



Institut zur Qualitätsentwicklung  
im Bildungswesen

---

# Handreichung

## VERA 8 Mathematik 2009

### Testheft C

---



Liebe Kollegin, lieber Kollege,

die vorliegende „Handreichung Vergleichsarbeiten – VERA-8 (2009)“, enthält die Aufgabenstellungen, Lösungen und didaktischen Kommentierungen der „Vergleichsarbeiten Mathematik 8. Klasse (2009)“, Testheft I, wie sie vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen der Humboldt-Universität zu Berlin (IQB) für die Länder erstellt wurden. Ergänzend finden Sie zudem kurz gefasst allgemeinere Erläuterungen zu den Zielen, den Verwendungsmöglichkeiten und der Konstruktionsweise von Vergleichsarbeiten.

Diese „Handreichung Vergleichsarbeiten“ soll auf diese Weise nicht nur ganz konkret über die Bildungsstandards Mathematik und einen entsprechenden Kompetenzorientierten Unterricht informieren, sondern sie soll vor allem Sie als Lehrkraft in Ihrem täglichen Bemühen um einen solchen Unterricht unterstützen.

Die Handreichung wendet sich daher nicht ausschließlich an diejenigen unter Ihnen, die im März 2009 mit ihren Klassen diese Arbeiten (als „Lernstandserhebung“, „Kompetenztest“ o. ä.) geschrieben haben, sondern an alle interessierten Kolleginnen und Kollegen. Auch Eltern sowie Schülerinnen und Schüler oder an Unterrichtsqualität interessierte Dritte finden hierin möglicherweise nützliche Anregungen. Denn es kommt Ihnen als Lehrkraft im Unterricht zwar eine zentrale Rolle bei der Umsetzung der Bildungsstandards zu, doch ohne entsprechende Rahmensetzungen durch Schulpolitik und Schulverwaltung wie auch ohne eine breite Unterstützung durch Eltern, Schüler und Bevölkerung ist eine solche Aufgabe nicht zu bewältigen.

Aus diesem Grund werden in dieser Handreichung zunächst fachübergreifend Ziele, Möglichkeiten, Konstruktion und Abläufe von VERA erläutert.<sup>1</sup> In einem folgenden fachbezogenen Teil werden das fachspezifische Kompetenzmodell und Charakteristika eines kompetenzorientierten Unterrichts erläutert. In einem dritten Teil werden die im VERA-8-Durchgang 2009, Testheft I eingesetzten Aufgaben mitsamt ihren jeweiligen Lösungen und didaktischen Kommentierungen wiedergegeben. Ein abschließender vierter Teil widmet sich exemplarisch der Kompetenzentwicklung im Unterricht. Die Handreichung enthält somit keine Ergebnisse aus der eigentlichen Testdurchführung im März 2009; diese liegen ausschließlich den Ländern bzw. deren Behörden und Schulen vor.

Sie können diese Handreichung für Ihre persönlichen (Unterrichts-) Zwecke in gewohnter Weise vervielfältigen und weitergeben. Die Aufgaben enthalten teilweise urheberrechtlich geschütztes Material (Fotografien, Grafiken, Texte etc.). Das IQB hat für die Länder bzw. deren Behörden, Schulen, Lehrkräfte, Schüler und Eltern für April 2009 bis März 2010 die

---

<sup>1</sup> Weitere grundsätzliche Informationen zu VERA finden sich auch unter <http://www.iqb.hu-berlin.de/vera>; dort auch Links zu den Informationsangeboten der Länder.

nicht-kommerziellen, räumlich und medial unbeschränkten Nutzungsrechte erworben.<sup>2</sup> Ab April 2010 dürfen die Aufgaben der Testhefte 2009 nicht mehr für den allgemeinen Gebrauch vervielfältigt oder elektronisch verteilt werden.<sup>3</sup>

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg und auch viel Spaß im Unterricht mit unserer „Handreichung Vergleichsarbeiten VERA-8 (2009)“

Ihr

Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

---

<sup>2</sup> Trotz intensiver Bemühungen war es leider nicht für alle Materialquellen möglich, die Rechteinhaber ausfindig zu machen und zu kontaktieren, um erforderliche Veröffentlichungsrechte einzuholen. Wir bitten um Verständnis und bitten die Rechteinhaber sowie die Verlage, deren Rechte berührt sind, sich ggf. mit uns in Verbindung zu setzen. In einigen Fällen haben Rechteinhaber und Verlage nicht auf unsere Kontaktbemühungen reagiert. Auch in diesen Fällen bitten wir freundlich darum, sich mit uns in Verbindung zu setzen.

<sup>3</sup> Eine kommerzielle Verwendung der Aufgaben – etwa im Rahmen von Verlagspublikationen – muss bei den Rechteinhabern gesondert vereinbart werden. Kontakt über das IQB.

1. Fächerübergreifende Erläuterungen.....	5
2. Fachallgemeine Erläuterungen.....	9
3. Testaufgaben „Vergleichsarbeiten Mathematik 8. Klasse“ .....	15
Aufgabe 1: LKW-Ladung.....	16
Aufgabe 2: Katzenfutter .....	17
Aufgabe 3: Mittag.....	19
Aufgabe 4: Sonderangebot.....	22
Aufgabe 5: Quersumme .....	24
Aufgabe 6: Quiz.....	26
Aufgabe 7: Internetauktion.....	31
Aufgabe 8: Steckwürfelfiguren .....	34
Aufgabe 9: Gummibären .....	36
Aufgabe 10: Unfallstatistik .....	39
Aufgabe 11: Kleinanzeigen.....	46
Aufgabe 12: Fahrrad.....	50
Aufgabe 13: Kanutour.....	53
Aufgabe 14: Mitschüler.....	56
Aufgabe 15: Streichholzmuster.....	60
Aufgabe 16: Körpervolumen.....	63
Aufgabe 17: Moderne Fassade.....	65
Aufgabe 18: Innenwinkel.....	70
Aufgabe 19: Winkel und Kreise.....	72
4. Kompetenzentwicklung im Mathematik-Unterricht: Modellieren .....	75
5. Literaturverzeichnis .....	87

# 1. Fächerübergreifende Erläuterungen

## *VERA-8 – Vergleichsarbeiten in 8. Klassen*

(auch "Lernstandserhebung", "Kompetenztest", o.ä.)

Anfang März 2009 wurden in den meisten 8. Klassen der allgemein bildenden Schulen in Deutschland parallel Arbeiten in Mathematik, Deutsch und/oder Erster Fremdsprache (Englisch / Französisch) geschrieben. Dieses Vorhaben – übergreifend „VERA-8“ genannt – geht auf einen Beschluss der Kultusministerkonferenz zurück<sup>4</sup>, schließt an ähnliche Erhebungen einzelner Bundesländer in den Vorjahren an und soll fortan jährlich durchgeführt werden.

Zuständig sind jeweils die Länder. Sie organisieren den Ablauf wie auch die Auswertung in je eigener Verantwortung und haben dabei teilweise unterschiedliche Regelungen getroffen: So werden zum einen die Arbeiten teilweise nicht in allen Fächern verpflichtend geschrieben; zum anderen unterscheidet sich die Form der Ergebnismeldung und -berücksichtigung. Auch die Bezeichnung für VERA variiert - so z. B. als „Kompetenztest“ oder „Lernstandserhebung“.

Es gibt jedoch Rahmendaten, Materialien und Abläufe, die für alle Länder weitgehend gleich sind. Hier sind vorrangig die Testhefte und Ergänzungsmaterialien für die VERA-8-Arbeiten zu nennen, die die Länder zentral über das Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) der Humboldt-Universität zu Berlin entwickeln lassen.

Die Testdurchführung und meist auch die erste Auswertung liegen bei den Lehrkräften; spezielle Testleiter kommen nicht zum Einsatz. Im Unterschied zu den Schulleistungsuntersuchungen „PISA“, „IGLU“ oder „TIMSS“ ist VERA *kein* Stichprobengestütztes „*System Monitoring*“, mit dem die Entwicklung der Leistungsfähigkeit von Teilen des Bildungssystems überwacht wird. VERA ist vielmehr ein Instrument der Unterrichtsentwicklung, mit dem die Lehrkräfte an allen Schulen die Leistungsfähigkeit ihrer Schülerinnen und Schüler über den Bezugsrahmen ihrer Klasse und Schule sowie des konkreten Lehrplans hinaus beurteilen können.

Diese vor allem klassenbezogenen kompetenzorientierten Diagnosen stellen den Lehrkräften in Ergänzung ihrer unterrichtspraktisch-professionellen Erfahrungen Ansatzpunkte für den Unterricht bereit. Zudem soll das zentrale Einbeziehen der Lehrkräfte den Anstoß für eine fachdidaktische Diskussion und Kooperation in den Kollegien und Fachkonferenzen geben, die im idealen Fall die Form einer internen Evaluation und eines kontinuierlichen Optimierungsprozesses annehmen.

Die hierfür hilfreiche Auswertung der Tests (s. u.) und die Rückmeldung der Ergebnisse an Schulen und Lehrkräfte übernehmen die Länder, wie oftmals auch eine zentrale schriftliche Unterrichtung der Schülerinnen und Schüler bzw. deren Eltern.

### ***VERA-Testhefte und Bildungsstandards***

Für jedes der vier Fächer wurden jeweils drei Testhefte erstellt, die zwar jeweils einige Aufgaben gemeinsam haben, sich untereinander aber in ihrem Gesamt-Schwierigkeitsgrad unterscheiden: Das Heft A (oder „1“) ist als „leicht“, das Heft B (bzw. „2“) als „mittel“ und das Heft C (bzw. „3“) als „schwer“ eingestuft. Die unterschiedliche Gesamtschwierigkeit der Hefte kommt durch die jeweilige Zusammenstellung aus unterschiedlich schweren Aufgaben zustande. In allen Heften sind jedoch sowohl einfache als auch mittlere und schwierige Aufgaben zu finden, so dass individuelle Leistungsunterschiede auch innerhalb von Klassen

---

<sup>4</sup> [http://www.kmk.org/schul/Bildungsmonitoring\\_Brosch%FCre\\_Endf.pdf](http://www.kmk.org/schul/Bildungsmonitoring_Brosch%FCre_Endf.pdf)

angemessen berücksichtigt werden. Die Testhefte wurden jeweils für einen 2 x 40-minütigen Testdurchgang entwickelt.

Die Kompetenz-Orientierung des Tests ergibt sich durch die Entwicklung der einzelnen Testaufgaben auf Basis der länderübergreifenden Bildungsstandards, die von den Kultusministern als Zielvorgabe für Schülerleistungen und als Grundlage von Lehrplanentwicklung und Lehrerfortbildung ab dem Schuljahr 2004/2005 verbindlich eingeführt worden sind.

Bildungsstandards sind bekanntlich fachdidaktisch begründete und auf mittlerem Abstraktionsgrad formulierte Leistungserwartungen an die Schülerinnen und Schüler. Sie nehmen damit eine Mittelstellung zwischen sehr allgemeinen Bildungszielen einerseits und konkreten Aufgabenstellungen andererseits ein und setzen diese untereinander in Bezug. Sie sind dadurch sowohl zukunfts- und verwendungsoffen als auch gesellschaftlich konsensfähig. Die erwarteten Leistungen bestehen im Nachweis des Könnens seitens der Schülerinnen und Schüler, fachbezogene Problemaufgaben zu lösen.<sup>5</sup>

Bildungsstandards bestehen dreidimensional aus einer generalisierten inhaltsbezogenen Komponente („Leitidee“, „Basiskonzept“), die am ehesten den Inhalten traditioneller Lehrpläne entspricht, einer prozessual-formalen Komponente (allgemeine fachbezogene Kompetenzen) und einer eher kognitiven Komponente (Anforderungsbereiche, z. B. Anwendung / Übertragung / Kritik). Sie fokussieren auf den Kernbereich des jeweiligen Faches und zielen kumulatives, d.h. systematisch vernetztes Lernen an. Ihre Schwerpunkte legen sie stärker auf die prozessbezogenen und weniger auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen. Wie dies im Einzelnen aussieht, wird in Teil II dieser Handreichung fachbezogen ausgeführt.

Die Bildungsstandards im Fachbereich Mathematik sind aufgrund eines Beschlusses der Kultusministerkonferenz seit dem Schuljahr 2004/2005 bzw. 2005/2006 verbindliche Zielvorgaben für die Lehrplanentwicklung und die Lehrerbildung. Sie differenzieren nach angestrebtem Schulabschluss (HSA / MSA). Sie werden vom IQB in konkrete Testaufgaben umgesetzt („operationalisiert“).

Entscheidend für das Konzept der Bildungsstandards ist damit *erstens*, dass diese zwar auf eine (kumulativ zu erweiternde) Basis des theoretischen Fachwissens aufbauen, aber – aufgrund ihres Fokus auf der Lösung von fachlichen Problemen – v. a. dem tatsächlichen Handeln (-Können) und dem reflexiv-kritischen Bewerten (-Können) den entscheidenden Stellenwert einräumen, angestrebt über einen langfristigen Kompetenzaufbau.

Entscheidend für das Konzept der Bildungsstandards ist *zweitens*, dass diese *Output*-orientiert sind, also Zielformulierungen enthalten und lediglich Hinweise für die Lehrkräfte geben, wie diese erreicht werden können. Jede Schule bzw. Fachkonferenz soll in Form eines Schul-Curriculums einen eigenen, den jeweiligen Schülern angepassten, fördernden und differenzierenden Weg zu diesem Ziel finden.

Die den VERA-8-Arbeiten zugrundeliegenden Bildungsstandards beziehen sich auf die neunte bzw. die zehnte Klasse. Der relativ frühe Testzeitpunkt – vier Monate vor Ende der achten Klasse – ist mit Absicht gewählt, da auf diese Weise den Schülern und Lehrkräften genügend Zeit bleibt, dem Standort der Klasse im Hinblick auf den Haupt- bzw. Mittleren Schulabschluss Rechnung tragen und rechtzeitig Fördermaßnahmen einleiten zu können.

---

<sup>5</sup> Das Kompetenz-Konzept der Bildungsstandards unterscheidet sich dementsprechend von den sog. „Schlüsselkompetenzen“ (fachliche, methodische, soziale und personale Kompetenz) der berufspädagogischen Diskussion. Zum Konzept der Bildungsstandards s. die sog. Klieme-Expertise, zugänglich u. a. beim BMBF ([http://www.bmbf.de/pub/zur\\_entwicklung\\_nationaler\\_bildungsstandards.pdf](http://www.bmbf.de/pub/zur_entwicklung_nationaler_bildungsstandards.pdf)).

## **Der Aufbau der VERA-8-Testaufgaben**

Die Testaufgaben bestehen aus einer Anleitung, einem Text bzw. einer Abbildung (dem „Stimulus“) und aus teilweise mehreren Aufgabenstellungen (den „Items“). Die Items sollen möglichst unabhängig voneinander lösbar sein. Die Lösung kann in Form einer Ankreuzaufgabe, als Lücken- bzw. Kurzantwort oder mit ausführlicher Darlegung des Lösungswegs abgefordert werden.

Die in den VERA-Testheften eingesetzten Aufgaben wurden von erfahrenen Lehrkräften aus allen Schulformen und allen Bundesländern entwickelt und erprobt, von mit den Bildungsstandards vertrauten Wissenschaftlern aus den jeweiligen Fachdidaktiken bewertet und überarbeitet sowie schließlich ein Jahr vor ihrem Einsatz an einer Stichprobe von ca. 3.000 Schülern erprobt und normiert.

Dieser aufwändige, statistisch ausgewertete Vortest soll zum einen sicherstellen, dass die auf ihre fachdidaktische Güte überprüften Aufgaben fair (also z. B. geschlechterneutral, Minderheiten nicht benachteiligend etc.) und „trennscharf“ sind (d.h., dass schwierigere Aufgaben eher von stärkeren Schülern eher als von schwächeren gelöst werden). Zum anderen werden über diesen Vortest realistische „Schwierigkeitswerte“ gewonnen, die die Grundlage für die Zusammenstellung der Testhefte und die Ergebniswertung der Vergleichsarbeiten bilden.

