item: M4400903		
RICHTIG	RICHTIG	
	4. Kästchen wurde angekreuzt	
FALSCH		
	alle anderen Antworten	

M4400903a

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Raum und Form (L3), da es hier um die Darstellung von Punkten und Parallelogrammen im kartesischen Koordinatensystem geht. Bei der ersten Teilaufgabe müssen lediglich die Koordinaten der beiden gegebenen Punkte A und D abgelesen und angegeben werden (K4, 5). Diese Übersetzungsleistung liegt auf elementarem kognitivem Niveau, so dass diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich I zuzuordnen ist.

Bei Teilaufgabe 2 muss die gegebene Verbindungsstrecke AD zu einem Parallelogramm vervollständigt werden. Hierzu sind die aktive Auseinandersetzung mit der Darstellung (K4), das Wissen über die charakteristischen Eigenschaften eines Parallelogramms (K5) sowie das Finden einer naheliegenden Strategie (es gibt mehrere Möglichkeiten) notwendig (K2), wobei der kognitive Anspruch dieser Teilaufgabe ebenfalls gering ist. Demzufolge gehört diese Teilaufgabe zum Anforderungsbereich I.

Teilaufgabe 3 führt die beiden ersten Teilaufgaben zusammen, wobei jedoch jeweils die entsprechenden Umkehrhandlungen vollzogen werden müssen. Diese Teilaufgabe erfordert zunächst die Übersetzung von durch Koordinatendarstellung beschriebenen Punkten ins Koordinatensystem. Anschließend muss überprüft werden, welches der als Lösungsmöglichkeiten angegebenen Punktepaare mit den gegebenen Punkten E und H ein Parallelogramm bilden (K4, K5). Insbesondere aufgrund der Mehrschrittigkeit ist diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich II zuzuordnen.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01, 03]:

- Das zur Lösung der Aufgabe notwendige Wissen über die Koordinatendarstellung von Punkten fehlt oder ist fehlerhaft (Verwechslung von x- und y-Koordinate) (K5).
- Die Einheiten werden missachtet oder falsch interpretiert (Fehllösung A(1/5) und D(2/12) bei [01]) (K4).

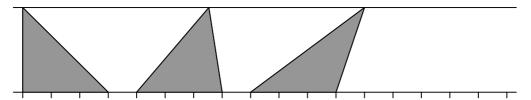
#### Zu [02, 03]:

• Ebenfalls kann fehlendes Wissen bezüglich der charakteristischen Eigenschaften eines Parallelogramms zutage treten, so dass ggfs. andere Figuren (z.B. ein Trapez) gezeichnet werden.

# Aufgabe 21: Dreiecksfläche

### Aufgabentext

Die beiden Geraden in der Zeichnung sind parallel.



Gerhard behauptet: "Die drei dunklen Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt."

Hat Gerhard Recht?

Begründe deine Antwort.

### Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 1, 4, 5
Anforderungsbereich: II

### Kodieranweisung

Aufgabe 21: Dreiecksfläche		
Item: M2401501		
RICHTIG		
	Richtige Beurteilung Gerhards Aussage (Gerhard hat Recht!) mit angemessener Begründung, in welcher darauf verwiesen wird, dass alle Dreiecke, deren Grundseite und Höhe jeweils gleich lang sind, den gleichen Flächeninhalt haben.	
FALSCH		
	alle anderen Antworten	

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe ist der Leitidee Messen (L2) zuzuordnen, da es hier darum geht, Dreiecke bezüglich ihrer Flächeninhalte zu vergleichen. Dazu muss der gegebenen Darstellung entnommen werden, dass die drei Dreiecke in der Länge einer Seite und der entsprechenden Höhe übereinstimmen (K4). Hiermit lässt sich die Gleichheit ihrer Flächeninhalte begründen (K1). Diese Argumentation kann dabei auf verschiedenen Abstraktionsebenen erfolgen: Bei einer stärker inhaltlichen Vorgehensweise ist die Länge der Grundseiten der Darstellung zu entnehmen und die Gleichheit der drei Höhen festzustellen, ohne dass hierfür konkrete Maße gegeben sind. Auf rein formaler Ebene kann auch mithilfe der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken argumentiert werden (K5). Aufgrund der notwendigen Informationsentnahme aus der gegebenen Darstellung sowie der überschaubaren mehrschrittigen Argumentation wird diese Aufgabe dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

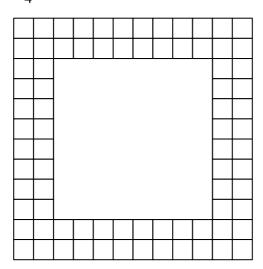
#### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Die Aufgabe wird aufgrund fehlender Maße von vornherein als nicht lösbar betrachtet.
- Es wird zwar erkannt, dass die Dreiecke jeweils in den Längen ihrer Grundseiten und Höhen übereinstimmen, jedoch kann die Begründung nicht angemessen oder nicht vollständig formuliert werden (K1).
- Dass alle drei Dreiecke denselben Flächeninhalt haben, wird nur durch "Augenmaß" begründet (K1).
- Der Flächeninhalt der Dreiecke kann nicht bestimmt werden, da die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks nicht bekannt ist (K5).

# Aufgabe 22: Quadratfläche färben

# Aufgabentext

Färbe genau  $\frac{3}{4}$  der inneren Quadratfläche.

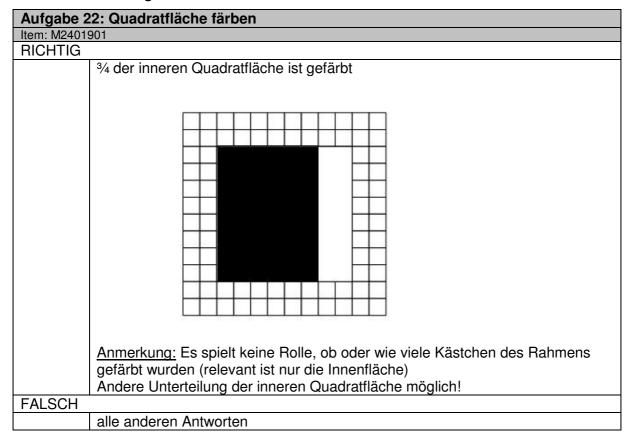


# Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 4, 5
Anforderungsbereich: I

M2401901a

### Kodieranweisung



## Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da es um Flächeninhalte geht. Dazu müssen zunächst sinntragende Vorstellungen von Bruchzahlen (Anteilsvorstellung) aktiviert und auf das gegebene Quadrat übertragen werden. Dabei kann das äußere Gitternetz eine zusätzliche Hilfe darstellen, indem das Quadrat zunächst in vier Viertel eingeteilt wird, von denen drei eingefärbt werden. Diese Einteilung in Viertel kann mithilfe der Diagonalen oder mithilfe der Mittelsenkrechten des Quadrats erfolgen. Auch eine "zeilenweise" Unterteilung ist nutzbar (K4, 5).

Da das Färben von Anteilen in einfachen geometrischen Figuren ein Routineverfahren darstellt, ist diese Aufgabe dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Es werden ¾ des Randes und nicht ¾ der inneren Quadratfläche eingefärbt (Fehlvorstellung: Verwechslung von Länge und Flächeninhalt).
- Es wird nur 1/4 der inneren Quadratfläche eingefärbt.
- Es werden nicht erkennbar genau, sondern nur ungefähr ¾ der inneren Fläche eingefärbt (K4).

# Aufgabe 23: Feuerlöschdecke

# Aufgabentext



Auf einer Feuerlöschdecke ist die Aufschrift

 $100 \times 100 = 1 \text{ m}^2$ 

zu lesen.

Welche Einheit ist jeweils bei der Zahl 100 anzugeben, damit diese Aufschrift stimmt?

M2401701a

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 2, 5
Anforderungsbereich: II

# Kodieranweisung

Aufgabe 23: Feuerlöschdecke			
Item: M2401701			
RICHTIG			
	Es ist jeweils die Einheit "cm" anzugeben.		
FALSCH			
	alle anderen Antworten		

## Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da hier Einheiten auf formaler Ebene situationsgerecht auszuwählen sind (K5). Die Lösung ist hierbei nicht unmittelbar ersichtlich, sondern es ist zunächst eine naheliegende Strategie auszuwählen, wobei insbesondere die zwei folgenden zu erwarten sind (K2):

$$100 \cdot 100 = 10000$$
 oder 
$$1 m \cdot 1 m = 1 m^{2}$$
$$1 m^{2} = 10000 \boxed{?}$$
 
$$1 m = 100 \boxed{?}$$

Das Foto hat dabei lediglich eine illustrative Funktion, da die darauf dargestellten Informationen bereits im Aufgabentext stehen. Die Kompetenz "Mathematische Darstellungen verwenden" wird demnach zur Lösung der Aufgabe nicht gefordert.

Des Weiteren ist zu beachten, dass auch lebenspraktische Erfahrungen der Schüler – ohne jegliches Anwenden von Mathematik – zur korrekten Lösung führen können.

Aufgrund der einfachen Umrechnung ist es naheliegend, diese Aufgabe noch zu Anforderungsbereich I zu zählen.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

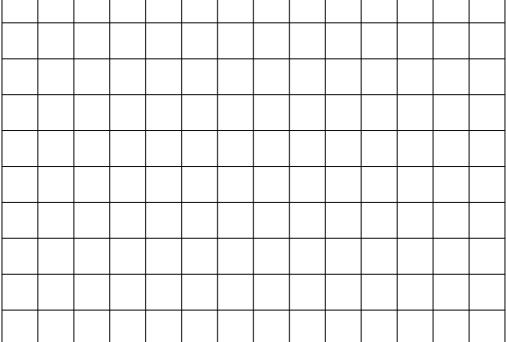
- Eine falsche Maßeinheit, insb. Meter, wird angegeben (K2, K5).
- Eine Flächeneinheit (z.B. cm²) wird statt einer Längeneinheit angegeben (K5).

# Aufgabe 24: Rechteckszeichnung

## Aufgabentext

Zeichne zwei Rechtecke in das unten stehende Feld, die den gleichen Flächeninhalt haben, aber nicht den gleichen Umfang.

nhalt haben, aber nicht den gleichen Umfang.



M2400701a

Merkmale:
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 2, 4, 5
Anforderungsbereich: II

# Kodieranweisung

Aufgabe 24: Rechteckszeichnung		
Item: M24007	701	
RICHTIG		
	Es werden zwei Rechtecke skizziert, die denselben Flächeninhalt, aber nicht denselben Umfang haben!	
	Anmerkung: Es ist nicht erforderlich, die Kästchen zu nutzen.	
	Z.B. : Rechteck 1: $a = 4$ cm; $b = 5$ cm => $A = 20$ cm <sup>2</sup> und $U = 18$ cm Rechteck 2: $a = 2$ cm; $b = 10$ cm => $A = 20$ cm <sup>2</sup> und $U = 24$ cm	
	Toleranz +/- 2 mm	
FALSCH		
	Alle anderen Antworten, die der Vorgabe nicht entsprechen!	

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da es hier um den Zusammenhang von festem Flächeninhalt und veränderlichem Umfang bei Rechtecken geht. Die Aufgabe weist einen hohen Grad an Offenheit auf, da der Flächeninhalt nicht vorgegeben, sondern selbst auszuwählen ist. Dabei ist es hilfreich, ein erstes Rechteck geeignet so zu wählen, dass ein zweites flächeninhaltsgleiches Rechteck mit anderem Umfang unter Ausnutzung des Gitterrasters einfach zu skizzieren ist. Das Bestimmen eines solchen Rechtecks kann auf verschiedene Weisen erfolgen, z.B. durch systematisches rechnerisches Probieren oder durch systematisches Zerlegen eines gegebenen Rechtecks (K2, K5). Als Lösung müssen beide Rechtecke mit den vorgegebenen Eigenschaften skizziert sein (K4).

Aufgrund der Tatsache, dass Zusammenhänge zwischen zwei Rechtecken herzustellen sind, der Offenheit der Aufgabe und der damit verbundenen Anforderung an das Problemlösen ist diese Aufgabe dem Anforderungsbereich II zuzuordnen.

#### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Schüler haben die Fehlvorstellung, dass es keine zwei Rechtecke mit demselben Flächeninhalt und unterschiedlichem Umfang geben kann.
- Schüler haben die Fehlvorstellung, dass die Verlängerung einer Seite um x cm und die gleichzeitige Verkürzung der anderen Seite um x cm (d. h. um die gleiche Länge) zu einer Invarianz des Flächeninhalts führt.
- Zwei zueinander kongruente Rechtecke in unterschiedlicher Lage werden skizziert (K2).
- Ein Rechteck und ein anderes Viereck (kein Rechteck, sondern z.B. Parallelogramm) mit demselben Flächeninhalt werden skizziert.

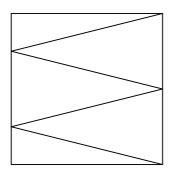
# Aufgabe 25: Quadrat und Dreieck

# Aufgabentext

Wie viele Symmetrieachsen hat diese Figur?

M3401101a

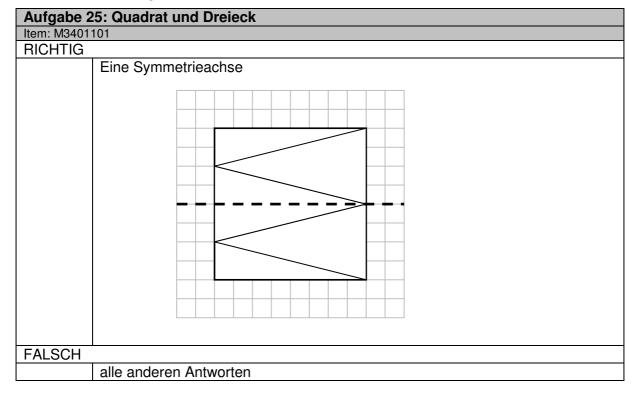
#### Zeichne sie ein.



# Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 3. Raum und Form
Allgemeine Kompetenz: 4, 5
Anforderungsbereich: I

# Kodieranweisung



# Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe ist der Leitidee Raum und Form (L3) zuzuordnen, da es hier darum geht, eine gegebene Figur auf Achsensymmetrien zu untersuchen. Dazu ist es erforderlich, das Wissen

über Achsensymmetrie zu aktivieren (K5) und die (einzige vorhandene) Symmetrieachse einzuzeichnen (K4).

## Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

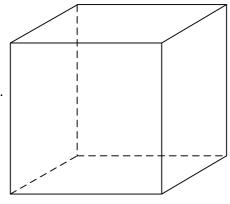
- Die "Musterung" des gegebenen Quadrats bleibt unbeachtet, so dass alle Symmetrieachsen des Quadrats eingezeichnet werden (K4).
- Es wird nicht die gesamte Figur, sondern es werden Teilfiguren betrachtet, so dass weitere für die betrachteten Teilfiguren korrekte Symmetrieachsen eingezeichnet werden (K4).
- Die gegebenen Strecken der Figur werden als Symmetrieachsen hervorgehoben. (K4, K5).

Aufgabe 26: Würfel erforschen

Teilaufgabe 26.1: Würfel erforschen

Aufgabentext

Gegeben ist ein Würfel mit 4 cm Kantenlänge.



M2404601a

Berechne das Volumen.

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:	
Leitidee: 2. Messen	
Allgemeine Kompetenz: 5	
Anforderungsbereich: I	

# Kodieranweisung

Aufgabe 26.1: Würfel erforschen		
Item: M2404601		
RICHTIG		
	64 cm <sup>3</sup>	
	Anmerkung: Die Einheit muss angegeben sein!	
FALSCH	-	
	alle anderen Antworten	

# Teilaufgabe 26.2: Würfel erforschen

# Aufgabentext

Berechne den Oberflächeninhalt.

M2404602a

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 5
Anforderungsbereich: I

#### Kodieranweisung

Aufgabe 26.2: Würfel erforschen		
Item: M2404602		
RICHTIG		
	96 cm <sup>2</sup> Anmerkung: Die Einheit muss angegeben sein!	
FALSCH		
	alle anderen Antworten	

# Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe ist der Leitidee Messen (L2) zuzuordnen, da es hier ausschließlich um die Berechnung geometrischer Größen geht. Da Schülern Formeln zu deren Bestimmung bekannt sind, erfordert die Aufgabe lediglich formales, technisches Arbeiten auf reproduzierendem, elementarem Niveau (K5). Daher ist diese Aufgabe dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

# Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

## Zu [01, 02]:

- Die Einheit wird nicht angegeben (Unvollständige Lösung 64 bzw. 96) (K5).
- Es werden falsche Einheiten gewählt (Fehllösungen 64 cm oder 64 cm² bzw. 96 cm oder 96 cm³) (K5).

• Es werden falsche Formeln zur Berechnung des Volumens bzw. des Oberflächeninhalts benutzt (K5).