Die statistischen Berechnungen, die die Aufgabeneignung prüfen und den Schwierigkeitswert ergeben, erfordern eine für manche Lehrkräfte ungewohnte Auswertung: Es wird nur „richtig“ oder „falsch“ gewertet; eine Teilrichtigkeit ist ebenso wie eine Gewichtung mit unterschiedlich hohen Punktzahlen nicht vorgesehen, und es wird eine oft als eng empfundene zeitliche Taktung vorgegeben. Der Verzicht auf unterschiedliche Punktzahlen liegt in der Berücksichtigung der empirisch ermittelten Schwierigkeit begründet (s.o.). Bezüglich des „Alles-oder-Nichts-Prinzips“ der Wertung der einzelnen Items sei darauf verwiesen, dass dieses zum einen durch die Kleinteiligkeit der Teilaufgaben und zum anderen durch deren Anordnung nach Schwierigkeit kompensiert wird (zu Beginn des Testheftes stehen tendenziell die eher leichten, zum Schluss die eher schwierigen Aufgaben). Auch erlaubt dieses Prinzip eine zeitökonomische Korrektur.

Bei den in VERA verwendeten Aufgaben ist schließlich zu beachten, dass es sich um *Testaufgaben* handelt; sie sollen für Überprüfungs-zwecke einzelne Aspekte der Bildungsstandards möglichst trennscharf, isoliert und kleinschrittig *abprüfen*. Für den Kompetenzerwerb im Hinblick auf die umfassenden Bildungsstandards sind spezifische *Lernaufgaben* jedoch grundsätzlich besser geeignet. Durch die hiermit vorliegende Handreichung soll es aber möglich werden, auch die Testaufgaben kompetenzfördernd und lernwirksam im Unterricht einzusetzen.

## **Testauswertung und Ergebnisinterpretation**

Eine einfache Form der Ergebnisrückmeldung ist die Angabe, wie viel Prozent der Schülerinnen und Schüler eine (Teil-) Aufgabe korrekt gelöst haben (Lösungshäufigkeit). Wenn die Lehrkräfte hierzu Vergleichswerte erhalten (z. B. Ergebnisse anderer Schulen des gleichen Typs), ist ihnen eine näherungsweise Einschätzung ihrer Klassen oder von Schülergruppen möglich.

Da jedoch von den meisten Aufgaben die Schwierigkeitsgrade bekannt sind, kann durch eine statistische Berechnung auch ein Punktwert zurückgemeldet werden. Diese Werte (wie sie auch von PISA bekannt sind) werden inhaltlich illustriert durch Beschreibungen der Kompetenzniveaus, die den Stand der Schülerinnen und Schüler verallgemeinernd charakterisieren.

Das Testergebnis bezogen auf einzelne Schüler/-innen bedarf ergänzender diagnostischer Informationen, z. B. zum individuellen Lernfortschritt. Klassenergebnisse sind hingegen als zuverlässig und von hohem Wert zu betrachten. Um diesen Wert, der den Ausgangspunkt

für eine kompetenzorientierte Unterrichtsentwicklung bilden kann, nicht zu gefährden, sind verengende Vorbereitungsmaßnahmen („*teaching to the test*“) sowie unzulässige Hilfestellungen bei der Testdurchführung zu vermeiden.



## 2. Fachallgemeine Erläuterungen

### Kompetenzorientiertes Unterrichten von Mathematik

Zuerst werden die wesentlichen Komponenten der Bildungsstandards Mathematik sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt. Danach werden einige allgemeine Überlegungen skizziert, wie das Fach Mathematik so unterrichtet werden kann, dass gute Chancen auf die Erreichung der durch die Standards vorgegebenen Ziele bestehen.

#### 1. Die Bildungsstandards Mathematik

Wie – fächerübergreifend – in Abschnitt I ausgeführt worden ist, beschreiben Bildungsstandards die fachbezogenen *Kompetenzen*, die Schüler bis zu gewissen Zeitpunkten ihrer Schullaufbahn erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die nur in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen *Fachinhalten* erworben werden können. Illustriert und konkretisiert werden solche Kompetenzen durch *Aufgaben*, zu deren Lösung diese Kompetenzen benötigt werden. Das wesentliche Ziel von Bildungsstandards ist es, die *Qualität des Unterrichts* zu steigern (siehe II.3) und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schüler zu verbessern. Daneben sollen die Standards eine *Orientierung* über verbindliche Zielerwartungen bieten ebenso wie Möglichkeiten zur *Überprüfung*, inwieweit diese Ziele bis zu definierten Punkten in Bildungsgängen erreicht worden sind.

Konkret werden bei den Bildungsstandards *Mathematik* für den mittleren Schulabschluss drei „Dimensionen“ unterschieden, die man als „Prozess“- , „Inhalts“- und „Anspruchs“-Dimension bezeichnen kann:

- 1) Die „Prozess“-Dimension besteht aus den allgemeinen mathematischen *Kompetenzen*, deren Erwerb im Mittelpunkt des Unterrichts stehen soll; im Einzelnen sind dies<sup>6</sup>:
  - Mathematisch argumentieren (K1),
  - Probleme mathematisch lösen (K2),
  - Mathematisch modellieren (K3),
  - Mathematische Darstellungen verwenden (K4),
  - Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5),
  - Mathematisch kommunizieren (K6).

Diese Aufschlüsselung von „mathematischer Kompetenz“ in einzelne Kompetenzen soll eine gezielte Entwicklung dieser Fähigkeiten und Fertigkeiten ermöglichen. Dabei ist es weder möglich noch beabsichtigt, die einzelnen Kompetenzen scharf voneinander abzugrenzen. Vielmehr ist es geradezu typisch für mathematisches Arbeiten, dass mehrere Kompetenzen im Verbund benötigt werden und sich die verschiedenen Kompetenzen gegenseitig durchdringen. Parallel zum Erwerb von Kompetenzen sind im Unterricht auch mathematisches *Grundwissen* sowie *Grundvorstellungen* von mathematischen Begriffen und Methoden langfristig aufzubauen.

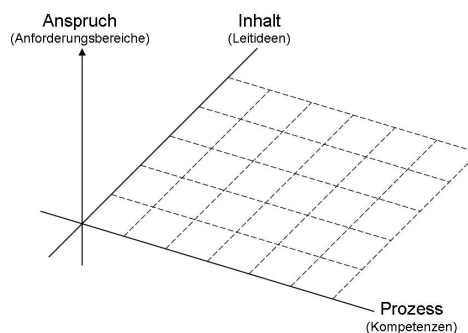


Abb. II.1: Kompetenzmodell

<sup>6</sup> Genauer werden die Kompetenzen im Buch „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ (Hrsg. W. Blum u.a., Cornelsen-Scriptor 2006) beschrieben.

2) Die „*Inhalts*“-Dimension wird bestimmt von den inhaltsbezogenen *Leitideen*, anhand derer die Kompetenzen erworben werden sollen; im Einzelnen sind dies:

- Leitidee Zahl (L1),
- Leitidee Messen (L2),
- Leitidee Raum und Form (L3),
- Leitidee funktionaler Zusammenhang (L4),
- Leitidee Daten und Zufall (L5).

Innerhalb dieser Leitideen gibt es konkrete Inhalte, die sogenannten *inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen*, die typischerweise zum mathematischen Schulcurriculum gehören und mit deren Hilfe die allgemeinen mathematischen Kompetenzen erworben werden sollen. Die – eher „phänomenologisch“ orientierten – Leitideen sind nicht identisch mit den klassischen *Stoffgebieten* der Schulmathematik (Zahlen und Größen, Geometrie, Algebra, Stochastik), es gibt aber offensichtliche enge Beziehungen zwischen Leitideen und Stoffgebieten. Die Strukturierung der Inhalte nach Leitideen soll stärker als bisher die *Verbindungen* zwischen den verschiedenen Stoffgebieten betonen (z.B. funktionale Beziehungen im geometrischen Kontext).

3) Die „*Anspruchs*“-Dimension ergibt sich aus den *Anforderungsbereichen*, die den *kognitiven Anspruch* kompetenzbezogener mathematischer Tätigkeiten – vor allem beim Bearbeiten von Aufgaben – auf theoretischer Ebene beschreiben sollen. Bei den Mathematik-Standards unterscheidet man pragmatisch drei solche Anforderungsbereiche (d.h. Anspruchsniveaus), die kurz mit

- „Reproduzieren“ (AB I),
- „Zusammenhänge herstellen“ (AB II),
- „Verallgemeinern und reflektieren“ (AB III)

überschrieben sind. Natürlich sind die Übergänge zwischen diesen Bereichen fließend. Je nachdem, wie viele Kompetenzen auf welchen dieser Anspruchsniveaus gefordert sind, werden Aufgaben einem der drei Anforderungsbereiche zugeordnet<sup>7</sup>. Dieses *theoretische* Anspruchsniveau einer Aufgabe darf keinesfalls mit der *empirischen* Schwierigkeit der Aufgabe verwechselt werden (wobei kognitiv anspruchsvollere Aufgaben natürlich tendenziell auch schwieriger sind; mehr dazu im folgenden Abschnitt).

Bildungstheoretische Grundlage dieses dreidimensionalen „Kompetenzmodells“ ist der Allgemeinbildungsauftrag des Unterrichtsfachs Mathematik, wie er prägnant von Heinrich Winter beschrieben worden ist (Winter, 2003). Hierauf beziehen sich die von der KMK verabschiedeten Bildungsstandards Mathematik in ihrer Präambel ausdrücklich: Schüler sollen im Mathematikunterricht drei *Grunderfahrungen* kennenlernen, nämlich Mathematik

- als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt um uns in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen,
- als geistige Schöpfung und Welt eigener Art,
- als Hilfsmittel zum Erwerb fachbezogener und fachübergreifender Fähigkeiten.

Selbstverständlich kann und soll Bildung nicht auf fachbezogene kognitive Leistungen eingeschränkt werden; vielmehr schließt eine umfassende schulische Bildung u.a. auch soziale Kompetenzen sowie motivationale und emotionale Faktoren mit ein. Dies wird in Abschnitt IV exemplarisch deutlich, wenn es um die Förderung von Modellierungskompetenz geht.

## 2. Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die im vorangegangenen Abschnitt dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik ist *theoretischer* Natur. Interessant ist nun natürlich zu wissen, wie schwierig einzelne Aufgaben tatsächlich sind und was Schüler verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge in Bezug auf diese Aufgaben tatsächlich „können“; hierfür

---

<sup>7</sup> Siehe die Tabelle am Anfang des Abschnitts III.

braucht man *empirische* Daten. Damit kann man dann sowohl die Aufgaben – nach Schwierigkeit – als auch die Schüler – nach Leistungsfähigkeit – gewissen „Stufen“ zuordnen, was allen Beteiligten hilfreiche Orientierungen geben kann.

Wie bereits in Abschnitt I ausgeführt worden ist, ist der Vera-8-Test aus Aufgaben zusammengesetzt, die an einer repräsentativen Stichprobe von annähernd 3000 Achtklässlern getestet worden sind. Die Ergebnisse sind dann aus rein technischen Gründen mithilfe gängiger statistischer Verfahren auf eine Skala mit Mittelwert 500 und Standardabweichung 100 transformiert worden<sup>8</sup>. Jeder Aufgabe ist hierdurch also ein solcher Kennwert, der ein Maß für die relative *Schwierigkeit der Aufgaben* ist, zugeordnet. Leichte Aufgaben haben somit auf dieser Skala Kennwerte von 400 und darunter, schwierige Aufgaben Kennwerte von 600 und darüber. Selbstverständlich stellt das, was als „leicht“ oder „schwer“ eingestuft wird, nur eine Momentaufnahme dar, die zu einem späteren Zeitpunkt – je nach unterrichtlichen Schwerpunktsetzungen – auch anders ausfallen kann.

Wie ebenfalls in Abschnitt I ausgeführt, kann man die mathematische *Kompetenz von Schülern* in direkte Beziehung zur Schwierigkeit von Aufgaben setzen und auf derselben Skala abbilden<sup>9</sup>. Auf diese Weise ist eine inhaltliche Beschreibung von bestimmten Intervallen auf dieser Skala, *Kompetenzstufen* genannt<sup>10</sup>, und damit auch eine Setzung von Standards aufgrund inhaltlicher Kriterien möglich. Sowohl für den Mittleren Schulabschluss als auch für den Hauptschulabschluss ist die Skala – jeweils abschlusspezifisch – in fünf solche Intervalle eingeteilt worden (Kompetenzstufen I bis V), wobei das erste nach unten und das letzte nach oben offen sind. Die folgende Abbildung zeigt die Stufen, wie sie für den mittleren Schulabschluss definiert worden sind; die „Perzentile“ geben dabei an, wie viel Prozent der Aufgaben bzw. der Schüler bei idealer Verteilung bis zu den entsprechenden Skalenwerten vorhanden sind.

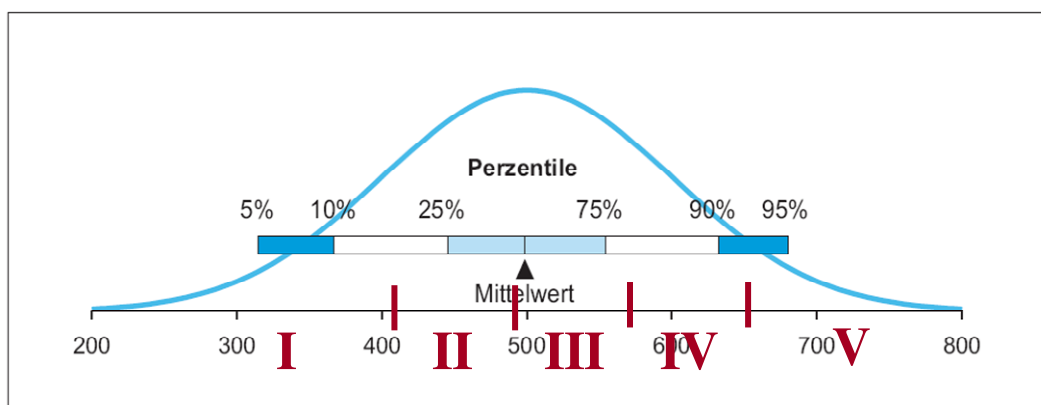



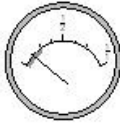
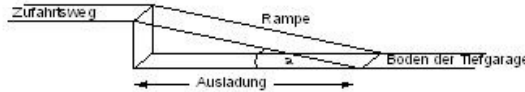

Abb. II.2: Zusammenhang der Perzentile und Kompetenzstufen

In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet worden (wieder für den mittleren Schulabschluss).

<sup>8</sup> Diese Transformation ist im Grunde willkürlich und wurde unter pragmatischen Gesichtspunkten gewählt (Anschlussfähigkeit an PISA).

<sup>9</sup> Genauer wurde die Skala der Bildungsstandards so normiert, dass ein Schüler mit einem bestimmten Personen-(Fähigkeits-)Kennwert eine Aufgabe mit demselben Aufgaben-(Schwierigkeits-)Kennwert mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa zwei Drittel lösen kann.

<sup>10</sup> Dieser Begriff könnte insofern missverständlich sein, als Stufen der mathematischen Kompetenz von Schülern gemeint sind, nicht Stufungen der einzelnen Kompetenzen. Man könnte vielleicht besser – bezogen auf die Aufgaben – von „Schwierigkeitsstufen“ sprechen. Genauere Erläuterungen und detaillierte Beschreibungen zu den Kompetenzstufen für den Mittleren Schulabschluss einschließlich vieler illustrierender Beispiele finden sich im Buch „Bildungsstandards: Kompetenzen überprüfen. Mathematik Sekundarstufe I“ (Hrsg. M. Katzenbach u.a., Cornelsen-Scriptor 2009, Kap. 3.4, S. 15ff).