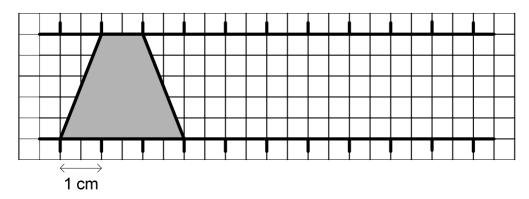
# Zu [02]:

• [02] Der Flächeninhalt nur einer Würfelfläche wird berechnet (Fehllösung 16 cm²) (K5).

# Aufgabe 27: Trapez

# Aufgabentext

Gegeben ist ein Trapez zwischen zwei vorgegebenen Parallelen.



M2404501a

Markus will ein Quadrat zeichnen, dessen Flächeninhalt genauso groß ist wie der des Trapezes. Zwei Seiten des Quadrats sollen auf den vorgegebenen Parallelen liegen.

Sabrina sagt: "Das kann nicht klappen."

Hat sie Recht?

Begründe deine Meinung rechnerisch oder zeichnerisch.

# Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 1, 4, 5, 6
Anforderungsbereich: III

# Kodieranweisung

Aufgabe 27: Trapez					
Item: M2404501					
RICHTIG					
	Richtige Antwort (Sabrina hat Recht!) und ein adäquate zeichnerische oder rechnerische Begründung, in welcher auf die Eigenschaften eines Quadrates und die hieraus resultierende Seitenlänge und somit den Flächeninhalt des Quadrates eingegangen wird. Des Weiteren muss darauf verwiesen werden, dass der Flächeninhalt des Quadrates größer als der des Trapezes ist.				
	Z.B.:  Das einzige Quadrat, das möglich ist, hat eine Seitenlänge von 2,5 cm (Abstand der beiden Parallelen) und damit einen Flächeninhalt von 6,25 cm².  Der Flächeninhalt des Quadrates ist somit größer als der des Trapezes (5 cm²).				
	ODER: A(Trapez)=((a + c) /2) · h) => A= 5cm <sup>2</sup> A(Quadrat)=6,25cm <sup>2</sup>				
	=> Das kann nicht klappen				
FALSCH					
	alle falschen, fehlerhaften oder unvollständigen Begründungen				

# Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da es um eine Existenzaussage bezüglich eines Quadrats mit vorgegebenem Flächeninhalt und vorgegebener Seitenlänge geht. Zunächst ist sinnentnehmendes Lesen des (gut strukturierten) Aufgabentextes in Verbindung mit der Abbildung erforderlich (K6, K4). Anschließend ist der Flächeninhalt des Trapezes zu ermitteln (K4, K5). Die Seitenlänge des Quadrats ist durch den Abstand der beiden Parallelen vorgegeben (K4). Nun muss in einer mehrschrittigen Argumentation (K1) rechnerisch oder durch eine Zeichnung gezeigt werden, dass es kein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 5 cm² und einer Seitenlänge von 2,5 cm gibt, sondern, dass ein Quadrat mit der gegebenen Seitenlänge (Höhe des Trapezes) einen größeren Flächeninhalt hat als das Trapez.

Aufgrund der hohen Argumentations-Anforderungen ist diese Aufgabe dem Anforderungsbereich III zuzuordnen.

#### Mögliche Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Es wird ein Rechteck mit dem gegebenen Flächeninhalt gezeichnet und nicht erkannt, dass dies kein Quadrat ist (K4, K5).
- Das Trapez wird zu einem Quadrat ergänzt, ohne die Bedingung des gleichen Flächeninhalts zu beachten (K6).
- Es erfolgt lediglich die Antwort "Sabrina hat Recht." ohne Begründung (K1).

# 4. Kompetenzentwicklung im Mathematik-Unterricht: Modellieren

# 1. Zur Kompetenz Modellieren

#### 1.1. Modelle und Modellieren

Sowohl in der nationalen als auch in der internationalen mathematikdidaktischen Diskussion wurde in den letzten Jahren die Bedeutung realitätsbezogener Problemstellungen immer stärker betont und ihre Behandlung im Unterricht eingefordert (siehe u.a. Kaiser, 1995). Bei der Auseinandersetzung mit derartigen Problemstellungen spielt die mathematische Kompetenz *Modellieren* eine zentrale Rolle. Sie ist daher in den Bildungsstandards Mathematik zu Recht als eine der sechs zentralen Kompetenzen fest verankert. Beim *Modellieren* geht es darum, realitätsbezogene Situationen durch den Einsatz mathematischer Mittel zu verstehen, zu strukturieren und das der Situation zugrunde liegende Problem einer Lösung zuzuführen sowie Mathematik in der Realität zu erkennen und zu beurteilen (Blum et al, 2007).

Die durch einen solchen Modellierungsprozess entstehenden mathematischen Modelle, die gewissermaßen ein "vereinfachtes mathematisches Abbild der Realität" (Leiß/Blum, 2006, S. 41) sind und "nur gewisse, einigermaßen objektivierbare Teilaspekte berücksichtigen" (Henn, 2002, S. 4), können deskriptiver oder normativer Art sein und demzufolge verschiedene Funktionen erfüllen. Mittels *deskriptiver* Modelle lassen sich reale Phänomene mathematisch beschreiben oder erklären, mit *normativen* Modellen lassen sich Teile der Realität gestalten oder vorhersagen (vgl. Henn, 2002, S. 6).

Deskriptive Modelle mit erklärender oder beschreibender Funktion können im Mathematikunterricht einen ersten Zugang zu Modellierungsaufgaben erleichtern, da sie im Allgemeinen in ihrer Komplexität überschaubarer sind als normative Modelle, die das Ziel haben, Vorhersagen über die Realität zu treffen oder ihre Merkmale vorzuschreiben.

In den letzten Jahrzehnten sind im Wesentlichen vier zentrale Argumente genannt worden, die einen stärkeren Realitätsbezug im Mathematikunterricht rechtfertigen. Sie sind gut mit den von Winter formulierten Grunderfahrungen vereinbar, die jeder Schüler im Mathematikunterricht machen sollte (siehe Abschnitt II). So sollen Modellierungsaufgaben zum Verständnis dienen, zur Bewältigung und mathematikhaltiger Umweltsituationen notwendigen Kompetenzen aufzubauen, den Schülern heuristische Strategien (z. B. Problemlöse- und Argumentationsfähigkeiten) zu vermitteln sowie Schüler zur Beschäftigung mit Mathematik zu motivieren und ihnen die Mathematik zugänglicher zu machen. Des Weiteren soll Schülern durch Aufzeigen von Realitätsbezügen ein ausgewogenes Bild von Mathematik als Wissenschaft vermittelt werden (vgl. Blum, 1996, S. 21 sowie Maaß, 2007, S. 15f). Auch Henn (2002) fordert, dass Schüler im Anschluss an ihre Schullaufbahn in der Lage sein sollen, als mündige Bürger zu agieren und Urteile über vorhandene Modelle zu fällen. Daher sollen Schüler im Unterricht an einfachen Beispielen Grunderfahrungen des Modellierens machen und sich mit diesen reflektierend auseinandersetzen (Henn, 2002, S. 4).

Modellierungsaufgaben in dem von uns verstandenen Sinne unterscheiden sich von den sog. eingekleideten Aufgaben dadurch, dass zu ihrer Bearbeitung ein "ehrlicher" Bezug zwischen Realität und Mathematik hergestellt oder "ernsthaft thematisiert" (Henn 2002, S. 6) wird. Dies ist bei den im Unterricht häufig dominierenden Einkleidungen nicht der Fall. Zu ihrer Bearbeitung ist es meistens ausreichend, den der Einkleidung zugrunde gelegten Algorithmus freizulegen und abzuarbeiten.

Um den Bezug zwischen Realität und Mathematik zu explizieren, kann auf den sogenannten Modellierungskreislauf als strategisches Instrument zurückgegriffen werden, da dieser den idealtypischen Lösungsprozess von Modellierungsaufgaben auf einer Metaebene beschreibt

(vgl. die Übersicht über verschiedene Varianten dieses Kreislaufs bei Borromeo Ferri, 2006). Die Variante von Blum/Leiß (2005, siehe Abb. IV.1) hat sich dabei als besonders hilfreich erwiesen. Dieser relativ komplexe siebenschrittige Kreislauf ist erfolgreich als deskriptives Instrument zur Beschreibung von realen Modellierungsprozessen sowie den dabei auftretenden kognitiven Hürden eingesetzt worden (vgl. u.a. Maaß, 2004, Galbraith/Stillman, 2006, Borromeo Ferri, 2006, Leiß, 2007). Er bietet eine geeignete Grundlage, auf deren Basis Modellierungsprozesse von Schülern im Detail rekonstruiert und analysiert werden können.