V	690	<p><b>Zapfsäule 2:</b></p>  <p>Eine Tankstelle informiert mit dem Aufkleber „Je Euro 73 Cent Steuern“ über die Steuerbelastung beim Benzinpreis.</p> <p>Petra stellt fest: „Wenn der Staat überhaupt keine Steuern auf Benzin mehr erheben würde, würde der Benzinpreis auf etwa ein Viertel des jetzigen Preises sinken.“</p> <p>Erkläre, wie Petra zu dieser Aussage kommt.</p>
IV	620	<p><b>Tankanzeige:</b></p> <p>Der Tank des Autos von Herrn Müller fasst laut Hersteller maximal 55 Liter.</p> <p>An der Tankanzeige erkennt man den aktuellen Füllstand:</p>  <p>Die nächste Tankstelle ist 60 km entfernt. Kann Herr Müller bei einem durchschnittlichen Benzinverbrauch von 7,5 Liter pro 100 km noch bis zu dieser Tankstelle fahren?</p> <p>Begründe deine Antwort.</p>
III	570	<p><b>Tiefgarage 1:</b></p> <p>Die Rampe zu einer Tiefgarage hat eine Ausladung (siehe Bild) von 15 m. Der Boden der Tiefgarage liegt 2,90 m tiefer als der Zufahrtsweg.</p>  <p>Welche Länge hat die Rampe?</p> <p>Kreuze die Zahl an, die deiner Berechnung am nächsten kommt.</p> <p><input type="checkbox"/> 12, 10 m</p> <p><input type="checkbox"/> 14, 70 m</p> <p><input type="checkbox"/> 15, 30 m</p> <p><input type="checkbox"/> 17, 90 m</p>
II	490	<p><b>Zapfsäule 1:</b></p>  <p>Wie viel erhält der Staat bei der dargestellten Tankfüllung an Steuern?</p> <p>Kreuze die richtige Antwort an.</p> <p><input type="checkbox"/> 15, 80€</p> <p><input type="checkbox"/> 34, 47€</p> <p><input type="checkbox"/> 42, 71€</p> <p><input type="checkbox"/> 73, 00€</p> <p><input type="checkbox"/> 90, 45€</p> <p>Eine Tankstelle informiert mit dem Aufkleber „Je Euro 73 Cent Steuern“ über die Steuerbelastung beim Benzinpreis.</p>
I	410	<p><b>Blitz und Donner:</b></p> <p>Bei einem Gewitter kann man über die Zeit, die zwischen Blitz und Donner vergeht, die Entfernung des Gewitters berechnen. Bei einem Herbstgewitter liegen zwischen Blitz und Donner 6 Sekunden.</p> <p>Wie weit ist das Gewitter ungefähr entfernt, wenn der Schall pro Sekunde ca. 0,3 km zurücklegt?</p> <p>Kreuze die richtige Lösung an.</p> <p><input type="checkbox"/> 1,8 km</p> <p><input type="checkbox"/> 6,3 km</p> <p><input type="checkbox"/> 18 km</p> <p><input type="checkbox"/> 20 km</p>

Aus Platzgründen sind die Aufgaben in modifiziertem Layout dargestellt.

Abb. II.3: Kompetenzstufen mit Beispielaufgaben

Als Ausgangswert für diese Stufen-Einteilungen wurde jeweils das obere Ende von Kompetenzstufe I gewählt und zwar so, dass alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts nur solche Anforderungen stellen, deren einigermaßen sichere

Erfüllung von *allen* Schülern des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss; man spricht hier vom *Mindeststandard* des Bildungsgangs. Schüler, die diesen Mindeststandard nicht erfüllen, haben ganz besonderen *Förderbedarf*.

Der *Regelstandard*, den die Schüler des betreffenden Bildungsgangs zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Wer den Regelstandard für den mittleren Schulabschluss erfüllt, soll über „Sekundarstufe I-typische“ mathematische Kompetenzen verfügen. Hierzu gehört eine mathematische Grundbildung<sup>11</sup>, die u.a. elementare Begründungen, basale Begriffsbildungen und Standardmodellierungen einschließt und die einen Beitrag dazu leistet, dass Jugendliche in Alltag und Beruf als „mündiger Bürger“ handeln können. Der entsprechende Schwellenwert liegt etwa in der Mitte von Kompetenzstufe III. Für den Hauptschulabschluss sind die Anforderungen geringer angesetzt; in jedem Fall soll mathematische Grundbildung hier das Arbeiten mit Standardmodellen sowie basale arithmetische und geometrische Begriffsbildungen mit einschließen.

### 3. Unterrichtsqualität

Aufgaben wie die im Vera-Test enthaltenen können nicht nur zur Feststellung von Leistungsständen, sondern auch zur unterrichtlichen *Förderung* von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben *per se* bei den Schülern zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Schülerfähigkeiten angepasste *Auswahl* von Aufgaben und deren adäquate *Behandlung* im Unterricht. Die Lernenden müssen – so sagen alle empirischen Untersuchungen – ausreichend viele Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) *selbst* zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren u. v. a. m. Die Ergebnisse von nationalen und internationalen Leistungsvergleichen weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schüler im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht“ achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Schüler und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus. Einige diesbezügliche Anregungen sind in Abschnitt IV zu finden; viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind enthalten z.B. in Bruder/Leuders/Büchler (2008), in Leuders XX oder in Blum u.a. (2007).

Die eben stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „*Unterrichtsqualität*“ im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden<sup>12</sup>:

- Eine *fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung*, die Schülern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren, usw.) und bei der auch immer vielfältige Vernetzungen hergestellt werden sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität.
- Eine konsequente *kognitive Aktivierung* der Lernenden, wo der Unterricht geistige Schülertätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.
- Eine *effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung*, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine

---

<sup>11</sup> Zu diesem Begriff vergleiche man auch die Ausführungen in Klieme/Neubrand/Lüdtke (2001).

<sup>12</sup> Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum u. a. (2007).

störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird, Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind, u. a. m.

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind (vgl. u. a. Helmke, 2003, Baumert u.a., 2004). Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums *kompetenzorientierter Aufgaben*, darunter auch „selbstdifferenzierende“ (d.h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schüler gleichermaßen geeignet sind). Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, indem sie Schülern ermöglichen, entsprechend ihren Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schülerlösungen präsentieren und diskutieren lassen. In Abschnitt IV geben wir etwas konkretere Hinweise, wie Kompetenzen (hier speziell: die Modellierungskompetenz) im Unterricht gefördert werden können.

### 3. Testaufgaben

## „Vergleichsarbeiten Mathematik 8. Klasse“

### Übersichtstabelle

Nr.	Name der Aufgabe	Item	Kompetenz						Leitidee					AB	
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	L1	L2	L3	L4	L5		
1	LKW-Ladung	M1400201_LKW-Ladung			x		x		x						I
2.1	Katzenfutter	M1400701_Katzenfutter			x		x	x	x						II
2.2	Katzenfutter	M1400702_Katzenfutter			x		x	x	x						II
3.1	Mittig	M1401301_Mittig		x			x		x						I
3.2	Mittig	M1401302_Mittig		x			x		x						II
4	Sonderangebot	M1403401_Sonderangebot	x		x		x	x	x						II
5	Quersumme	M1402601_Quersumme		x			x	x	x						II
6.1	Quiz	M1401601_Quiz		x			x		x						II
6.2	Quiz	M1401602_Quiz					x		x						I
6.3	Quiz	M1401603_Quiz	x				x		x						III
7.1	Internetauktion	M5401201_Internetauktion				x	x						x		I
7.2	Internetauktion	M5401202_Internetauktion			x	x	x		x						I
7.3	Internetauktion	M5401203_Internetauktion			x	x	x						x		II
8.1	Steckwürfelfiguren	M5400401_Steckwürfelfiguren			x			x					x		I
8.2	Steckwürfelfiguren	M5400403_Steckwürfelfiguren			x			x					x		I
9.1	Gummibären	M5401101_Gummibären			x		x	x					x		I
9.2	Gummibären	M5401102_Gummibären			x		x	x					x		II
9.3	Gummibären	M5401103_Gummibären	x		x		x	x					x		III
10.1	Unfallstatistik	M5401901_Unfallstatistik			x		x	x	x						I
10.2	Unfallstatistik	M5401902_Unfallstatistik			x		x	x	x						II
10.3	Unfallstatistik	M5401903_Unfallstatistik			x	x		x					x		II
10.4	Unfallstatistik	M5401904_Unfallstatistik	x		x		x	x					x		III
11.1	Kleinanzeigen	M4400301_Kleinanzeigen			x								x		I
11.2	Kleinanzeigen	M4400302_Kleinanzeigen			x		x						x		I
11.3	Kleinanzeigen	M4400303_Kleinanzeigen		x	x		x						x		I
11.4	Kleinanzeigen	M4400304_Kleinanzeigen			x		x						x		II
12	Fahrrad	M4402001_Fahrrad			x	x		x					x		II
13.1	Kanutour	M4402401_Kanutour			x		x	x					x		III
13.2	Kanutour	M4402402_Kanutour			x		x	x					x		II
14.1	Mitschüler	M4400501_Mitschüler		x	x		x						x		II
14.2	Mitschüler	M4400502_Mitschüler			x		x						x		II
14.3	Mitschüler	M4400503_Mitschüler	x	x	x		x	x					x		II
15.1	Streichholzmuster	M4402501_Streichholzmuster		x		x	x						x		I
15.2	Streichholzmuster	M4402502_Streichholzmuster		x		x	x						x		III
15.3	Streichholzmuster	M4402503_Streichholzmuster		x		x	x						x		III
16	Körpervolumen	M2402501_Körpervolumen				x	x			x					I
17.1	Moderne Fassade	M3401701_Moderne Fassade		x	x	x							x		I
17.2	Moderne Fassade	M3401702_Moderne Fassade		x	x	x	x	x					x		II
17.3	Moderne Fassade	M3401703_Moderne Fassade		x	x	x	x						x		II
17.4	Moderne Fassade	M3401704_Moderne Fassade		x	x	x	x						x		II
18	Innenwinkel	M2402801_Innenwinkel	x	x		x	x			x					III
19	Winkel und Kreise	M3402401_Winkel und Kreise	x	x		x	x	x					x		III

# Aufgabe 1: LKW-Ladung

## Aufgabentext

Herr Zuse besitzt einen Lastkraftwagen (LKW) mit einer erlaubten Nutzlast von 3,5 t.

M1400201a

Wie viele Kisten zu je 30 kg darf Herr Zuse höchstens auf seinen LKW laden?

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: I

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 1: LKW-Ladung</b>	
Item: M1400201	
RICHTIG	
	116 (Kisten)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe ist der Leitidee Zahl (L1) zuzuordnen, da es hier um Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen bzw. Größen sowie der Sache angemessenes Runden geht.

Zur Ermittlung der gesuchten Anzahl von Kisten ist zunächst ein einfaches und direkt erkennbares mathematisches Modell aufzustellen (K3). Anschließend sind die beiden Größen einheitengerecht durcheinander zu dividieren (K5), und das erhaltene Ergebnis muss im Kontext interpretiert werden.

Aufgrund der elementaren Operationen ist diese Aufgabe dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Die Division wird ohne vorherige Umrechnung der Einheiten durchgeführt (K5).
- Beim Umwandeln der gegebenen Größen oder beim Dividieren unterlaufen Fehler (K5).
- Das Ergebnis der Division  $3500 \text{ kg} : 30 \text{ kg} = 116,\bar{6}$  wird vor dem Hintergrund der Sachsituation falsch gerundet (Fehlösung 117), oder die Anzahl der Kisten wird mit Nachkommastellen angegeben (K3).



## Aufgabe 2: Katzenfutter

### Teilaufgabe 2.1: Katzenfutter

#### Aufgabentext

In einem Werbeprospekt für einen Supermarkt ist folgender Ausschnitt zu finden.



Berechne, wie viel eine Dose dieses Katzenfutters normalerweise kostet.

M1400701a

\_\_\_\_\_ €

#### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: II

#### Kodieranweisung

<b>Aufgabe 2.1: Katzenfutter</b>	
Item: M1400701	
RICHTIG	
	0,65 €
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 2.2: Katzenfutter

### Aufgabentext

Um wie viel Prozent wurde in dieser Aktion der Preis gesenkt?

M1400702a

Welche Zahl liegt dem Ergebnis am nächsten? Kreuze an.

25%

39%

53%

61%

63%

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: II

### Kodieranweisung

<b>Aufgabe 2.2: Katzenfutter</b>	
Item: M1400702	
RICHTIG	
<input type="checkbox"/>	2. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
<input type="checkbox"/>	alle anderen Antworten

### Aufgabenbezogener Kommentar

Beide Teilaufgaben gehören zur Leitidee Zahl (L1), da es bei Teilaufgabe 1 um elementare Rechenoperationen mit Größen geht und bei Teilaufgabe 2 um die sachgerechte Verwendung der Prozentrechnung.

Bevor in Teilaufgabe 1 der Preis einer einzelnen Dose Katzenfutter ermittelt werden kann, müssen die benötigten Größen (Anzahl der Dosen, Preise) aus der Abbildung entnommen werden (K6). Danach wird im Rahmen eines einfachen Modells (K3) technisch gearbeitet (K5). Dies geschieht unter der Annahme, dass jede der zehn Dosen gleich viel kostet.

Obwohl die einzelnen zur Lösung dieser Teilaufgabe erforderlichen Kompetenzen noch im Anforderungsbereich I angesiedelt sind, kann die Aufgabe als Ganzes aufgrund des Zusammenspiels mehrerer Kompetenzen sowie des mehrschrittigen Lösungsweges bereits dem Anforderungsbereich II zugeordnet werden.

Bei der Bearbeitung von Teilaufgabe 2 sind dieselben Kompetenzen anzuwenden. Die Ermittlung des Prozentsatzes erfordert jedoch die Kompetenz des technischen Arbeitens (K5) auf höherem Niveau, und so ist es naheliegend, diese Teilaufgabe in den Anforderungsbereich II einzuordnen.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:

- Die in der Abbildung angegebenen Preise werden als Preis einer einzelnen Dose gedeutet, z. B. 3,99€ oder 2,51€ oder die Summe daraus (Fehlösung 6,50€) (K3).
- Der Preis einer einzelnen Dose wird vom reduzierten Preis ausgehend ermittelt (Fehlösung 0,39€) (u.a. K6, K3).

Zu [02]:

- Ausgehend von der angegebenen Ersparnis von 2,51€ beim Kauf von 10 Dosen wird die Ersparnis pro Dose ermittelt und der Quotient fälschlich als Prozentsatz gedeutet (Fehlösung 25%). Alternativ könnte die Differenz von 1,48€ zum nicht reduzierten Preis der 10 Dosen ins Verhältnis gesetzt worden sein (Fehlösung 23%) (K3).
- Eine Verwechslung von „Reduzierung um ...%“ mit „Reduzierung auf ...%“ führt zu folgender Rechnung:  $3,99€ : 6,50€ \approx 0,61$  (Fehlösung 61%). Dieser Fehler ist in folgender Schülerlösung erkennbar, in der der Schüler den reduzierten Preis für 10 Dosen (3,99€) als Grundwert verwendet und sukzessive durch Probieren in 10%-Schritten ermittelt, welcher Prozentsatz am ehesten der angegebenen Ersparnis von 2,51€ entspricht (u.a. K6, K3).

**Teilaufgabe 2: Katzenfutter**

Um wie viel Prozent wurde in dieser Aktion der Preis gesenkt?

M1400702a

Kreuze die Zahl an, die deinem Ergebnis am nächsten liegt.