# 1.2. Der Modellierungskreislauf

Trotz der schon länger bestehenden Forderungen nach mehr Realitätsbezügen im Mathematikunterricht spielen Modellierungsaufgaben häufig nicht jene Rolle, die ihnen angemessen ist, wohl auch, weil ihre Behandlung den Unterricht anfangs sowohl für Schüler als auch für Lehrer (erheblich) anspruchsvoller macht. Für Schüler stellt eine Modellierungsaufgabe eine komplexe Anforderung dar, denn jeder der unten näher beschriebenen Teilschritte des Modellierungskreislaufs kann eine potentielle kognitive Hürde beim Lösen von solchen Aufgaben sein. Auch die Antizipation solcher potentieller kognitiver Hürden im Rahmen der Unterrichtsvorbereitung kann die vorbereitenden Arbeiten oft komplexer und zeitaufwändiger machen als dies beim Unterricht mit eher traditionellen Aufgaben der Fall ist (vgl. Blum, 1996). Ermutigend ist zu erwähnen, dass der auffordernde Charakter von Modellierungsaufgaben oft zu einer intensiveren Auseinandersetzung der Schüler mit diesen führt, und dass solche Aufgaben häufig vielfältige Möglichkeiten zur Binnendifferenzierung bieten. Somit kann im Vergleich zum traditionellen Unterricht, bei dem im Wesentlichen alle Schüler die gleiche Aufgabe in der gleichen Weise bearbeiten, die kognitive Aktivierung aller Schüler erhöht werden. Anfängliche Schwierigkeiten bei der Behandlung von Modellierungsaufgaben reduzieren sich, wenn adäquate Hilfen beispielsweise der Modellierungskreislauf oder der Lösungsplan - zu ihrer Bearbeitung gegeben werden. Dabei ist das Bewusstmachen der einzelnen Teilschritte des Modellierens sowohl für Schüler als auch für Lehrer grundlegend. Im Folgenden wird daher zunächst der siebenschrittige Modellierungskreislauf dargestellt, um die einzelnen Teilaspekte des Modellierens detailliert aufzeigen zu können. Später werden dann ein vereinfachter Kreislauf (der sogenannte Lösungsplan, s.u.) vorgestellt und unterrichtliche Anregungen gegeben, die helfen können, möglichen Schwierigkeiten beim Einsatz von Modellierungsaufgaben im Unterricht zu begegnen.

Der in Abb. IV.1 dargestellte siebenschrittige Modellierungskreislauf gibt die einzelnen Schritte des Modellierens, von denen im Sinne der Bildungsstandards streng genommen lediglich die vier Teilschritte 2, 3, 5 und 6 zur Kompetenz *Mathematisch modellieren* gezählt werden, idealtypisch wieder. Dabei scheinen die einzelnen Bearbeitungsschritte beim Lösen von Modellierungsaufgaben linear aufeinander zu folgen. In der Regel "springen" die Schüler jedoch mehrfach zwischen Mathematik und dem "Rest der Welt" hin und her.

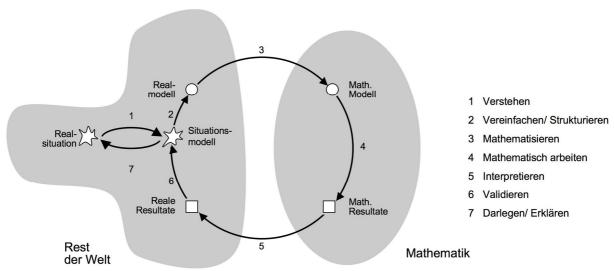


Abb. IV.1: Modellierungskreislauf von Blum/Leiß (2005)

Alle sieben Schritte des Modellierungskreislaufs werden im Weiteren am Beispiel der Aufgabe "Kanutour" (Anforderungsbereich III) exemplarisch konkretisiert:

Die 21 Schüler der Klasse 8e möchten eine Kanutour machen. Leider sind im Kanuclub nicht genügend Kanus vorhanden. Daher möchte Frau Krell einen Kleintransporter mit Anhänger mieten, um weitere Kanus zu transportieren. In der Zeitung findet Frau Krell die beiden folgenden Angebote.

1. Angebot	2. Angebot		
Kleintransporter mit Anhänger!	Kleintransporter mit Anhänger!		
Einmaliger Grundpreis: 90 €	Einmaliger Grundpreis: 110 €		
Preis pro gefahrenem Kilometer: 25 Cent	Preis pro gefahrenem Kilometer: 0,15 €		
(Kilometerpauschale)	(Kilometerpauschale)		

Vergleiche die beiden Angebote.

Berate Frau Krell bei der Wahl eines Angebots für einen Kleintransporter mit Anhänger.

Notiere deine Argumente.

#### 1. Verstehen

Die beschriebene Realsituation mit den beiden Angeboten für zu mietende Kleintransporter ist im ersten Schritt zu verstehen. Hierzu ist sinnentnehmendes Lesen erforderlich (*Mathematisch kommunizieren*). Beim Lesen der Aufgabenstellung wird zunächst ein mentales Modell der beschriebenen Situation konstruiert. Dieses sogenannte Situationsmodell enthält in diesem Fall unterschiedliche und teilweise für die Lösung irrelevante Angaben, wie z. B. die Anzahl der Schüler.

#### 2. Vereinfachen/ Strukturieren

Als nächstes müssen die wichtigen Angaben identifiziert und die Fragestellung muss präzisiert werden, wodurch sich ein so genanntes Realmodell ergibt. Dabei ist es wichtig zu erfassen, dass sich der Mietpreis für einen Kleintransporter aus dem einmalig zu zahlenden Grundpreis sowie dem Preis pro gefahrenen Kilometer zusammensetzt. Des Weiteren ist es aufgrund fehlender Informationen zu der zurückzulegenden Fahrtstrecke erforderlich, diesbezüglich entweder eine konkrete Annahme (z.B. 20 km) zu treffen oder aber der Frage nachzugehen, ab welcher Entfernung sich welches der beiden Angebote lohnt.

#### 3. Mathematisieren

Bei diesem Schritt müssen die Preisinformationen in die Mathematik übersetzt werden. Folglich können in Abhängigkeit vom vorher gebildeten Realmodell beispielsweise zwei Gleichungen aufgestellt (y = 0.25x + 90 und y = 0.15x + 110) oder eine passende Wertetabelle angelegt werden. Das hierbei entstehende mathematische Modell, mit Hilfe dessen die Tarifstrukturen beider Anbieter mathematisch erfasst werden, ermöglicht dann deren Vergleich.

#### 4. Mathematisch arbeiten

Bei diesem rein innermathematischen Teilschritt wird durch Anwendung geeigneter mathematischer Kenntnisse und Verfahren ein mathematisches Resultat erzeugt. Die anzuwendenden Lösungsverfahren können je nach aufgestelltem Modell verschiedener Art sein (z. B. systematisches Probieren, graphische Lösung, rechnerische Lösung oder rein inhaltliche Überlegungen). Zur Bewältigung dieses Teilschrittes ist hier insbesondere die Kompetenz Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen erforderlich. Bei bestimmten Aufgaben können zusätzlich die Kompetenzen Mathematisch argumentieren und Probleme mathematisch lösen notwendig sein.

## 5. Interpretieren

Die erhaltene mathematische Lösung (z. B. x = 200 mit x: Anzahl der gefahrenen Kilometer) ist nun zurück auf die Realität zu übertragen und in dieser als reales Resultat zu deuten. Die Lösung x = 200 bedeutet hier, dass beide Angebote bei einer gefahrenen Strecke von 200 km gleich teuer sind und dass somit bei allen Entfernungen unter 200 km Angebot 1 günstiger ist und bei allen Entfernungen über 200 km Angebot 2 gewählt werden sollte.

#### 6. Validieren

Das Resultat (200 km als Scheidepunkt zwischen den beiden Angeboten) ist nun anhand des Situationsmodells zu überprüfen: "Ist die Größenordnung plausibel?", "Welche Entscheidung ist bei einer Entfernung von 201 km plausibel?", "Ist die Genauigkeit sinnvoll?", "Ist die Ausgangsfrage damit beantwortet?". Eine solche Validierung erfordert auch die kritische Reflexion des (rein) rechnerischen Ergebnisses.

Führt eine solche Validierung zu einer Verwerfung des Resultats. Modellierungskreislauf – beispielsweise mit veränderten Annahmen – erneut zu durchlaufen.