- 25 %   
  39 %   
  53 %   
  61 %   
  63 %

100% 3,99€	40% 1,596€
1% 0,0399€	50% 1,995€
10% 0,399€	60% 2,394€
20% 0,798€	70% 2,793€
30% 1,197€	80% 3,192€
	90% 3,591€

- Grund- und Prozentwert werden falsch verwendet:  $2,51€ : 3,99€ \approx 0,63$  oder  $6,50€ : 3,99€ \approx 1,63$  (Fehlösung 63%) (K3).

**Aufgabe 3: Mittig**

**Teilaufgabe 3.1: Mittig**

**Aufgabentext**

Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen 99 und 999?

M1401301a

Kreuze an.

- 449   
  450   
  500   
  549   
  550

**Aufgabenkennwerte**

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 2, 5
Anforderungsbereich: I

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 3.1: Mittig</b>	
Item: M1401301	
RICHTIG	
	4. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 3.2: Mittig

### Aufgabentext

Gib zwei andere Zahlen an, in deren Mitte genau dieselbe Zahl liegt wie bei Teilaufgabe 1.

M1401302a

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 2, 5
Anforderungsbereich: II

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 3.2: Mittig</b>	
Item: M1401302	
RICHTIG	
	Angabe von zwei Zahlen, deren arithmetisches Mittel 549 beträgt, z.B. 548 und 550  ODER: 547,5 und 550,5 (Anm.: Es müssen keine natürlichen Zahlen sein!)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Aufgabenbezogener Kommentar

Beide Fragestellungen dieser Aufgabe gehören zur Leitidee Zahl (L1), da bei ihrer Bearbeitung sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen genutzt werden. Um in Teilaufgabe 1 die Mitte der angegebenen Zahlen zu ermitteln, ist die Anwendung einer adäquaten Problemlösestrategie erforderlich (K2), bei der zusätzlich geometrische Grundvorstellungen vom arithmetischen Mittelwert aktiviert werden können. Die Schüler

können sich die Zahlen beispielsweise auf einem (gedachten) Zahlenstrahl vorstellen und davon ausgehend die Mitte der beiden Zahlen rechnerisch durch Bilden des arithmetischen Mittels bestimmen (K5). Alternativ dazu lässt sich diese Mitte durch systematisches Probieren und schrittweises Vorwärts- bzw. Rückwärtszählen, z. B. in Schritten der Länge 50, ermitteln. Die direkte Anwendbarkeit eines der beiden Verfahren legt eine Einordnung von Teilaufgabe 1 in den Anforderungsbereich I nahe.

In Teilaufgabe 2 sind dieselben Kompetenzen erforderlich, allerdings wird Problemlösen auf höherem Niveau realisiert, da das Konzept des arithmetischen Mittels rückwärts anzuwenden ist. Die gegebenen Zahlen sind systematisch so zu variieren, dass ihr arithmetisches Mittel jenem aus Teilaufgabe 1 entspricht. Zwei alternative Strategien sind denkbar. Entweder wird die kleinere Zahl um jenen Betrag vergrößert, um den die größere verkleinert wird, oder es wird umgekehrt vorgegangen.

Da hier die Verknüpfung mathematischer Kenntnisse erforderlich ist, erscheint eine Einordnung der zweiten Teilaufgabe in den Anforderungsbereich II gerechtfertigt.

### **Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:**

Zu [01]:

- (Fehllösung 449): Dieses Ergebnis entsteht, wenn die gegebenen Zahlen jeweils um 1 vergrößert („geglättet“) werden, um volle Hunderter zu erhalten. Nach einer Halbierung ihrer Differenz wird das Ergebnis um 1 vermindert, um den vorherigen Schritt „auszugleichen“. Auf diese Weise erhält man 449. Die zugehörige Rechnung lautet:  $[(999+1) - (99+1)] : 2 - 1 = 450 - 1 = 449$  (K2).
- (Fehllösung 450): Um dieses Ergebnis zu erhalten, wird die Differenz der gegebenen Zahlen ermittelt (900) und anschließend durch 2 dividiert. Da 99 nicht als Korrektur addiert wird, ergibt sich das arithmetische Mittel von 900 und 0. Die zugehörige Rechnung lautet:  $(999-99) : 2 = 450$ . Diese Fehllösung ist besonders interessant, da eine vor allem bei großen Zahlen sinnvolle Vorgehensweise zwar begonnen, jedoch nicht korrekt zu Ende geführt wird (K2).
- (Fehllösung 500): Hier wird lediglich die größere „geglättete“ Zahl halbiert. Auf diese Weise ergibt sich 500 (K2).
- (Fehllösung 550): Analog zu der bei der Fehllösung 500 beschriebenen Vorgehensweise, werden beide gegebenen und jeweils um 1 vergrößerten („geglätteten“) Zahlen erst halbiert, danach werden ihre Hälften addiert, und es ergibt sich 550 (K2).

Zu [02]:

- (Fehllösungen des Typs  $99+x$  und  $999+x$ ): Die beiden als Lösung angegebenen Zahlen sind jeweils um denselben Betrag größer oder beide um denselben Betrag kleiner als die gegebenen Zahlen 99 und 999. Die kleinere Zahl ergibt sich aus der Rechnung  $99 + x$  und die größere aus  $999 + x$ , wobei stets  $x > 0$  oder stets  $x < 0$  ist. Diese Fehlvorstellung wird in den folgenden Schülerlösungen deutlich (Vergrößerung um 49, um 1 und um 1001). Schüler mit Fehllösungen dieser Art haben Defizite in der Grundvorstellung des Ausgleichs beim arithmetischen Mittel und „verschieben“ lediglich die gegebenen Zahlen jeweils um denselben Betrag (K2).

### **Teilaufgabe 2: Mittig**

Gib zwei andere Zahlen an, in deren Mitte genau dieselbe Zahl liegt wie bei Teilaufgabe 1.

M1401302a

148 und 1048

### Teilaufgabe 2: Mittig

Gib zwei andere Zahlen an, in deren Mitte genau dieselbe Zahl liegt wie bei Teilaufgabe 1.

M1401302a

1000 und 100  
2000 und 1100

### Aufgabe 4: Sonderangebot

#### Aufgabentext

Ein 200 g-Glas löslicher Kaffee kostet in einem Geschäft normalerweise 7,90 €.

M1403401a

#### Sonderangebot A:

Der Preis für das 200 g-Glas wird um 20% gesenkt.

#### Sonderangebot B:

Es wird ein Glas mit 20% mehr Inhalt zum gleichen Preis von 7,90 € angeboten.

Welches ist für einen Kunden das günstigere Angebot?

Begründe deine Antwort.

#### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 1, 3, 5, 6
Anforderungsbereich: II

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 4: Sonderangebot</b>	
Item: M1403401	
RICHTIG	
	<p>Richtige Antwort (Sonderangebot A) und eine angemessene Begründung! Die Begründung kann auf verschiedenen Ebenen (inhaltlich, rechnerisch) erfolgen!</p> <p>Z.B.:</p> <p>Das Sonderangebot A ist das günstigere, da bei diesem 10g nur 0,32 € (gerundet) kosten und beim Angebot B 0,33€ (gerundet) kosten.</p> <p>ODER:</p> <p>Bei Angebot A spart man 1,58€. Für diesen Betrag könnte man sich beim Angebot A 50g weiteren Kaffee kaufen. Bei Angebot B erhält man hingegen nur 40g Kaffee mehr! Daher ist das Angebot A das bessere.</p> <p>ODER:</p> <p>Beim Angebot 1 spart der Kunde 20% vom Preis. Möchte er sich für dieses ersparte Geld weiteren Kaffee kaufen, so bezahlt er auch für diesen Kaffee den um 20% ermäßigten Preis. Beim Angebot 2 dagegen erhält der Kunde lediglich 20% mehr Menge an Kaffee, wobei diese Menge vom Preis her quasi gleich bleibend ist, während er beim Angebot 1 für das ersparte Geld den Kaffee zu dem um 20% reduzierten Preis erhält. Also ist Angebot 1 das bessere!</p>
FALSCH	
	alle anderen Antworten

### Aufgabenbezogener Kommentar

Die Schüler wenden bei der Bearbeitung dieser Aufgabe Prozentrechnung sachgerecht an. Daher gehört diese Aufgabe zur Leitidee Zahl (L1).

Die gegebene Realsituation (Vergleich zweier Sonderangebote) ist zunächst in ein passendes mathematisches Modell zu übersetzen (K3), mithilfe dessen die aus den beiden Sonderangeboten A und B resultierenden neuen Preise des Kaffees rechnerisch ermittelt werden (K5). Bei der Rückübertragung der erhaltenen Ergebnisse (K3) müssen die Schüler mit Bezug zur Realsituation entscheiden und begründen (K1), welches der beiden Angebote für einen Kunden günstiger ist und die Antwort anschließend schriftlich darlegen (K6).

Vor allem die Anforderungen an die beiden Kompetenzen K3 und K5 sowie deren Verknüpfung begründen eine Einordnung dieser Aufgabe in den Anforderungsbereich II.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Fehlende Berücksichtigung der unterschiedlichen Grundwerte: Dieser Fehler wird in der folgenden Schülerlösung erkennbar, in der gefolgert wird, dass beide Sonderangebote gleich teuer sind (K3):

Begründe deine Antwort.

$$\begin{aligned} B) \quad 200\text{g} &\triangleq 80\% \\ 1\% &\triangleq 2,5\text{g} \\ 100\% &\triangleq 2,5\text{g} \cdot 100 = 250\text{g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 250\text{g} &\triangleq 790\text{ct} \\ 1\text{g} &\triangleq 3,16\text{ct} \\ 200\text{g} &\triangleq 200\text{g} \cdot 3,16\text{ct} = \\ &= 632\text{ct} = 6,32\text{€} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A) \quad \cancel{200\text{g}} &\triangleq \cancel{100\%} & 790\text{ct} &\triangleq 100\% \\ \cancel{1\%} &\triangleq \cancel{2\text{g}} & 1\% &\triangleq 7,9\text{ct} \\ \cancel{80\%} &\triangleq \cancel{16} & 80\% &= 632\text{ct} = 6,32\text{€} \end{aligned}$$

A: Beide sind gleich teuer

- Eine Fehleinschätzung (ohne Rechnung) liegt vor, dass 20% Zunahme und 20% Abnahme sich ausgleichen. Auch hierbei werden faktisch die jeweiligen Grundwerte außer Acht gelassen (K3).
- Die unterschiedlichen Grundwerte werden erkannt, aber es treten Rechenfehler auf (K5).
- Obwohl richtig gerechnet wird, wird keine Antwort formuliert (K6).

## Aufgabe 5: Quersumme

### Aufgabentext

Die Quersumme einer zweiziffrigen Zahl ist 9. Vertauscht man die Ziffern, so ist die Differenz der neu gebildeten und der ursprünglichen Zahl gleich 45.

M1402601a

Bestimme die Zahl. Schreibe auf, wie du vorgehst.

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 2, 5, 6
Anforderungsbereich: II



## Kodieranweisung

Aufgabe 5: Quersumme	
Item: M1402601	
RICHTIG	
	<p>Richtige Zahl (27) und nachvollziehbare Darstellung der Vorgehensweise.</p> <p>Z.B.:</p> <p>1.) Ziffern der zweiziffrigen Zahl mit Quersumme 9:</p> <p style="padding-left: 40px;">1 und 8 2 und 7 3 und 6 4 und 5</p> <p>2.) Differenz bilden → gleich 45:</p> <p style="padding-left: 40px;"><math>81 - 18 = 63</math> <math>72 - 27 = 45</math> <math>63 - 36 = 27</math> <math>54 - 45 = 9</math></p> <p>→ die gesuchte Zahl ist 27</p> <p>ODER:</p> <p><math>z_1</math>=Erste Ziffer der gesuchten Zahl, <math>z_2</math>=Zweite Ziffer der gesuchten Zahl</p> <p>Es gilt: <math display="block">\left. \begin{array}{l} z_1 + z_2 = 9 \\ 10z_2 + z_1 - (10z_1 + z_2) = 45 \end{array} \right\} \Leftrightarrow z_1 = 2; \quad z_2 = 7</math></p> <p>=&gt; die gesuchte Zahl ist 27</p> <p>ODER:</p> <p>Die Zahl lautet 27, dass habe ich durch systematisches Probieren herausgefunden.</p>
FALSCH	
	alle anderen Antworten

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe erfordert einen verständigen Umgang mit Zahlen und gehört der Leitidee Zahl (L1) an.

Während der Bearbeitung müssen die Schüler sowohl sinnentnehmend lesen, als auch ihre Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse verständlich darstellen und somit beide Richtungen des Kommunizierens anwenden (K6). Zuerst ist die in der Aufgabenstellung enthaltene Fachsprache (Quersumme, zweiziffrige Zahl, Differenz) zu dekodieren, bevor dann technisch und formal gearbeitet werden kann (K5). Dabei können verschiedene Strategien (z.B.: systematisches Probieren oder Aufstellen und Verarbeiten von Termen) angewendet werden (K2). Beim Lösen dieser Aufgabe durch systematisches Probieren wird zunächst überlegt, welche zweiziffrigen Zahlen die Quersumme 9 haben. Werden alle diese acht Zahlen notiert, ist anschließend lediglich zu prüfen, welches Zahlenpaar bei Vertauschung seiner Ziffern die Differenz 45 hat. Unabhängig von der gewählten Vorgehensweise zur Ermittlung des Ergebnisses legen die Schüler diese abschließend schriftlich (in Worten oder als Rechnung) dar (K6).

Diese Aufgabe erfordert das Herstellen von Zusammenhängen und ist insbesondere aufgrund ihrer Problemlöseanforderungen dem Anforderungsbereich II zuzuordnen.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Das Nichtverstehen von Fachbegriffen (z.B. „Quersumme“) führt dazu, dass die Aufgabe nicht bearbeitet werden kann (K6).

- Die Terme bzw. Gleichungen werden falsch aufgestellt. Mehrere erwartbare Schwierigkeiten und Fehler, die die Struktur der aufzustellenden Terme betreffen, werden exemplarisch in der nachfolgenden Schülerlösung deutlich. Hier unterläuft beim Auflösen der zweiten Klammer (Minusklammer) der typische Fehler, dass der zweite Summand in der Klammer nicht subtrahiert, sondern addiert wird. Die folgerichtigen Rechnungen führen dann zu Dezimalbrüchen als Lösung (K5).

$$\begin{array}{l} (x \cdot 10 + y) \quad x + y = 9 \\ \left| \begin{array}{l} (x \cdot 10 + y) - (y \cdot 10 + x) = 45 \quad | \text{TU} \\ x + y = 9 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} 10x + y - 10y + x = 45 \quad | \text{TU} \\ x + y = 9 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} 11x - 9y = 45 \quad | \\ x + y = 9 \quad | \cdot 9 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} 11x - 9y = 45 \quad | + \\ 9x + 9y = 9 \quad | + \\ \hline 20x \quad = 54 \quad | : 20 \\ x \quad = 2,7 \end{array} \right. \\ \begin{array}{l} 2,7 + x = 9 \quad | - 2,7 \\ y = 6,3 \\ x = 2,7 \\ y = 6,3 \end{array} \end{array}$$

- Defizite beim Entnehmen von Informationen aus der Aufgabenstellung liegen vor. Beispielsweise werden die Begriffe Differenz und Quersumme vertauscht. Statt zweier Zahlen mit der Differenz 45 werden die Zahlen 45 und 54 angegeben, die jeweils die Quersumme 9 und zudem die Differenz 9 haben (u.a. K6, K2).

## Aufgabe 6: Quiz

### Teilaufgabe 6.1: Quiz

#### Aufgabentext

Birgit nahm an einem Quiz teil, bei dem sie insgesamt 18 Fragen zu beantworten hatte. Für jede richtige Antwort erhielt sie einen Pluspunkt, für jede falsche Antwort einen Minuspunkt. Am Ende des Quiz hatte sie acht Pluspunkte.

M1401601a

Wie viele Fragen hatte Birgit insgesamt richtig beantwortet?