#### 7. Darlegen

Die in der Aufgabe geforderte Beratung verlangt abschließend die Darlegung der gewonnenen Erkenntnisse. Dazu wird bei dieser Aufgabe in besonderem Maße die Kompetenz Kommunizieren (nämlich einem externen Adressaten Überlegungen und Ergebnisse verständlich darzulegen) benötigt.

Da der siebenschrittige Modellierungskreislauf im Allgemeinen zu komplex ist und aus empirischen Studien zudem bekannt ist, dass Schüler Schwierigkeiten haben, zwischen den sieben Schritten dieses Modellierungskreislaufs zu unterscheiden (vgl. Maaß, 2004), ist es sinnvoll, für den unterrichtlichen Einsatz einen vereinfachten Kreislauf zu verwenden. Aus diesen Gründen wurde im Rahmen des DISUM-Projekts<sup>13</sup> ein so genannter Lösungsplan entwickelt, der die sieben Schritte des oben vorgestellten Kreislaufs auf vier Schritte verdichtet und somit dessen Komplexität wesentlich reduziert (siehe Abb. IV.2). Dabei entspricht der erste Schritt "Aufgabe verstehen" auch Schritt 1 im siebenschrittigen Modellierungskreislauf, der zweite Schritt "Modell erstellen" fasst die Schritte 2 und 3 zusammen, der dritte Schritt "Mathematik benutzen" entspricht Schritt 4 und der vierte Schritt

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup> Das Forschungsprojekt DISUM (Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik) ist ein im Jahr 2002 begonnenes DFG-Projekt unter der Leitung von Prof. Dr. W. Blum, Prof. Dr. R. Messner (beide Universität Kassel) und Prof. Dr. R. Pekrun (Universität München).

"Ergebnis erklären" vereint die Schritte 5 bis 7 des siebenschrittigen Modellierungskreislaufs. Eine bewusste Auseinandersetzung mit einem für Schüler und Lehrer gut nutzbaren Lösungsplan kann als strategisches Instrument eine erfolgreiche Bearbeitung von Modellierungsaufgaben unterstützen.

Solche Hilfen sind den Schülern bereits aus der Grundschule bekannt. Bereits in den ersten Schuljahren lernen Schüler zu benennen, was in einer Aufgabe gegeben und was gesucht ist, sowie dies von der Rechnung und der Antwort zu unterscheiden. Auf diesen grundlegenden Bausteinen des Lösungsprozesses einer Aufgabe aufbauend, kann zu Beginn der Sekundarstufe I gut der sog. Lösungsplan (vgl. auch 2.2.1) als vereinfachte Version des Modellierungskreislaufs erarbeitet werden, und daran lassen sich die wesentlichen Bearbeitungsschritte und Merkmale von Modellierungsaufgaben verdeutlichen. Hierauf aufbauend ist auch eine unterrichtliche Auseinandersetzung mit dem siebenschrittigen Modellierungskreislaufs denkbar. Beiden Versionen ist gemeinsam, dass auf ihrer Grundlage die Lösungsprozesse bei Modellierungsaufgaben reflektiert und gesteuert werden können.

Zu diagnostischen Zwecken ist allerdings der siebenschrittige Modellierungskreislauf besser geeignet, da er die kognitiv ablaufenden Prozesse von Schülern beim Lösen von Modellierungsaufgaben wesentlich differenzierter erfasst als der demgegenüber vereinfachte Lösungsplan (vgl. auch Abschnitt 2.2.1).

#### Vier Schritte zur Lösung einer Textaufgabe ("Lösungsplan")

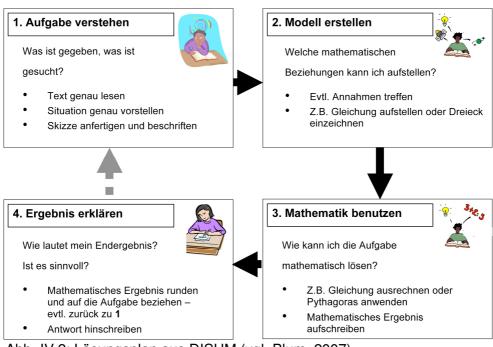


Abb. IV.2: Lösungsplan aus DISUM (vgl. Blum, 2007)

# 2. Möglichkeiten zur Förderung der Modellierungskompetenz

#### 2.1. Modellieren im Unterricht

Ziel dieses Abschnitts ist es, anhand ausgewählter Aufgaben exemplarisch Möglichkeiten aufzuzeigen, die Kompetenz *Modellieren* im Unterricht zu fördern. Dieser Abschnitt kann es jedoch nicht leisten, ein systematisches Vermittlungskonzept zum Modellieren vorzustellen, zumal der Erwerb von Modellierungskompetenz ein langfristiger Prozess ist, der bereits im Primarbereich in angemessener Weise aktiviert werden sollte. Neben den hier vorgestellten Modellierungsaufgaben liefern vor allem neuere Schulbücher sowie beispielsweise die VERA 8-Aufgaben, zahlreiche Anregungen zu dieser Thematik (vgl. u. a. Dockhorn/Leiß, 2002, Drüke-Noe/Leiß, 2005, Leiß/Wiegand, 2006, Maaß, 2007, Leiß, 2007). Eine weitere wichtige Grundlage für die Entwicklung der Modellierungskompetenz stellt neben dem Einsatz adäquater Aufgaben die Beachtung der Qualitätskriterien für eine "gute Unterrichtspraxis" (vgl. Abschnitt II) dar.

Im Folgenden werden exemplarisch einige Modellierungsaufgaben unterschiedlicher kognitiver Komplexität, d. h. unterschiedlicher Anforderungsbereiche, vorgestellt. Diese Aufgaben werden zunächst mit Bezug zum Modellierungskreislauf kurz analysiert, bevor anschließend Verbindungen zu einer weiteren ausgewählten mathematischen Kompetenz neben der des Modellierens aufgezeigt und Unterrichtsanregungen gegeben werden. Den Abschluss bildet eine Analyse der Aufgabe "Tanken".

# 2.2. Beispiele für Modellierungsaufgaben im Unterricht

#### 2.2.1 Die Aufgabe "Fähre" (Anforderungsbereich II)

Frau Weitzel fährt einen PKW mit 5 Sitzen. Sie muss in der nächsten Woche viermal auf die andere Rheinseite (und zurück) und benutzt die Autofähre. Welche Karte sollte sie kaufen, um möglichst wenig zu bezahlen?

Begründe deine Antwort mit einer Rechnung.

Preistafel					
	Einfach	10er-Karte	Wochenkarte		
Fußgänger	1,40	8,-	7,-		
Fahrrad, Moped	1,80	14,-	12		
Motorrad	2,00	16,-	13,-		
PKW bis 5 Sitze	3,00	24,-	17,-		
PKW ab 6 Sitze (Kombi, Kleintransporter)	3,50	27,-	19,-		

"Einfach" bedeutet eine Einzelfahrt (ohne Rückfahrt)

Schüler müssen vor der Bearbeitung der Aufgabe "Fähre" zunächst die vorliegende Realsituation und die in der Tabelle dargelegten Informationen verstehen, um ein adäquates reales Modell aufstellen zu können. Unter Berücksichtigung des Fahrzeugtyps, der Anzahl der wöchentlichen Fahrten und der angegebenen Preistafel ist die Realsituation daraufhin zu strukturieren. Bei diesem mehrschrittigen Vorgehen sind mehrere Informationen gezielt aus der im Aufgabentext beschriebenen Realsituation sowie aus der Tabelle zu entnehmen und miteinander zu verknüpfen. Erst danach kann ein geeignetes mathematisches Modell

aufgestellt werden, mit dessen Hilfe die Art der günstigsten Karte ermittelt wird. Dieses Resultat ist abschließend wiederum im Kontext zu deuten und zu validieren.

Um den Ablauf dieses Bearbeitungsprozesses sowie die einzelnen Teilschritte des Modellierens transparent und auf einer Metaebene bewusst zu machen, ist eine anschließende Reflexionsphase sehr geeignet, in der anhand der hier vorgestellten, in ihren Teilschritten überschaubaren Aufgabe "Fähre" der erwähnte Lösungsplan (siehe Abb. IV.2) erarbeitet werden kann. Hierzu können den Schülern zunächst Reflexionsfragen zum Bearbeitungsprozess der Aufgabe gestellt werden, beispielsweise beginnend mit "Wie seid Ihr bei der Bearbeitung der Aufgabe vorgegangen?", "Was habt Ihr zuerst gemacht und was danach?", "Welche Schwierigkeiten sind aufgetreten und wie habt ihr diese gelöst?" oder "Was hat Euch beim Bearbeiten der Aufgabe geholfen?". Mit solchen und ähnlichen Fragen kann zunächst der erste Schritt des Lösungsplans "Aufgabe verstehen" mit seinen einzelnen Facetten erarbeitet werden. Schülern soll in dieser Reflexionsphase Aufgabenbearbeitung ebenso bewusst gemacht werden, dass sie einen Übergang von der Realität zur Mathematik vornehmen, indem sie ein "Modell erstellen" (Schritt 2 des Lösungsplans). Während in dieser Aufgabe die für die Modellierung zu treffenden Annahmen bereits gegeben sind, kann bei der Erarbeitung des Lösungsplans besprochen werden, dass solche Annahmen ie nach Aufgabe unter Umständen erst zu treffen sind.

Beim Verdeutlichen von Schritt 4 "Ergebnis erklären" durch derartige Reflexionsfragen ist im hervorzuheben. dass die Ermittlung eines Endergebnisses Unterricht Bearbeitungsprozess einer (Modellierungs-)Aufgabe nicht abschließt. Schüler sollten immer wieder dazu angehalten werden, ein Endergebnis bewusst zu reflektieren und zu beurteilen, ob es im Kontext sinnvoll ist. Geeignete Reflexionsfragen könnten im Aufgabenbeispiel "Fähre" sein: "Wurden alle in der Aufgabe genannten Angaben und Annahmen berücksichtigt?", "Ist die Ersparnis gegenüber der nächst teureren Karte angemessen, oder wäre der Kauf einer anderen Karte in diesem Realkontext sinnvoller?" Die Sinnhaftigkeit des Stellens solcher und ähnlicher Reflexionsfragen belegt exemplarisch die Analyse erwartbarer Schwierigkeiten und Fehler bei der Bearbeitung dieser Aufgabe (vgl. Kapitel 3).

Reflexionsfragen zum Bearbeitungsprozess gestatten, ausgehend von einem speziellen Beispiel das Allgemeine eines Aufgabenbearbeitungsprozesses herauszuarbeiten und in der geschilderten Weise den Lösungsplan sukzessive zu erarbeiten, um ihn bei der Bearbeitung anderer Modellierungsaufgaben bewusst anwenden zu können.

Die Kompetenz *Kommunizieren (K6)* spielt bei dieser wie auch bei vielen anderen Modellierungsaufgaben eine wesentliche Rolle und ist entscheidend für das erfolgreiche Aufstellen eines geeigneten Situationsmodells. Wie bei den meisten Modellierungsaufgaben geht es hier vor allem um das Verstehen von Texten und die Entnahme wichtiger Informationen ("sinnentnehmende Seite" des Kommunizierens). Während der Realitätsbezug von Modellierungsaufgaben insbesondere auch auf leistungsschwächere Schüler motivierend wirken kann, ist im Unterricht und selbstverständlich ebenso bei der Leistungsmessung generell zu beachten, dass vorliegende Leseanforderungen nicht zu komplex sein sollten, da sie sonst zu sehr die Aufgabenbearbeitung erschweren können. Dennoch sollte mit bestehenden Anforderungen an das Lesen offensiv umgegangen werden und keinesfalls auf die Behandlung textintensiver Aufgaben verzichtet werden. Hinweise zur Förderung von Lesestrategien beispielsweise mithilfe eines sog. Lesefächers finden sich beispielsweise in Mohl-Lamb (2007).

Im Unterricht kann der beschriebenen Komplexität des Kommunizierens in verschiedener Weise Rechnung getragen werden. Insbesondere ist es wünschenswert, den Schülern Strategien zu vermitteln, die sie befähigen, selbstständig komplexere Texte zu verstehen. Dazu können relevante Informationen beispielsweise optisch hervorgehoben oder auf das sorgfältige Lesen der Aufgabe als Grundlage für deren Bearbeitung verwiesen werden. Damit sich die Schüler die Realsituation möglichst konkret vorstellen können, kann eine Skizze der Realsituation mit den in die Modellierung eingehenden Angaben angefertigt werden. Konkret könnte in einer solchen Skizze zu der Aufgabe "Fähre" der Rhein dargestellt, die einzelnen Überfahrten mit Pfeilen symbolisiert und diese mit den zu

zahlenden Preisen versehen werden, um einen besseren Überblick über die entstehenden Kosten zu gewinnen.

#### 2.2.2. Die Aufgabe "Zoobesuch" (Anforderungsbereich II)





Herr und Frau Schöffler haben drei Kinder (fünf, sieben und zehn Jahre). Sie wollen eine Familien-Jahreskarte kaufen.

Ermittle, wie oft sie zusammen in den Zoo gehen müssen, damit sich der Kauf im Vergleich zu den Tageskarten auch lohnt.

Notiere deine Rechnung.

Die Aufgabe "Zoobesuch" ist hinsichtlich des Modellierens ähnlich komplex wie die Aufgabe "Fähre". Beim Durchlaufen des Modellierungskreislaufs ist hierbei u. a. die Kompetenz **Probleme mathematisch lösen (K2)** erforderlich. Die Schüler wählen eine naheliegende heuristische Strategie (hier z.B. das "Zerlegungsprinzip", im Sinne des Zerlegens des gegebenen Problems in Teilprobleme) und vereinfachen und strukturieren auf diese Weise die beschriebene Realsituation. Beim nächsten Schritt des Mathematisierens können sie die im Realmodell getroffene Annahme, dass stets beide Elternteile und alle drei Kinder zusammen den Zoo besuchen, verwenden, um schließlich durch mehrschrittiges mathematisches Arbeiten zunächst die Kosten für jeden einzelnen Zoobesuch zu errechnen. Diese sind dann in Beziehung zum Preis einer Familien-Jahreskarte zu setzen, um herauszufinden, ab welcher Anzahl an Zoobesuchen sich der Kauf einer Familien-Jahreskarte lohnt.

Im Unterricht kann am Beispiel dieser Aufgabe anschaulich die besondere Rolle des Interpretierens und Validierens im Modellierungsprozess deutlich gemacht werden. Besteht das aufgestellte mathematische Modell beispielsweise aus der Gleichung

 $x \cdot (2 \cdot 12,5+3 \cdot 6,3) = 135$  (mit x: Anzahl der Zoobesuche), so ist die Rückübersetzung des erhaltenen mathematische Resultats x = 3,075... in die Realität eine nicht-triviale kognitive Leistung. So ist u.a. die Antwort "Ab 3 Zoobesuchen lohnt sich der Kauf einer Familien-Jahreskarte." zu erwarten. Diese sollte im Unterricht unbedingt aufgenommen und mit den Schülern thematisiert werden. Es ist nämlich keinesfalls eindeutig, ob diese Antwort als

falsch oder richtig zu werten ist, denn bei genau 3 Zoobesuchen im Jahr beträgt der Preisunterschied zwischen dem Kauf einer Familien-Jahreskarte und dem von Einzelkarten marginale 3,30 €, so dass man – fasst man die Aufgabe als realistische Problemstellung auf – bei geplanten 3 Zoobesuchen im Jahr sicherlich darüber streiten kann, ob sich Familie Schöffler nicht doch eine Familien-Jahreskarte zulegen sollte, um die Option zu haben, den Zoo noch ein viertes oder gar ein fünftes Mal ohne zusätzliche Kosten besuchen zu können. An diesem Beispiel wird also deutlich, dass selbst bei der Interpretation des mathematischen Resultats Spielräume vorhanden sind, die – je nach getroffenen Annahmen – zu unterschiedlichen Aussagen führen können. Diese Offenheit sollte als wesentliches Element realer Problemstellungen im Unterricht zugelassen und dazu genutzt werden, die Schüler anzuregen, den Realkontext bei der Interpretation mathematischer Ergebnisse (und auch bei den anderen Teilschritten des Modellierens) möglichst ernst zu nehmen.

#### 2.2.3. Die Aufgabe "Apfelkauf" (Anforderungsbereich I)

4 kg Äpfel kosten 9,60 €.

Berechne, wie viel 6 kg derselben Sorte kosten.