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 2, 5
Anforderungsbereich: II

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 6.1: Quiz</b>	
Item: M1401601	
RICHTIG	
	13 Fragen
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 6.2: Quiz

### Aufgabentext

Roland hatte bei diesem Quiz sieben Fragen richtig beantwortet.

M1401602a

Wie viele Punkte hat er insgesamt?

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 5
Anforderungsbereich: I

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 6.2: Quiz</b>	
Item: M1401602	
RICHTIG	
	-4 Punkte
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 6.3: Quiz

### Aufgabentext

Ist es möglich, bei diesem Quiz insgesamt neun Pluspunkte zu erhalten?

M1401603a

Begründe deine Antwort.

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 1, 5
Anforderungsbereich: III

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 6.3: Quiz</b>	
Item: M1401603	
<b>RICHTIG</b>	
	<p>Richtige Antwort (Nein) mit angemessener Begründung..</p> <p>Z.B.: Für eine richtige Antwort erhält man einen Punkt, für eine falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Der Unterschied zwischen diesen beiden Möglichkeiten beträgt immer 2, so dass am Ende nie eine ungerade Zahl (z.B. 9) herauskommen kann.</p> <p>ODER: r := Anzahl richtiger Antworten f := Anzahl falscher Antworten</p> $\begin{array}{rcl} r + f = 18 & & 2f = 9 \\ r - f = 9 & & f = 9/2 = 4,5 \end{array}$ <p>Widerspruch, 4,5 falsche Antworten können nicht gegeben werden</p> <p>ODER: r + f = 18 r - f = 9</p> $\begin{array}{rcl} 2r = 27 \\ r = 13,5 \end{array}$ <p>Es wären 13,5 richtige Antworten nötig.</p> <p>ODER: Herleitung durch Ausprobieren: 10 Punkte = 14 richtige + 4 falsche 8 Punkte = 13 richtige + 5 falsche</p> <p>9 Punkte sind also nicht möglich.</p>
<b>FALSCH</b>	
	<p>Alle falschen Antworten und alle richtigen Antworten mit unvollständiger, fehlerhafter oder falscher Begründung.</p> <p>Z.B.: Wenn Bezug zu den 18 Fragen fehlt.</p> <p>„Nein, dazu müsste man halbe Punkte geben.“</p> <p>ODER: „Nein, da nur gerade Zahlen herauskommen können.“</p>

## Aufgabenbezogener Kommentar

Bei der Bearbeitung aller Teilaufgaben sind kombinatorische Überlegungen anzustellen, um die verschiedenen möglichen Anzahlen der im Quiz erreichbaren Plus- und Minuspunkte miteinander in Beziehung zu setzen. Daher ist diese Aufgabe der Leitidee Zahl (L1) zuzuordnen.

Bei Teilaufgabe 1 muss eine einfache, aber nicht unmittelbar ersichtliche Strategie gefunden werden (K2), um die Anzahl an richtig beantworteten Fragen zu ermitteln. Dabei kann

systematisch probiert oder mit einer Gleichung gearbeitet werden. Die durchzuführenden Rechenoperationen sind einfach (K5). Insbesondere wegen der Anforderungen an die Kompetenz Problemlösen und der Notwendigkeit Zusammenhänge herzustellen, wird Teilaufgabe 1 dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

Bei Teilaufgabe 2 ist lediglich die Anzahl der falsch beantworteten Fragen von der Anzahl der richtig beantworteten zu subtrahieren (K5). Da alle Kompetenzen nur auf einfachem Niveau angewendet werden und das anzuwendende Verfahren direkt erkennbar ist, wird diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich I zugewiesen.

Bei Teilaufgabe 3 muss zunächst überlegt oder probiert werden, ob es in diesem Quiz eine Differenz aus der jeweiligen Anzahl richtiger und falscher Antworten gibt, die einen Endstand von neun Pluspunkten zulässt. Darauf aufbauend ist stichhaltig zu begründen (K1), dass sich die Anzahlen richtiger und falscher Antworten hier immer nur um gerade Punktzahlen unterscheiden können, da die Anzahl der gestellten Fragen gerade ist.

Die nachfolgend dargestellte Schülerlösung zeigt eine mögliche Argumentation. Ein Kandidat erhält 10 Pluspunkte, wenn er 14 richtige Antworten gibt. Eine Verringerung der Anzahl richtiger Antworten auf 13 resultiert in nur 8 Pluspunkten. Da keine andere Anzahl richtiger Antworten zwischen 14 und 13 möglich ist (vgl. Schülerlösung), kann 9 als mögliche Anzahl der Pluspunkte ausgeschlossen werden.

---

### Teilaufgabe 3: Quiz

Ist es möglich bei diesem Quiz neun Gewinnpunkte zu haben?

M1401603a

Begründe deine Antwort.

Nein.

Wenn man 14 richtige hat, hat man 10 P.

Wenn man 13 richtige hat, hat man 8 P.

Man könnte nur dann 9 P. erhalten, wenn man 13,5 richtige Antworten hätte.

Diese Teilaufgabe erfordert eine eigenständige und wertende Argumentation, so dass es plausibel erscheint, sie dem Anforderungsbereich III zuzuordnen.

Im Unterricht könnte die gegebene Spielsituation variiert werden, z. B. derart, dass nur Pluspunkte erworben werden können. Diese Spielvariante ist deutlich einfacher als die gegebene. Alternativ könnte die Punktzahl je Frage gestaffelt werden. Beide Spielvarianten lassen die Bearbeitung der Teilaufgaben 1 bis 3 zu und könnten durch weitere Fragen, z. B. die nach der maximal möglichen Punktsomme, erweitert werden.

Insbesondere in leistungsschwächeren Lerngruppen bietet es sich an, solche Quiz-Situationen konkret durchzuspielen und die Punktbilanzen zu protokollieren, um davon ausgehend die mathematischen Fragen zu beantworten.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]

- Es wird außer Acht gelassen, dass falsche Antworten zu Punktabzügen führen (Fehlösung 8).

Zu [02]

- Es wird nicht berücksichtigt, dass bei einer entsprechenden Anzahl falsch beantworteter Fragen auch negative Punktbilanzen eintreten können (Fehlösung Null).
- Wieder wird nicht beachtet, dass es auch Minuspunkte geben kann (Fehlösung 7).

Zu [03]

- Eine Begründung wird nicht angegeben, sondern es wird lediglich mit Nein geantwortet (K1).

## Aufgabe 7: Internetauktion

### Teilaufgabe 7.1: Internetauktion

#### Aufgabentext

Bei einer Internetauktion beobachtet Rolf die Preisentwicklung für Notebooks. Insgesamt werden neun Notebooks des gleichen Typs versteigert.

Rolf hat sich folgende Endpreise für die Notebooks aufgeschrieben:

Auktionsnummer	Endpreis
1	390 €
2	422 €
3	394 €
4	355 €
5	449 €
6	396 €
7	380 €
8	423 €
9	373 €

Wie groß ist der Preisunterschied zwischen dem teuersten und dem billigsten Notebook?

M5401201a

#### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 4, 5
Anforderungsbereich: I

#### Kodieranweisung

<b>Aufgabe 7.1: Internetauktion</b>	
Item: M5401201	
RICHTIG	
	94 € (Die Einheit muss angegeben werden! Die Angabe von Nachkommastellen ist akzeptabel.)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 7.2: Internetauktion

### Aufgabentext

Wie viel Prozent kostet das teuerste Notebook mehr als das billigste?

M5401202a

### Aufgabenkennwert

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: I

### Kodieranweisung

<b>Aufgabe 7.2: Internetauktion</b>	
Item: M5401202	
RICHTIG	
	Ca. 26% (akzeptiert wird auch 26, 48 % oder 26,5% oder ca. 25%)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 7.3: Internetauktion

### Aufgabentext

Gib den durchschnittlichen Preis der neun Notebooks an.

M5401203a

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: II



## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 7.3: Internetauktion</b>	
Item: M5401203	
RICHTIG	
	398 € (Die Einheit muss angegeben sein! Die Angabe von Nachkommastellen ist akzeptabel.)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese realitätsbezogene Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da die Schüler sich mit einer Statistik zur Preisentwicklung auseinandersetzen. Dabei sind mit der sachgerechten Anwendung der Prozentrechnung sowie der Durchführung elementarer Rechenoperationen ebenso auch inhaltsbezogene Kompetenzen der Leitidee Zahl (L1) von Bedeutung. Zunächst sind die zur Bearbeitung der einzelnen Teilaufgaben benötigten Informationen, d.h. die Daten der statistischen Erhebung, der Tabelle zu entnehmen (K4).

Bei Teilaufgabe 1 ist lediglich der Preisunterschied zwischen dem teuersten und dem billigsten Notebook (Spannweite) zu berechnen (K5). Um bei Teilaufgabe 2 diesen Preisunterschied in Prozent angeben zu können, ist zusätzlich eine Vorstellung zum Prozentbegriff erforderlich (K3). Die jeweils durchzuführende Rechenoperation ist einfach.

Vor diesem Hintergrund sind die Teilaufgaben 1 und 2 dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

Bei Teilaufgabe 3 werden Vorstellungen zum Mittelwert benötigt (K3). Die Rechenoperationen im Rahmen des gewählten Standardmodells sind mehrschrittig. Die Teilaufgabe 3 gehört somit dem Anforderungsbereich II an (K5).

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:

- Die Preise werden nicht nach der Größe geordnet, so dass zur Berechnung der Spannweite die falschen Preise verwendet werden (K5).

Zu [02]:

- Der Preisunterschied wird in € berechnet bzw. direkt in Prozent „umgewandelt“ (Fehllösungen: 94 € bzw. 94%, 9,4% oder 0,94%).
- Der Preis des billigeren Notebooks wird zum Preis des teuersten Notebooks ins Verhältnis gesetzt (Fehllösung: 79%) (K3).
- Als Grundwert wird der Preis des teuersten Notebooks verwendet und der Preisunterschied zum billigsten Notebook in Prozent berechnet (Fehllösung: 25%) (K3).

Zu [03]:

- Statt des arithmetischen Mittelwerts wird der Zentralwert angegeben (Fehllösung: 394 €) (K3).
- Das arithmetische Mittel der Preise des teuersten und des billigsten Notebooks wird berechnet (Fehllösung: 402 €) (K3).

## Aufgabe 8: Steckwürfelfiguren

### Teilaufgabe 8.1: Steckwürfelfiguren

#### Aufgabentext

Diese Figuren wurden jeweils aus vier kleinen Würfeln zusammengesteckt.



Sie werden gut gemischt in ein Säckchen gefüllt. Es wird anschließend ohne Hinzuschauen eine Figur aus dem Säckchen gezogen.

Gib an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die gezogene Figur einfarbig ist.

M5400401a

#### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 6
Anforderungsbereich: I

#### Kodieranweisung

<b>Aufgabe 8.1: Steckwürfelfiguren</b>	
Item: M5400401	
RICHTIG	
	$\frac{3}{10}$ (auch 0,3 oder 30% wird akzeptiert)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 8.2: Steckwürfelfiguren

### Aufgabentext

Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die gezogene Figur mindestens zwei helle Würfel?

M5400403a

Kreuze an.

$\frac{1}{10}$

$\frac{4}{10}$

$\frac{4}{7}$

$\frac{7}{10}$

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 6
Anforderungsbereich: I

### Kodieranweisung

<b>Aufgabe 8.2: Steckwürfelfiguren</b>	
Item: M5400403	
RICHTIG	
<input type="checkbox"/>	4. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
<input type="checkbox"/>	alle anderen Antworten

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese realitätsbezogene Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da hier Wahrscheinlichkeiten bei einem einfachen Zufallsexperiment bestimmt werden müssen. Dabei ist bei beiden Teilaufgaben der Umgang mit vertrauten und direkt erkennbaren Modellen (K3) ebenso erforderlich wie die gezielte Informationsentnahme aus dem gegebenen Foto (K6). Bei Teilaufgabe 2 muss zudem die Bedeutung des Worts „mindestens“ verstanden werden (K6). Da es sich bei beiden Teilaufgaben um den Umgang mit direkt erkennbaren Standardmodellen handelt, sind beide Teilaufgaben dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01, 02]:

- Falsches Abzählen kann zu Fehllösungen führen (K6).

Zu [01]:

- Der Begriff „einfarbig“ wird auf nur eine Farbe (schwarz oder weiß) reduziert (K6).
- Anstelle der Wahrscheinlichkeit wird fälschlicherweise das Verhältnis von „günstigen“ zu „ungünstigen“ Ergebnissen aufgestellt (Fehllösung 3/7) (K3).

Zu [02]:

- Fehllösung 1/10: „mindestens zwei helle“ wird fälschlich als „mindestens drei schwarze“ interpretiert (K6).
- Fehllösung 4/10: „mindestens zwei“ wird fälschlich als „genau zwei“ interpretiert (K6).

- Fehllösung 4/7: Anstelle der Wahrscheinlichkeit wird fälschlicherweise das Verhältnis von „genau zwei“ zu „mindestens zwei“ aufgestellt (K3).

## Aufgabe 9: Gummibären

### Teilaufgabe 9.1: Gummibären

#### Aufgabentext

Nach Herstellerangaben werden vor dem Abfüllen von Gummibärchen in Tüten die Bären folgendermaßen durchgemischt: Je ein Sechstel grüne, gelbe, weiße und orangefarbene Bären und ein Drittel rote Bären. Die Hälfte der roten Bären schmeckt nach Erdbeere, die andere Hälfte nach Himbeere.

Jan greift sich mit geschlossenen Augen ein Gummibärchen aus einer frisch geöffneten Tüte.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es Himbeergeschmack?

M5401101a

#### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: I

#### Kodieranweisung

<b>Aufgabe 9.1: Gummibären</b>	
Item: M5401101	
RICHTIG	
	1 - 6 ( akzeptiert wird auch $0,1\bar{6}$ ; 0,167; 0,1667; 16,7 % oder ungefähr 17%)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

### Teilaufgabe 9.2: Gummibären

#### Aufgabentext

Fünf Gummibärchen wiegen 10 g.

Kreuze an, mit wie vielen grünen Gummibärchen man in einer 1000 g-Dose etwa rechnen kann.

M5401102a

- 20     
  60     
  80     
  160     
  330

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: II

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 9.2: Gummibären</b>	
Item: M5401102	
RICHTIG	
<input type="checkbox"/>	3. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
<input type="checkbox"/>	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 9.3: Gummibären

### Aufgabentext

Luisa hat eine Minitüte bekommen, mit vier grünen, zwei roten, drei orangefarbenen, zwei weißen und einem gelben Gummibärchen. Sie sagt:  
„Daran sieht man, dass die Angaben des Herstellers über die Mischung der Farben gar nicht stimmen können.“

Erkläre, was Luisa damit meint, und beurteile ihre Aussage.

M5401103a

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: III

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 9.3: Gummibären</b>	
Item: M5401103	
<b>RICHTIG</b>	
	<p>Adäquate Erklärung inklusive einer Beurteilung der Aussage unter Berücksichtigung des Stichprobenumfangs (Begriff muss nicht genannt werden)!</p> <p>Z.B.:</p> <p>Luisa hat 12 Gummibärchen. 1/6 davon sind 2 Gummibärchen.            Wenn die Angaben des Herstellers genau zuträfen, müsste sie 2 grüne, 4 rote, 2 orangefarbene, 2 weiße und 2 gelbe haben. Luisa hat also vor allem zu viele grüne und zu wenig rote Bären.            Da der „Stichprobenumfang“ in der Minitüte aber sehr klein ist, muss man mit solchen Abweichungen von der Herstellerangabe rechnen.</p> <p>ODER:</p> <p>Das Verhältnis in der Gesamtmischung muss nicht mit dem Verhältnis in der Tüte übereinstimmen, weil die Auswahl zufällig ist.</p>
<b>FALSCH</b>	
	<p>alle unvollständigen, fehlerhaften oder falschen Antworten</p> <p>Z.B.</p> <p>Luisa hat zu viele grüne und zu wenig rote Gummibärchen!</p>

## Aufgabenbezogener Kommentar

Diese realitätsbezogene Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da es hier zum einen um das Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von Elementarereignissen (Teilaufgabe 1) und zum anderen um das verständnisorientierte Beschreiben und Beurteilen von Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen (Teilaufgaben 2 und 3) geht. Bei allen Teilaufgaben muss die beschriebene Situation verstanden werden (K6). Teilaufgabe 1 erfordert zudem die Berechnung des Anteils einer bestimmten Teilmenge, der anschließend in Form einer Wahrscheinlichkeit angegeben werden muss (K5). Dazu ist nur der Umgang mit einem vertrauten und direkt erkennbaren stochastischen Modell notwendig (K3), was eine Einordnung dieser Teilaufgabe in den Anforderungsbereich I nahelegt. Bei Teilaufgabe 2 steigt die Anforderung an das Modellieren (K3), da das mathematische Resultat ( $83 \frac{1}{3}$ ) im Gegensatz zu Teilaufgabe 1 nicht direkt in die Realität übertragen werden kann, sondern hier noch eine angemessene Rundung zu vollziehen ist (K5). Das vorliegende Multiplechoice-Format relativiert diese Anforderung jedoch etwas. Dennoch erscheint eine Einordnung dieser Teilaufgabe in Anforderungsbereich II sinnvoll. Bei Teilaufgabe 3 muss das gegebene stochastische Modell verständnisorientiert beurteilt (K3) und eine darauf aufbauende Argumentation selbständig entwickelt werden (K1). Im Wesentlichen geht es bei dieser Teilaufgabe darum zu erkennen, dass die Verteilung der Gummibären pro Päckchen zufällig erfolgt und Zufallsschwankungen bei einem geringen Stichprobenumfang wie bei der Minitüte (12 Gummibärchen) doch recht groß sein können, sodass die angegebene Verteilung der Minitüte damit als möglich zu erachten ist. Insbesondere aufgrund der geforderten Beurteilung ist diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich III zuzuordnen.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:

- Angabe der Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines roten Gummibärchens (Fehlösung  $\frac{1}{3}$ ) (K3, K6).

- Es wird ein falsches Modell für die Wahrscheinlichkeitsberechnung verwendet (z.B. Fehllösung 1/5) (K3).
- Die Wahrscheinlichkeit wird nicht konkret bestimmt, sondern auf irgendeine Weise mit Worten umschrieben.

Zu [02]:

- Fehllösung 20: Entsprechend der bekannten Ausweichstrategie bei Textaufgaben erfolgt eine rein vordergründige Verknüpfung der gegebenen Zahlen:  $1000 : (5 \cdot 10) = 20$ . (K3).
- Fehllösung 60: Aufgrund der Tatsache, dass  $\frac{1}{6}$  der Gummibärchen grün sind, wird auf 60 geschlossen (K3).
- Fehllösung 160: Es wird von 1000 Gummibären ausgegangen -  $1000 \cdot \frac{1}{6} \approx 160$  (K3, K6).
- Fehllösung 330: Es wird von 1000 Gummibären und der falschen Annahme, dass  $\frac{1}{3}$  der Gummibären grün sind, ausgegangen -  $1000 \cdot \frac{1}{3} \approx 330$  (K3, K6).

Zu [03]:

- Bei der Beurteilung wird davon ausgegangen, dass die Mischung in der Tüte unbedingt mit der Gesamtmischung übereinstimmen muss (K3).
- Erklärung und Beurteilung fehlen bzw. sind unvollständig (K1).

## Aufgabe 10: Unfallstatistik

### Teilaufgabe 10.1: Unfallstatistik

#### Aufgabentext

In der Mitteldeutschen Zeitung vom 03.02.2007 war folgende Meldung zu finden:

#### Frauen sicherer als Männer

##### Eindeutige Unfallstatistik

Wiesbaden/mid. Frauen fahren sicherer Auto als Männer. Knapp 79 000 weibliche Pkw-Fahrer wurden laut dem Statistischen Bundesamt 2005 als Verursacher eines Unfalls mit Personenschaden festgestellt. Das entspricht einem Anteil von 35 Prozent. Im gleichen Zeitraum verschuldeten 143 000 Männer einen solchen Unfall.

Gib an, wie viel Prozent der Unfälle mit Personenschaden im Jahr 2005 von Männern verursacht wurden.

M5401901a

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: I

### Kodieranweisung

<b>Aufgabe 10.1: Unfallstatistik</b>	
Item: M5401901	
RICHTIG	
	Zulässiges Intervall: $63\% \leq x \leq 66\%$
FALSCH	
	alle anderen Antworten

### Teilaufgabe 10.2: Unfallstatistik

#### Aufgabentext

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

M5401902a

Kreuze an.

- Jeder zweite Unfall mit Personenschaden wurde im Jahr 2005 von einer Frau verursacht.
- Im Jahr 2005 wurden knapp 79 000 PKW-Unfälle mit Personenschaden verursacht.
- Zwei von drei PKW-Unfällen mit Personenschaden wurden im Jahr 2005 von Männern verursacht.
- Jeder dritte PKW-Unfall mit Personenschaden wurde im Jahr 2005 von einem Mann verursacht.



## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: II

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 10.2: Unfallstatistik</b>	
Item: M5401902	
RICHTIG	
<input type="checkbox"/>	3. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
<input type="checkbox"/>	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 10.3: Unfallstatistik

### Aufgabentext

Der Sachverhalt der Zeitungsmeldung wurde in einem Diagramm veranschaulicht. Betrachte die folgenden Darstellungen und entscheide, ob sie richtig oder falsch sind.

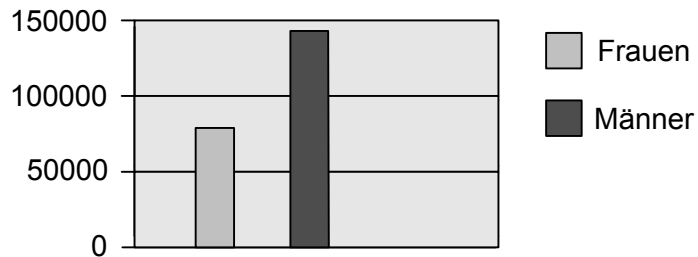
M5401903a,  
M5401903b,  
M5401903c,  
M5401903d

Kreuze an.

richtig

falsch

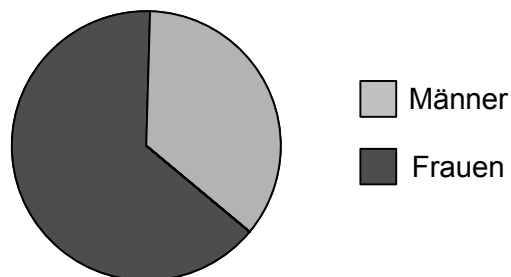
**PKW- Unfälle mit Personenschaden**



**PKW- Unfälle mit Personenschaden**

richtig

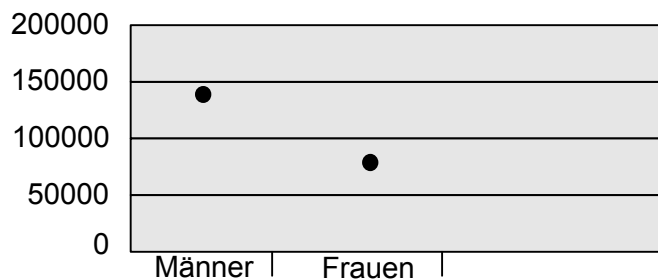
falsch



**PKW- Unfälle mit Personenschaden**

richtig

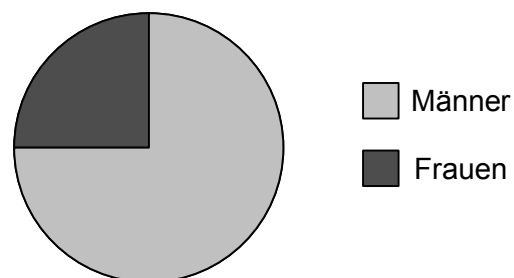
falsch



**PKW- Unfälle mit Personenschaden**

richtig

falsch



### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 4, 6
Anforderungsbereich: II

### Kodieranweisung

<b>Aufgabe 10.3: Unfallstatistik</b>																	
Item: M5401903																	
RICHTIG																	
	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>richtig</td> <td>falsch</td> </tr> <tr> <td><input checked="" type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>richtig</td> <td>falsch</td> </tr> <tr> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input checked="" type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>richtig</td> <td>falsch</td> </tr> <tr> <td><input checked="" type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>richtig</td> <td>falsch</td> </tr> <tr> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input checked="" type="checkbox"/></td> </tr> </table>	richtig	falsch	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	richtig	falsch	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	richtig	falsch	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	richtig	falsch	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
richtig	falsch																
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																
richtig	falsch																
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>																
richtig	falsch																
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																
richtig	falsch																
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>																
FALSCH																	
	alle anderen Antworten																

### Teilaufgabe 10.4: Unfallstatistik

#### Aufgabentext

Nimm zum ersten Satz der Zeitungsmeldung aus mathematischer Sicht Stellung.

M5401904a

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 1, 3, 5, 6
Anforderungsbereich: III

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 10.4: Unfallstatistik</b>	
Item: M5401904	
<b>RICHTIG</b>	
	<p>Die Stellungnahme muss sich in korrekter Form auf min. einen der folgenden Aspekte beziehen:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Fehlende Vergleichsangaben wie z.B.:               <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Anzahl der Autofahrerinnen im Vergleich zur Anzahl der Autofahrer</li> <li>➤ Jährliche Kilometerleistung von Autofahrerinnen im Vergleich zur jährlichen Kilometerleistung von Autofahrern</li> </ul> </li> <li>- Jahreszahl (Zeitungsmeldung aus 2007, Statistik aus 2005 – Statistik in 2005 noch annähernd dieselbe?)</li> <li>- Definition „unsicherer Autofahrer“ unklar</li> </ul> <p>Z.B.: Auf Grund von absoluten Zahlen kann solch eine Aussage nicht getroffen werden. Man muss noch Vergleichsangaben haben, wie z. B. Anzahl der Autofahrerinnen im Vergleich zur Anzahl der Autofahrer.</p> <p>ODER: Die Ergebnisse müssen in 2007 nicht genauso sein wie in 2005. Daher weiß man nicht, ob Frauen auch 2007 sicherer sind als Männer.</p> <p>ODER: Man kann nicht aufgrund der Unfallverursachung von Frauen und Männer auf deren sichere Fahrweise schließen.</p>
<b>FALSCH</b>	
	<p>Ja, das kann man so formulieren, die Zahlen sind eindeutig (<math>79000 &lt; 143000</math> und <math>35\% &lt; 65\%</math>).</p> <p>ODER: Es werden keine mathematischen Bezüge hergestellt, z.B.: „Die Statistik beweist das nicht.“</p>

## Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da es hier in allen Teilaufgaben um das Aufstellen oder Bewerten von Aussagen bzw. Diagrammen geht, die auf einer statistischen Erhebung beruhen, welche in Form eines Zeitungsartikels aufbereitet dargelegt wird. Bei allen Teilaufgaben muss der Inhalt des Zeitungsartikels sinnentnehmend erfasst werden (K6). Teilaufgabe 1 und 2 erfordern mit der sachgerechten Anwendung der Prozentrechnung und einer sinntragenden Anteilsvorstellung zusätzlich die Anwendung inhaltsbezogener Kompetenzen der Leitidee Zahl (L1).

Bei Teilaufgabe 1 genügt es dazu, die gegebene Situation zahlenmäßig zu erfassen (K6, K3) und dann nur noch die Differenz der gegebenen 35% zu 100% zu bestimmen (K5). Bei Teilaufgabe 2 steigt die Anforderung an das Kommunizieren (K6), da mehrere Aussagen inhaltlich verstanden und mit den Informationen aus dem Zeitungsartikel in Verbindung gebracht werden müssen. Bei Teilaufgabe 3 müssen zusätzlich zum Erfassen und Übertragen der Informationen vier gegebene Diagramme auf ihre Richtigkeit überprüft werden (K4). Teilaufgabe 4 erfordert eine verständnisorientierte mathematikbezogene Beurteilung einer Aussage und eine Begründung für diese Beurteilung auf Grundlage der gegebenen Daten (K1). Es geht dabei im Wesentlichen darum zu erkennen, dass Vergleichsangaben (wie z.B.: Anzahl der Autofahrerinnen im Vergleich zur Anzahl der

Autofahrer) fehlen, um eine datenbasierte Aussage zur Fahrweise von Männern und Frauen formulieren zu können, d.h. im Kern muss eine gegebene Modellierung beurteilt werden (K3). Insbesondere wegen dieser hohen Modellierungsanforderung ist es naheliegend, Teilaufgabe 4 dem Anforderungsbereich III zuzuordnen, wohingegen die Teilaufgaben 2 und 3 dem Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) und Teilaufgabe 1 dem Anforderungsbereich I (Anwenden eines Standardmodells) zuzuordnen sind.

**Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:**

Zu [01]:

- Die Frage wird nicht richtig verstanden und infolgedessen wird ein anderer Wert berechnet, z.B. 79000 von 143000 (Fehlösung 55%) (K6).
- Der prozentuale Anteil der Männer wird mit dem der Frauen gleichgesetzt (Fehlösung 35%) (K3).

[Zu 02]:

- Es gelingt nicht, zwischen den Aussagen und den im Zeitungsartikel angegebenen Informationen Zusammenhänge herzustellen, insbesondere aufgrund der Schwierigkeit, die in den Aussagen – in unterschiedlichen Weisen – dargelegten prozentualen Anteile richtig zu deuten (K3, K5, K6).

[Zu 03]:

- Durch unaufmerksames „Lesen“ der Diagramme werden die Legenden verwechselt und die Anteile somit falsch zugeordnet (K4).

Zu [04]:

- Es wird nicht aus mathematischer Sicht, sondern bloß unter Bezug zu der eigenen Erfahrungswelt Stellung genommen (Fehlösung z.B. „Frauen fahren schlechter Auto!“).
- Eine wertende Stellungnahme erfolgt nicht. Es werden lediglich die Zahlen bzw. Prozente gegenübergestellt (K1).

# Aufgabe 11: Kleinanzeigen

## Teilaufgabe 11.1: Kleinanzeigen

### Aufgabentext

In einer Stadtilustrierten werden die Preise für Kleinanzeigen bei Privatkunden folgendermaßen berechnet:

1-5 Zeilen	10,00 €
Jede weitere Zeile	1,80 €

Hier sind zwei Anzeigen:

**Wer** hat Lust auf Jazz-Dance in Essen? Bin 26 (w) und suche noch jmd., der mitmacht. Würde mich freuen, wenn's klappt... HbH ☎ [REDACTED]

Anzeige 1

**Softball-Damenteam** der Duisburg Dockers sucht Verstärkung! Wir suchen Mädels zwischen 16 und 40, die Lust haben, in einem netten Team etwas Neues auszuprobieren. Softball ist ähnlich dem amerik. Baseball und wird insbes. von Frauen gespielt. Schnuppertraining auf Anfrage. **TRAUT EUCH** – wir freuen uns!!! Kontakt: [REDACTED]@aol.com

Anzeige 2

Wie teuer war die erste Anzeige?

\_\_\_\_\_ €

M4400301a

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3
Anforderungsbereich: I

### Kodieranweisung

<b>Aufgabe 11.1: Kleinanzeigen</b>	
Item: M4400301	
RICHTIG	
	10 ( Euro )
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 11.2: Kleinanzeigen

### Aufgabentext

Wie teuer war die zweite Anzeige?

M4400302a

Kreuze an.

- 10,00 €       19,00 €       23,40 €       24,40 €       26,00 €

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: I

### Kodieranweisung

<b>Aufgabe 11.2: Kleinanzeigen</b>	
Item: M4400302	
RICHTIG	
<input type="checkbox"/>	4. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
<input type="checkbox"/>	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 11.3: Kleinanzeigen

### Aufgabentext

Eine dritte Anzeige hat 38,80 € gekostet. Wie viele Zeilen hatte sie?