Dies ist eine – empirisch - sehr einfache Modellierungsaufgabe, die gleichsam bei ihrer Bearbeitung das Durchlaufen der einzelnen Schritte des Modellierungskreislaufs erfordert. Die vorzunehmenden Übersetzungen können jedoch alle direkt ausgeführt werden, und neben der Kompetenz des *technischen Arbeitens (K5)* sind keine weiteren Kompetenzen erforderlich. Zunächst ist die beschriebene Problemsituation zu verstehen. Anders als bei komplexeren Modellierungsaufgaben ist hier jedoch keine weitere Vereinfachung der Sachsituation nötig (Schritt 2 des Modellierungskreislaufs fällt hier also weg). Daher können die Schüler unmittelbar ein einfaches Proportionalitäts-Modell aufstellen, innerhalb dessen sie rechnerisch den gesuchten Preis für die Äpfel ermitteln. Das mathematische Resultat, hier der ermittelte Preis für 6 kg Äpfel, ist schließlich im Kontext zu deuten und auf seine Plausibilität hin zu prüfen, um mögliche Fehler aufzudecken.

Insbesondere das häufig vernachlässigte Validieren des Ergebnisses kann anhand dieser Aufgabe bewusst gemacht werden. Gerade offensichtliche Fehllösungen, wie etwa 57,60 € (9,60 € · 6), geben Anlass hierzu und ermöglichen es, Fehler konstruktiv als Lernanlass zu nutzen. Die vorliegende Situation legt in besonderer Weise nahe, bereits vor der rechnerischen Bearbeitung der Aufgabe zu überschlagen, wie hoch der gesuchte Preis ungefähr sein wird. Um die Bedeutung des Validierens noch stärker herauszustellen, können Schüler aufgefordert werden, vorgelegte Ergebnisse zu anderen Aufgaben auf ihre Plausibilität hin zu prüfen, was zum Beispiel durch geeignetes Überschlagsrechnen erfolgen kann.

Alternativ kann im Rahmen des Validierens das unkritische Extrapolieren bei Aufgaben zu Proportionalitäten zum Gegenstand gemacht werden. Eine mögliche Aufgabe dazu könnte sein:

3 kg Äpfel kosten 5,99 €. Wie viel kosten 6 kg (50 kg, 500 kg) Äpfel dieser Sorte?

Während der Proportionalitätsansatz bei geringeren Mengen noch zulässig erscheint, kann er bei größeren Mengen zumindest in Frage gestellt werden. Auch der Kontext "Heizölkauf" bietet sich für eine solche kritische Validierung an.

#### 2.2.4. Die Aufgabe "Gummibären" (Anforderungsbereich III)

Nach Herstellerangaben werden vor dem Abfüllen von Gummibärchen in Tüten die Bären folgendermaßen durchgemischt: Je ein Sechstel grüne, gelbe, weiße und orangefarbene Bären und ein Drittel rote Bären. Die Hälfte der roten Bären schmeckt nach Erdbeere, die andere Hälfte nach Himbeere.

Luisa hat eine Minitüte bekommen, mit vier grünen, zwei roten, drei orangefarbenen, zwei weißen und einem gelben Gummibärchen. Sie sagt:

"Daran sieht man, dass die Angaben des Herstellers über die Mischung der Farben gar nicht stimmen können."

Erkläre, was Luisa damit meint, und beurteile ihre Aussage.

Bei dieser Aufgabe wird die Kompetenz *Modellieren* auf höchstem Niveau benötigt, da ein vorgegebenes Modell zu bewerten ist. Hier sind damit insbesondere die letzten drei Schritte des Modellierungskreislaufs (Interpretieren, Validieren, Darlegen) von großer Bedeutung. Um Luisas Aussage zu beurteilen, müssen Schüler deren Interpretation zum vorliegenden stochastischen Modell (welches zunächst rekonstruiert werden muss) in Beziehung setzen, um sie dann validieren zu können. Dies setzt voraus, dass die Schüler ein grundlegendes Verständnis von Zufallsprozessen haben, damit sie beurteilen und schließlich argumentativ darlegen können, dass die Zusammensetzung der Gummibären in Luisas Minitüte den Angaben des Herstellers nicht widerspricht.

Die kognitive Komplexität dieser Aufgabe spiegelt sich in ihren hohen empirischen Schwierigkeitswerten wider und ist in der hier nötigen mehrstufigen Argumentation (Kompetenz Argumentieren, K1) begründet. Die Durchführung und Darlegung solcher begründeter Beurteilungen kann im Unterricht zur Verminderung von Schwierigkeiten separat geübt werden. Zahlreiche Unterrichtserfahrungen und -beobachtungen zeigen, dass es vielen Schülern Schwierigkeiten bereitet, ihre Lösungsprozesse strukturiert und angemessen darzulegen. Daher sollte auch dies mit Schülern geübt werden. Eine mögliche Vorgehensweise hierzu besteht darin, Schüler in Partnerarbeit ihre notierten Rechnungen oder Argumentationen austauschen zu lassen, wobei der jeweilige Partner diese nachvollziehen und verbalisieren muss. Dies gestattet, die Verständlichkeit der Darlegung zu überprüfen und zudem Lücken in der Argumentationskette aufzuzeigen. Eine andere Vorgehensweise kann darin bestehen, die einzelnen Elemente einer Argumentationskette in beliebiger Reihenfolge vorzugeben und diese von den Schülern begründet ordnen zu lassen. Auch hierbei sind weitere Varianten denkbar, indem etwa überflüssige Argumente hinzugefügt oder notwendige weggelassen werden.

Des Weiteren kann das Verständnis der vorliegenden Situation durch die Durchführung geeigneter Zufallsexperimente unterstützt werden. So können in einem Urnenexperiment, das auch mit dem Computer simuliert werden kann, aus einer großen Menge farbiger Kugeln, deren anteilige Zusammensetzung dem in der Aufgabenstellung angegebenen Mischungsverhältnis des Herstellers entspricht, 12 Kugeln gezogen und deren Farben notiert werden. Die Entwicklung eines vertieften Verständnisses von der Zufälligkeit der farblichen Zusammensetzung der 12 Kugeln erfordert, das Experiment mehrfach zu wiederholen und die einzelnen Ergebnisse zu protokollieren. Alternativ zu einem Urnenexperiment kann auch eine Simulation mit Hilfe eines Würfels durchgeführt werden, dessen sechs Seiten unterschiedlich gefärbt sind. Protokolliert man die Ergebnisse bei einer geringen Anzahl von Würfen (z. B. sechs oder zwölf), wird deutlich, dass das Ergebnis nicht notwendigerweise die tatsächliche Verteilung der Farben auf den Seiten des Würfels wiedergibt und dass eine sehr hohe Anzahl von Versuchsdurchführungen erforderlich ist, um Stabilisierungen beobachten zu können.

#### 2.2.5. Die Aufgabe "Tanken" (Anforderungsbereich III)

#### Tanken

Frau Stein wohnt in Trier 20 km von der Grenze zu Luxemburg entfernt. Sie fährt mit ihrem VW Golf zum Tanken nach Luxemburg, wo sich direkt hinter der Grenze eine Tankstelle befindet. Dort kostet der Liter Benzin nur 1,05 Euro, im Gegensatz zu 1,30 Euro in Trier.



Lohnt sich die Fahrt für Frau Stein?

Die Aufgabe "Tanken" (dem DISUM-Projekt entnommen; siehe Blum/Leiß, 2006) ist eine realistische und zudem komplexe Modellierungsaufgabe. Der authentische Kontext wird u.a.

durch das gesellschaftliche Interesse am dargelegten Thema untermauert, insbesondere gab es im Laufe der letzten Jahre zahlreiche Zeitungsartikel zum Thema "Tanktourismus" (siehe z.B. nebenstehenden Zeitungsartikel).