M4400303a

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 2, 3, 5
Anforderungsbereich: I

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 11.3: Kleinanzeigen</b>	
Item: M4400303	
RICHTIG	
	21 (Zeilen)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 11.4: Kleinanzeigen

### Aufgabentext

Wenn eine Anzeige ganz in fett und gelb unterlegt gedruckt werden soll, kostet das 15,00 € mehr. Um wie viel Prozent verteuert sich dadurch die dritte Anzeige?

M4400304a

Kreuze an.

um ca. 15%

um ca. 28%

um ca. 39%

um ca. 61%

um ca. 72 %

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: II

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 11.4: Kleinanzeigen</b>	
Item: M4400304	
RICHTIG	
	3. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Aufgabenbezogener Kommentar

Alle Teilaufgaben dieser Aufgabe werden der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) zugeordnet, da implizit und explizit Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge genutzt werden sowie funktionale Zusammenhänge zu erkennen sind. Teilaufgabe 4 enthält zusätzlich Aspekte der Leitidee Zahl (L1), da Prozentrechnung anzuwenden ist.

Bei Teilaufgabe 1 ist die beschriebene Realsituation (Festlegung von Preisen für Kleinanzeigen) in ein einfaches mathematisches Modell zu übersetzen (K3), wobei nichts zu



berechnen ist. Die Bearbeitung von Teilaufgabe 2 erfolgt in ähnlicher Weise. Im Rahmen des Modellierens (K3) ist nun der Preis für 13 Zeilen zu bestimmen, wobei hier nun auch einfache rechnerische Tätigkeiten (K5) vonnöten sind.

Bei der Lösung von Teilaufgabe 3 wird erneut ein einfaches mathematisches Modell (K3) aufgestellt, innerhalb dessen Berechnungen (K5) erforderlich sind. Zusätzlich muss hier die Problemlösestrategie des Rückwärtsarbeitens angewendet werden (K2) und, ausgehend vom gegebenen Preis einer dritten Anzeige, die Anzahl ihrer Zeilen bestimmt werden.

Diese ersten drei Teilaufgaben sind dem Anforderungsbereich I zuzuordnen, da ihre Bearbeitung die direkte Anwendung grundlegender Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet erfordert.

In Teilaufgabe 4 ist eine sehr einfache Modellierung der Realsituation erforderlich (K3), und die Schüler müssen den Grund- und den Prozentwert erkennen, um davon ausgehend die prozentuale Veränderung des Preises der dritten Anzeige zu errechnen (K5).

Es ist naheliegend, die vierte Teilaufgabe dem Anforderungsbereich II zuzuweisen, da bei ihrer Bearbeitung auf verschiedenen Gebieten der Mathematik erworbene Fertigkeiten und Fähigkeiten miteinander zu verknüpfen sind.

### **Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:**

Zu [01]:

- Es wird überlesen, dass der Preis für 1 bis 5 Zeilen bereits angegeben ist, stattdessen wird irrtümlich mit den Kosten für „jede weitere Zeile“ gearbeitet und  $5 \cdot 1,80\text{€}$  gerechnet (Fehllösung 9,00€) (K3).

Zu [01, 02]:

- (Fehllösung 1,80€): Diese Fehllösung zeigt Defizite in der Kompetenz des Kommunizierens, da der Preis für die „kleine“ Anzeige mit dem angegebenen „kleinen“ Preis gleichgesetzt wird. Bei Schülern, die diesen Fehler machen, ist naheliegend, dass sie zudem beim in Teilaufgabe 2 gesuchten Preis der zweiten („großen“) Anzeige den „großen“ Preis ankreuzen (u.a. K3).

Zu [02]

- (Fehllösung 10,00€): Beim Ankreuzen dieser Fehllösung wird entweder im Aufgabentext überlesen, dass es um die „zweite“ Anzeige geht, oder es wird lediglich der Preis für 1-5 Zeilen übernommen (u.a. K3).
- (Fehllösung 19,00€): Dieses Ergebnis ergibt sich, wenn zweifach mit der ersten Anzeige gearbeitet wird. Der gesuchte Preis ergibt sich dann als Summe aus dem Preis der ersten Anzeige (10,00€) und dem zweiten Abdruck der ersten Anzeige, was als fünfmal „jede weitere Zeile“ gedeutet wird. Die zugehörige Rechnung lautet:  $10,00\text{€} + 5 \cdot 1,80\text{€} = 19,00\text{€}$ . Rechnerisch würde sich ebenfalls 19,00€ ergeben, wenn der Preis für 15 Zeilen bestimmt würde (Zählfehler) (u.a. K3).
- (Fehllösung 23,40€): Eine fehlerhafte Deutung des beschriebenen Preismodells als lineares Modell führt zum Ankreuzen dieser Fehllösung. Dabei wird missachtet, dass der Preis der ersten fünf Zeilen sich von jenem der weiteren Zeilen unterscheidet. Folglich wird der Preis für 13 einzelne Zeilen durch  $13 \cdot 1,80\text{€} = 23,40\text{€}$  ermittelt (K3).
- (Fehllösung 26,00€): Hierbei wird die gegebene 13zeilige Anzeige in zweimal fünf Zeilen sowie den Rest unterteilt. Der Preis für die restlichen drei Zeilen ergibt sich als Anteil des Preises für fünf Zeilen, und es wird gerechnet:  $10,00\text{€} + 10,00\text{€} + \frac{3}{5}$  von  $10,00\text{€} = 26,00\text{€}$  (K3).

Zu [03]

- (Fehllösung 16 Zeilen): Hierbei wird zwar korrekt zunächst der Preis für 1-5 Zeilen vom gegebenen Preis subtrahiert und dann die Anzahl der Zeilen für die restlichen 28,80€ ermittelt, anschließend wird jedoch vergessen, beide Anzahlen der Zeilen zu

addieren. Diesen häufig beobachtbaren Fehler zeigt die folgende Schülerlösung (K3).

Eine dritte Anzeige hat 38,80 € gekostet. Wie viele Zeilen hatte sie?

M4400303a

16 zeilen hatte sie } 38,80€  
(+ 1-5 zeilen = 10€)

- (Fehllösung 21,5 Zeilen): Hier liegt die Fehlvorstellung vor, dass Anzeigenpreise auch pro halbe Zeile erhoben werden. Auch dieser Fehllösung liegt eine unkritische Annahme eines linearen Preismodells zugrunde (vgl. Fehllösungen der Teilaufgabe 2), und der gegebene Preis von 38,80€ wird durch 1,80€ als konstanter Preis pro Zeile dividiert (K3).

Zu [04]:

- (Fehllösung: um ca. 15%): Beim Ankreuzen dieser Fehllösung liegt ein sog. Signalfehler vor. Ungenaueres Lesen führt dazu, dass 15€ mit 15% verwechselt oder gar gleichgesetzt wird (u.a. K6, K3).
- (Fehllösung: um ca. 28%): In diesem Falle werden Grund- und Prozentwert nicht richtig zugeordnet, und der Anteil der Preiserhöhung für die fett und gelb unterlegt gedruckte Anzeige an dem erhöhten Preis für diese Anzeige wird errechnet:  $15€ : 53,80€ \approx 0,278 \approx 28%$  (K3).
- (Fehllösung: um ca. 61%): Hier liegt vermutlich ein Lesefehler vor. Es wird mit einem verminderten statt mit einem erhöhten Preis gearbeitet, und der Anteil des verminderten Preises (hier:  $38,80€ - 15€ = 23,80€$ ) an dem Normalpreis der dritten Anzeige wird errechnet:  $23,80€ : 38,80€ \approx 0,613 \approx 61%$  (u.a. K6, K3).
- (Fehllösung: um ca. 72%): Das Ankreuzen dieser Fehllösung zeigt, dass Grund- und Prozentwert nicht richtig erkannt werden. Rechnerisch wird der Anteil des regulären Preises der dritten Anzeige am erhöhten Preis der Anzeige ermittelt, und so wird  $38,80€ : 53,80€ \approx 0,721 \approx 72%$  gerechnet (K3).

## Aufgabe 12: Fahrrad

### Aufgabentext

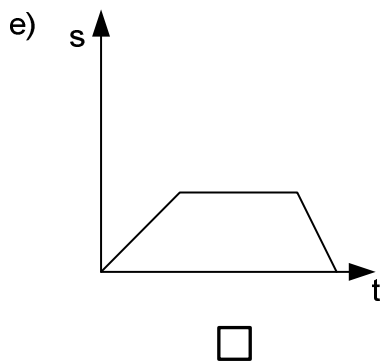
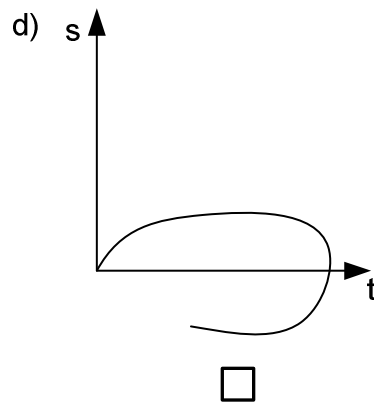
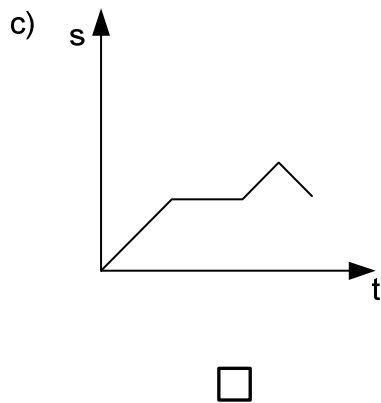
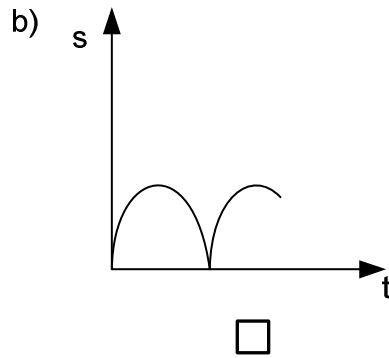
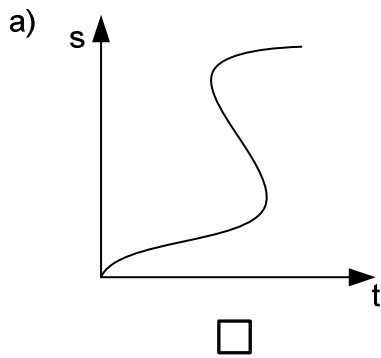
Peter wollte mit dem Fahrrad zu seinem Freund Paul fahren. Auf dem Weg dorthin traf er Tina, die ihm die Lösung der Hausaufgaben erklärte. Anschließend fuhr er weiter zu Paul, den er nicht antraf. Jetzt ist er auf dem Weg nach Hause.

Welcher Graph passt zu dieser Geschichte?

Kreuze an.

s... Entfernung zu Peters Wohnung

t ... Zeit ab Abfahrt von Peter von zu Hause



Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3, 4, 6
Anforderungsbereich: II

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 12: Fahrrad</b>	
Item: M4402001	
RICHTIG	
	3. Kästchen wurde angekreuzt (zweite Reihe, links) - c)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe ist der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) zugeordnet, da eine Zeit-Weg-Beziehung in sprachlicher sowie in graphischer Form beschrieben ist und diese unterschiedlichen Darstellungen einander zuzuordnen sind.

Zur Bearbeitung dieser Aufgabe sind zunächst Informationen aus dem die Realsituation beschreibenden Text zu entnehmen (K6). Davon ausgehend ist gedanklich ein mathematisches Modell zu entwickeln, mit dessen Hilfe der funktionale Zusammenhang zwischen der Entfernung zu Peters Wohnung sowie der Zeit ab seiner Abfahrt von zu Hause erfasst werden kann (K3). Alle zur Auswahl stehenden Modelle sind graphisch dargestellt, so dass die Schüler diese Darstellungen interpretieren und Beziehungen zur sprachlich beschriebenen Situation erkennen müssen (K4).

Insbesondere die Anforderungen an die Kompetenz K4 begründen eine Einordnung dieser Aufgabe in den Anforderungsbereich II, da hier Übersetzungsleistungen zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu erbringen sind.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- (Fehllösung a): Der Graph erinnert an eine Straße. Diese Art Fehllösung tritt häufig auf, nämlich eine Verwechslung der realen Situation mit ihrer graphisch-funktionalen Darstellung (u.a. K3, K6).
- (Fehllösung b): Hier könnte die Fehldeutung darin bestehen, dass der Graph als Peters Geschwindigkeit angesehen wird (u. a. K3, K4).
- (Fehllösung d): Diese Darstellung legt die Fehldeutung des unteren Teils des Graphen als „Fahrt zurück“ nahe. Auch hier kann die bei Fehllösung a beschriebene Verwechslung zugrunde liegen (u.a. K3, K6).
- (Fehllösung e): Dieser Graph zeigt zwar nach einer anfänglich zurückgelegten Wegstrecke eine Phase des Anhaltens, aber es fehlt eine Darstellung der Weiterfahrt zu Paul. Die Rückfahrt zu Peters Wohnung ist korrekt dargestellt (u.a. K3, K6).

## Aufgabe 13: Kanutour

### Teilaufgabe 13.1: Kanutour

#### Aufgabentext

Die 21 Schüler der Klasse 8e möchten eine Kanutour machen. Leider sind im Kanuclub nicht genügend Kanus vorhanden. Daher möchte Frau Krell einen Kleintransporter mit Anhänger mieten, um weitere Kanus zu transportieren. In der Zeitung findet Frau Krell die beiden folgenden Angebote.

1. Angebot	2. Angebot
<b>Kleintransporter mit Anhänger!</b> Einmaliger Grundpreis: 90 € Preis pro gefahrenem Kilometer: 25 Cent (Kilometerpauschale)	<b>Kleintransporter mit Anhänger!</b> Einmaliger Grundpreis: 110 € Preis pro gefahrenem Kilometer: 0,15 € (Kilometerpauschale)

Vergleiche die beiden Angebote.

M4402401a

Berate Frau Krell bei der Wahl eines Angebots für einen Kleintransporter mit Anhänger.

Notiere deine Argumente.

#### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: III

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 13.1: Kanutour</b>	
Item: M4402401	
RICHTIG	
	<p>Angemessene Beratung, in welcher auf folgende Aspekte verwiesen werden muss:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Abhängigkeit des Mietpreises von der zu fahrenden Strecke</li><li>- Exakte Berechnung der Streckenlänge (200 km), bei der beide Angebote gleich teuer sind und Aussagen zur Auswahl eines Angebots bei kürzeren bzw. längeren Wegstrecken</li></ul> <p>Der genaue Schnittpunkt (200 km) kann auf verschiedene Art und Weise gewonnen werden (z.B. durch systematisches Probieren; graphische, rechnerische, inhaltliche Lösungsverfahren). Diese Arbeitsschritte müssen nicht dokumentiert werden!</p> <p>Z.B.:</p> <p>Frau Krell sollte ihre Entscheidung von der Länge der zurückzulegenden Strecke abhängig machen. Muss sie mehr als 200 km fahren, sollte sie sich für das zweite Angebot entscheiden. Bei weniger als 200 km ist das erste Angebot das günstiger. (Bei 200 km sind beide Angebote gleich teuer!)</p> <p>ODER:</p> <p>Frau Krell sollte das zweite Angebot wählen, da dieses bei Wegstrecken über 200 km günstiger ist!</p>
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 13.2: Kanutour

### Aufgabentext

Im Internet findet Frau Krell das Angebot des Autovermieters „Autoscout“. Dieser verlangt eine einmalige Grundgebühr von 120 € und eine Kilometerpauschale von 30 Cent. In diesem Angebot sind 100 Freikilometer enthalten.