Zur Lösung der Aufgabe ist in besonderem Maße die Kompetenz *Modellieren* gefordert, es sind aber auch die Kompetenzen *Argumentieren*. Problemlösen, technisches Arbeiten und Kommunizieren notwendig. Für eine erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgabe müssen alle Teilschritte des siebenschrittigen

# "Rollende Bomben" Benzinschmudgel nimmt deutlich zu / Sprit wird meist in nicht zugelassenen Behältern tra-

merkenantein der Gefologisstrage ut school net deb. das der Anso

Abb. IV.3: Zeitungsartikel "Rollende Bomben"

Modellierungskreislaufs bewältigt werden, wobei an dieser Stelle auf den zweiten Schritt "Vereinfachen/Strukturieren" näher eingegangen werden soll. Beim Erstellen des Realmodells ist zu beachten, dass zumindest zwei konkrete Annahmen zum Tankvolumen und zum Benzinverbrauch getroffen werden müssen, um die Fragestellung, ob sich die Fahrt für Frau Stein lohnt, beantworten zu können. Allerdings bietet die Aufgabenstellung die Möglichkeit, verschiedenste weitere Annahmen zu treffen, beispielsweise, dass Frau Stein einen gut bezahlten Beruf ausübt, so dass unter dieser Annahme der Zeitfaktor wichtiger erscheint als eine mögliche Kostenersparnis oder die Berücksichtigung des Verschleißes des Autos. Aufgrund der Offenheit der Aufgabe sind somit viele Schülerlösungen möglich und auch erwünscht. Dies bedeutet wiederum, dass Lehrkräfte den Lösungsraum der Aufgabe möglichst aut kennen sollten, um so während des Unterrichts Schülerlösungen möglichst schnell verstehen und Fehler diagnostizieren zu können, so dass sie optimal auf mögliche Fragen und Probleme reagieren und adäguat intervenieren können. Die oben erwähnte Lösungsvielfalt sollte im Unterricht angesprochen und mit den Schülern diskutiert werden, so dass Schüler zu der Einsicht gelangen können, dass es zu realitätsbezogenen Aufgaben bzw. Problemstellungen meist keine eindeutigen Antworten gibt, sondern dass diese von den getroffenen Annahmen, d.h. dem aufgestellten Modell, abhängig sind. Des Weiteren sollte gerade bei solch authentischen Problemstellungen wie "Tanken" unbedingt eine Validierung des Ergebnisses bzw. des aufgestellten Modells erfolgen, so dass unter Umständen der Modellierungskreislauf mit veränderten Annahmen und einem modifizierten oder erweiterten Modell erneut (evtl. sogar mehrmals) durchlaufen werden muss bzw. kann.

Die Lösungsvielfalt und die Authentizität der Aufgabe legen es nahe, eine Projektarbeit zum "Tanktourismus" durchzuführen. So können beispielsweise Schülergruppen beauftragt werden, zu den verschiedenen für die Problemstellung möglicherweise relevanten Aspekten, wie z.B. Tankvolumen eines VW Golfs, Verbrauch, Verschleißkosten oder Umweltbelastungen, Informationen zu beschaffen. Auf der Grundlage dieser Informationen können dann unterschiedliche Modellierungen vorgenommen werden, die abschließend im Klassenverband präsentiert und unter Berücksichtigung der wichtigsten Modellierungsaspekte reflektierend miteinander verglichen werden können.

Das Thema "Tanktourismus" könnte zudem in einem fächerverbindenden Unterricht (Mathematik, Naturwissenschaften, Gesellschaftswissenschaften) vertieft werden.

#### 2.3. Zusammenfassung

All diese Ausführungen zeigen, dass das Bewusstmachen aller einzelnen Teilschritte beim Durchlaufen des Modellierungskreislaufs die potentiellen Hürden für Schüler beim Lösen von solchen Aufgaben verringern kann, und dass es gilt, auch Teilschritte des Modellierens einzuüben und diese den Schülern bewusst zu machen. Zudem ist deutlich geworden, dass die Kompetenz Modellieren viele Teilkompetenzen umfasst und nahezu immer in Kombination mit anderen mathematischen Kompetenzen auftritt, so dass bei der langfristigen Förderung der Modellierungskompetenz notwendigerweise immer auch andere Kompetenzen (möglichst ausgewogen) in den Blick genommen werden müssen. Aus all dem lässt sich folgern, dass verständiges Modellieren für alle Beteiligten anfangs nicht sehr einfach ist. Dies zeigen theoretische Analysen ebenso wie empirische Befunde. Der Einstieg in die bewusste und reflektierte Behandlung von Modellierungsaufgaben kann jedoch gut mit einfacheren und erst allmählich komplexer werdenden Beispielen gelingen und es gibt ermutigende Hinweise, dass der Erwerb einer angemessenen Modellierungskompetenz gelingen kann. So antwortet Blum (2007) auf die Frage, ob Modellieren für Schüler zu schwierig sei, auf der Basis empirischer Befunde aus dem DISUM-Projekt: "Modellieren ist schwer, aber nicht zu schwer, vielmehr gibt es dichte Hinweise auf Gelingensbedingungen, deren Berücksichtigung – bei Konstanthalten anderer Bedingungen – bessere Lernerfolge mit sich bringt." Somit sind für das Lehren und Lernen folgende Aspekte von Bedeutung (vgl. Blum, 2007):

- Die eingangs genannten Qualitätskriterien für guten Mathematikunterricht (vgl. Abschnitt II.1.3) müssen speziell auch in einem modellierungsorientierten Unterricht berücksichtigt werden.
- Auch im modellierungsorientierten Mathematikunterricht muss stets die Balance zwischen größtmöglicher Schülerselbstständigkeit und geringstmöglicher Lehreranleitung gewahrt werden (im Sinne des bekannten Montessori-Prinzips "Hilf mir, es selbst zu tun").
- Hilfreich für Schüler und Lehrer ist ein Werkzeug wie der Lösungsplan bzw. der Modellierungskreislauf (für Schüler als Hilfe bei allfälligen Schwierigkeiten im Lösungsprozess, für Lehrer als Basis für Diagnosen und Interventionen), dessen Gebrauch jedoch eingeübt werden muss.
- Modellierungskompetenz muss langfristig und gestuft aufgebaut werden, u. a. durch
  - eine allmähliche Steigerung der Komplexität von Aufgaben,
  - ein breites Spektrum von Aufgabentypen und eine systematische Variation der Kontexte,
  - den parallelen Aufbau heuristischer F\u00e4higkeiten,
  - häufige Übungs- und Festigungsphasen.

Die in den vorangegangenen Abschnitten zu den einzelnen Aufgaben gegebenen Hinweise sollen dazu beitragen, einen solchen Unterricht zu fördern.

# 5. Literaturverzeichnis

# Kapitel 2: Fachallgemeine Erläuterungen

Blum, W./ Drüke-Noe, C./ Hartung, R./ Köller, O. (2006): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Bruder, R. / Leuders, T./ Büchter, A. (2008): Mathematikunterricht entwickeln 5.-10. Schuljahr: Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Klieme, E./ Neubrand, M./ Lüdtke, O. (2001): Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: PISA 2000 - Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Leske und Budrich, Opladen, S. 141-190.

Winter, H. (2003): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 8 (Hrsg.: Henn,H.-W. & K. Maaß). Franzbecker, Hildesheim, S. 6-15.

# Kapitel 4: Kompetenzentwicklung im Mathematik-Unterricht: Modellieren

Blum, W. (1996): Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven. In: Trends und Perspektiven (Hrsg.: G. Kadunz u. a.), Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 23, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 15-38.

Blum, W./ Drüke-Noe, C./ Hartung, R./ Köller, O. (2006): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Blum, W./ Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. In: mathematik lehren, Heft 128, S. 18-21.

Blum, W. et al. (Hrsg., 2007): Modelling and Applications in Mathematics Education. Springer, New York.

Borromeo Ferri, R. (2006): Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38, H. 2, S. 86-95.

Dockhorn, C./ Leiß, D. (2002): PISA weitergedacht. Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematik-Unterricht. Hess. Landesinstitut für Pädagogik (Hrsg.), Wiesbaden.

Drüke-Noe, C./ Leiß, D.(2005): Standard-Mathematik von der Basis bis zur Spitze. Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematik-Unterricht. Hess. Landesinstitut für Pädagogik [Hrsg.], Wiesbaden.

Galbraith, P./ Stillman, G. (2006): A framework for identifying blockages during transitions in the modelling process. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38, H. 2, S. 143-162.

Henn, H.-W. (2002): Mathematik und der Rest der Welt. In: mathematik lehren, Heft 113, S. 4-7.

Leiß, D./ Blum, W. (2006): Beschreibung der Kompetenzen. In: Blum, W./ Drüke-Noe, C./ Hartung, R./ Köller O. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I:

Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Scriptor, Berlin, S. 33-48.

Leiß, D./ Wiegand, B./ Blum, W. (2006): PISA-SINUS-Bildungsstandards. In: Steffens, U., Messner, R. [Hrsg.]: Pisa macht Schule. Konzeptionen und Praxisbeispiele zur neuen Aufgabenkultur. Hess. Landesinstitut für Pädagogik, Wiesbaden, S. 63-125.

Leiss, D. (2007): Hilf mir es selbst zu tun. Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren. Franzbecker, Hildesheim.

Maaß, K. (2004): Mathematisches Modellieren im Unterricht. Franzbecker, Hildesheim.

Maaß, K. (2007): Mathematisches Modellieren – Aufgaben für die Sekundarstufe I. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Mohl-Lamb (2007): Sachtexte mit dem Lesefächer knacken. In: mathematik lehren, Heft 143, S. 68.