M4402402a

Mit welcher Gleichung kann man die Kosten beschreiben, wenn man mehr als 100 Kilometer fährt?  $x$  soll dabei die Gesamtzahl der gefahrenen Kilometer sein.

Kreuze an.

- $y = 0,3 \cdot (x - 100) + 120$
- $y = 0,3 \cdot x + 120$
- $y = 0,3 \cdot (x + 100) + 120$
- $y = 30 \cdot (x - 100) + 120$

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: II

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 13.2: Kanutour</b>	
Item: M4402402	
RICHTIG	
<input type="checkbox"/>	1. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
<input type="checkbox"/>	alle anderen Antworten

## Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da in der beschriebenen realen Sachsituation lineare Beziehungen zu identifizieren und zu vergleichen sind.

Zur Bearbeitung von Teilaufgabe 1 sind zunächst die relevanten Informationen aus dem Text und aus der Tabelle auszuwählen (K6). Die Durchführung einer Beratung erfordert den Vergleich beider Angebote. Dazu ist ein adäquates mathematisches Modell mit bestimmten Annahmen aufzustellen (K3), bei dem die Tarifstrukturen beider Anbieter mittels linearer Funktionen beschrieben werden können. Der Vergleich kann durch systematisches Probieren, graphisch, rechnerisch oder inhaltlich erfolgen (K5), und es ist dann zu beurteilen und darzulegen (K6), welches der beiden Angebote in Abhängigkeit von der angenommenen zu fahrenden Kilometerzahl das günstigere ist.

Insgesamt ist eine eigene globale Wertung beider Angebote vorzunehmen, und aufgrund der hohen Modellierungsanforderungen wird diese Teilaufgabe in den Anforderungsbereich III eingeordnet.

Bei der Bearbeitung von Teilaufgabe 2 werden dieselben Kompetenzen – auf niedrigerem Niveau – benötigt. Die gegebenen Gleichungen sind im Kontext zu deuten, und es ist zu beurteilen, ob sie den gegebenen Sachverhalt zutreffend beschreiben.

Da die zu bewertenden Modelle hier gegeben sind, wird diese Teilaufgabe noch dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

## Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:

- Es wird nicht erkannt, dass die Kosten eines Angebotes von dem zu zahlenden Grundpreis *und* von der Anzahl der gefahrenen Kilometer abhängen. Stattdessen werden nur die Grundpreise oder nur die Kosten für die gefahrenen Kilometer miteinander verglichen (K3).
- Ein Vergleich beider Angebote erfolgt nur anhand einer ganz bestimmten Anzahl gefahrener Kilometer, d.h. die globale Struktur beider Tarife wird nicht beachtet, wie folgende Schülerlösung verdeutlicht (K3).

Frau Krell sollte das erste Angebot nehmen, weil wenn der Transporter z.B. 25 Kilometer fahren würde müsste sie 96,25 € für das 1. Angebot zahlen.  
113,75 € müsste sie für das 2. Angebot dann zahlen.

- Zwar wird erkannt, dass der Preis von der zu fahrenden Strecke abhängt, aber es wird nur rein qualitativ argumentiert, wie die nächste Schülerlösung zeigt (u.a. K3).

Es kommt darauf an wie weit weg es ist.  
 Wenn es nah ist dann Angebot 1 weil es  
 weniger Grundgebühren hat und wenns weiter  
 weg ist Angebot 2 weil es weniger pro gefahren  
 Kilometer kostet

- Die zum Vergleich der beiden Angebote aufgestellte Gleichung wird falsch gelöst (K5).

Zu [02]:

- (Fehlösung  $y=0,3 \cdot x+120$ ): Die Anzahl der Freikilometer wird nicht berücksichtigt (K3).
- (Fehlösung  $y=0,3 \cdot (x+100)+120$ ): Die Anzahl der Freikilometer wird irrtümlich zur gefahrenen Kilometerzahl addiert (K3).
- (Fehlösung  $y=30 \cdot (x-100)+120$ ): Die in Cent angegebene Kilometerpauschale wird nicht in Euro umgewandelt (K5).

## Aufgabe 14: Mitschüler

### Teilaufgabe 14.1: Mitschüler

#### Aufgabentext

In der Klasse 8a sind insgesamt 25 Schülerinnen und Schüler. Es sind sieben Jungen mehr als Mädchen.

M4400501a

Wie viele Mädchen sind in der Klasse? Kreuze an.

6

7

9

16

18

#### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 2, 3, 5
Anforderungsbereich: II



## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 14.1: Mitschüler</b>	
Item: M4400501	
RICHTIG	
	3. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 14.2: Mitschüler

### Aufgabentext

In der Klasse 8b mit insgesamt 28 Schülerinnen und Schülern sind dreimal so viele Mädchen wie Jungen.

M4400502a

Beschreibe diese Situation mit einer Gleichung.

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: II

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 14.2: Mitschüler</b>	
Item: M4400502	
RICHTIG	
	$x + 3x = 28$ Anmerkung: Alle äquivalenten Gleichungen werden akzeptiert. Statt x kann dabei auch eine beliebig andere Variable verwendet werden!  Variablen sind nicht gefordert, also auch $28 = 3 \cdot 7 + 7$ Oder: Ein Gleichungssystem (z. B. $x + y = 28$ und $y = 3x$ ) wird noch als richtige Lösung akzeptiert.
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 14.3: Mitschüler

### Aufgabentext

M4400503a

Steffi ist in der 8c. In dieser Klasse sind insgesamt 31 Schülerinnen und Schüler. Steffi behauptet: „Wenn zu meiner Klasse ein Mädchen hinzukäme und ein Junge die Klasse verließ, wären gleich viele Jungen und Mädchen in der Klasse.“

Erläutere, warum Steffis Behauptung nicht richtig sein kann.

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 1, 2, 3, 5, 6
Anforderungsbereich: II

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 14.3: Mitschüler</b>	
Item: M4400503	
RICHTIG	
	<p>Angemessene Erläuterung, in welcher deutlich gemacht wird, dass es die ungerade Anzahl der Kinder in der Klasse nicht ermöglicht, dass – auch wenn ein Junge die Klasse verlässe und ein Mädchen hinzukäme – gleich viele Jungen und Mädchen in der Klasse sind.</p> <p>Z.B.:</p> <p>Wenn ein Mädchen zur Klasse hinzukommt und ein Junge die Klasse verlässt, bleibt die Gesamtzahl von 31 Kindern in der Klasse erhalten. Da 31 eine ungerade Zahl und damit nicht durch 2 teilbar ist, kann die Anzahl der Jungen und Mädchen nicht gleich groß sein.</p> <p>ODER:</p> <p>Wenn Steffi Recht hätte, müssten jetzt 2 Jungen mehr als Mädchen in der Klasse sein. Ohne diese zwei Jungen wären dann gleich viele Mädchen und Jungen in der Klasse. Das geht nicht, denn 29 ist nicht durch 2 teilbar.</p> <p>ODER:</p> <p><math>j</math> = Anzahl der Jungen, <math>m</math> = Anzahl der Mädchen <math>j, m</math> (Elementzeichen!!!) <math>\mathbb{N}</math></p> <p>I. <math>j + m = 31</math>            II <math>j - 1 = m + 1</math></p> $j - 1 = 31 - j + 1$ $2j = 33$ $j = 16,5$ <p>Da 16,5 keine natürliche Zahl ist, gibt es keine Lösung.</p> <p>ODER:</p> <p>Es sind dann immer noch 31 Kinder in der Klasse! Da 31 eine ungerade Zahl ist, können nicht gleich viele Jungen wie Mädchen in der Klasse sein.</p> <p>ODER:</p> <p>„31 ist eine ungerade Zahl“</p>
FALSCH	
	alle falschen, fehlerhaften oder unvollständigen Erläuterungen

## Aufgabenbezogener Kommentar

Zur Lösung dieser Aufgabe sind inhaltsbezogene Kompetenzen der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) erforderlich, da bei jeweils gegebener Klassenstärke die Zusammenhänge zwischen der Anzahl an Mädchen und Jungen zu erfassen sind. Des Weiteren sind bei allen Teilaufgaben zudem inhaltsbezogene Kompetenzen der Leitidee Zahl (L1) von Bedeutung, denn zu ihrer Bearbeitung müssen einfache Rechnungen ausgeführt werden.

Zur Lösung der Teilaufgabe 1 ist unter Verwendung der Informationen zur Klassenstärke und Zusammensetzung der Klasse ein geeignetes mathematisches Modell (K3), wie  $x + x + 7 = 25$ , aufzustellen und das Ergebnis zu ermitteln. Alternativ kann dies auch unter Rückgriff auf einfache heuristische Hilfsmittel und Strategien (K2), wie beispielsweise das systematische Probieren oder auch das Ausschließen einzelner Antwortmöglichkeiten, geschehen. Die dabei auszuführenden Rechenoperationen sind elementar (K5).

Aufgrund eines mehrschrittigen, strategiegestützten Lösungswegs ist es naheliegend diese Teilaufgabe bereits dem Anforderungsbereich II zuzuordnen.

Bei Teilaufgabe 2 sind – mit Ausnahme des Problemlösens – dieselben Kompetenzen anzuwenden. Aufgrund der notwendigen Arbeit mit Variablen ist das symbolische, technische und formale Arbeiten (K5) allerdings auf einer höheren Anspruchsebene anzusiedeln. Deshalb ist es sinnvoll, diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich II zuzuweisen.

Zur Bearbeitung von Teilaufgabe 3 kann es hilfreich sein, das Problem in Teilprobleme zu zerlegen (K2), sich zunächst der Auswirkungen des Personenaustausches bewusst zu werden und dann ggf. auf der Grundlage systematischen Probierens zu erläutern, warum die Anzahl an Mädchen und Jungen nicht übereinstimmen kann. Dabei kann argumentiert werden, dass 31 als ungerade Zahl nicht ohne Rest durch 2 teilbar ist (K1).

Aufgrund dieser mehrschrittigen Argumentation unter Bezug zu inhaltsbezogenen Kompetenzen der Leitidee Zahl (L1) gehört diese Teilaufgabe zu Anforderungsbereich II.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01] :

- Fehllösung 18: Die Bedingung „sieben Jungen mehr als Mädchen“ wird rechnerisch korrekt umgesetzt ( $25 - 7 = 18$ ), weitere Rechenschritte unterbleiben aber oder die Information „sieben Jungen *mehr* als Mädchen“ wird aufgefasst als „*sieben* Jungen“ (K3).
- Fehllösung 16: Es wird irrtümlich zugrunde gelegt, dass sieben Mädchen mehr als Jungen in der Klasse sind (K3).

Zu [02]:

- Die Anzahlen von Mädchen und Jungen werden korrekt berechnet (21 Mädchen, 7 Jungen), die geforderte Gleichung wird jedoch nicht aufgestellt (K3).

Zu [03]:

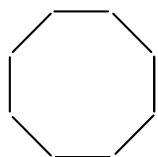
- Es wird darauf verwiesen, dass der Personenaustausch keine Veränderung bewirkt, eine Erklärung erfolgt jedoch nicht (K1).

## Aufgabe 15: Streichholzmuster

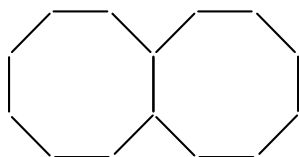
### Teilaufgabe 15.1: Streichholzmuster

#### Aufgabentext

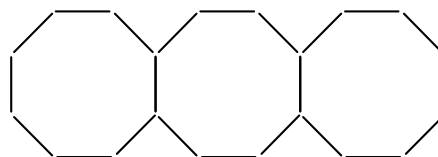
Streichhölzer werden wie folgt angeordnet.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Wie viele Streichhölzer braucht man für die Figur 10, wenn man das Muster fortsetzt?

M4402501a

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 2, 4, 5
Anforderungsbereich: I

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 15.1: Streichholzmuster</b>	
Item: M4402501	
RICHTIG	
	71 (Streichhölzer)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 15.2: Streichholzmuster

### Aufgabentext

Stelle einen Term auf, mit dem man die Anzahl der Streichhölzer der n-ten Figur berechnen kann.

M4402502a

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 2, 4, 5
Anforderungsbereich: III

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 15.2: Streichholzmuster</b>	
Item: M4402502	
RICHTIG	
	$8 + (n-1) \cdot 7$ <u>Anmerkung:</u> Alle gleichwertigen Terme (z.B. $7n+1$ ) werden akzeptiert, dabei kann stellvertretend für die n-te Figur auch eine beliebig andere Variable verwendet werden.
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 15.3: Streichholzmuster

### Aufgabentext

Bei einem anderen Muster wird die Anzahl der benötigten Streichhölzer für die n-te Figur durch den Term  $3 + (n - 1) \cdot 2$  beschrieben.

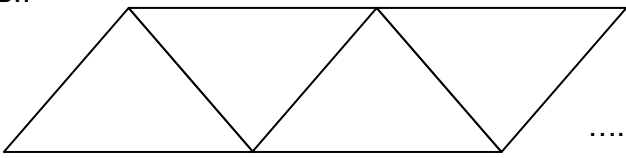
M4402503a

Skizziere das zugrunde liegende Muster.

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 2, 4, 5
Anforderungsbereich: III

### Kodieranweisung

<b>Aufgabe 15.3: Streichholzmuster</b>	
Item: M4402503	
RICHTIG	
	<p>Alle Muster, zu denen die Formel passt,</p> <p>Z.B.:</p> 
FALSCH	
	alle anderen Antworten

### Aufgabenbezogener Kommentar

Alle Teilaufgaben sind der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) zuzuordnen. Ihnen liegen Bildungsgesetze für Folgen zugrunde, die zur Beschreibung verschiedener Streichholzmuster dienen. Die Informationen zur Lösung der Teilaufgaben 1 und 2 müssen der Darstellung entnommen werden (K4). Hierzu ist in Verbindung mit symbolisch-technisch-formalem Arbeiten die Anwendung von Problemlösestrategien erforderlich, wie beispielsweise die Weiterführung der Folge, die Arbeit mit einer Wertetabelle oder das Aufstellen einer Rekursionsformel (K2, K5). Während bei Teilaufgabe 1 die Figur noch zeichnerisch dargestellt werden kann, um den Wert des 10. Gliedes zu erhalten, ist bei Teilaufgabe 2 der Zusammenhang zwischen der Anzahl der 8-Ecke und ihren gemeinsamen

Seiten einerseits und der Anzahl der Streichhölzer der n-ten Figur andererseits zu erkennen und auf symbolischer Ebene darzustellen (K5).

Teilaufgabe 3 erfordert es schließlich im Sinne des Rückwärtsarbeitens zu einem gegebenen Term ein konkretes Muster zu skizzieren (K5, K4, K2).

Da das Bildungsgesetz der Folge aufgrund der Abbildung dreier aufeinanderfolgender Glieder leicht zu erfassen ist und zur Lösung der Aufgabe lediglich einfache Problemlösestrategien erforderlich sind, ist die Teilaufgabe 1 noch dem Anforderungsbereich I zuzuordnen. Teilaufgabe 2 hingegen gehört aufgrund der erforderlichen Verallgemeinerung dem Anforderungsbereich III an. Bei Teilaufgabe 3 ist diese Einordnung aufgrund des erforderlichen Wechsels von der symbolischen auf die graphische Darstellungsebene, d.h. die Darstellung eines zu dem vorgegebenen Term passenden Musters, gegeben.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:

- Es wird nicht erkannt, dass jeweils ein Streichholz die Seite zweier Achtecke bildet (Fehlösung:  $8 \cdot 10 = 80$  Streichhölzer) (K4).
- Die Zahl jeweils hinzukommender Streichhölzer wird mit 10 multipliziert, das erste „Starthölzchen“ wird vergessen (Fehlösung:  $7 \cdot 10 = 70$  Streichhölzer) (K4).

Zu [02]:

- Pro Folgeglied wird von 8 Streichhölzern ausgegangen, doppelt gezählte eventuell falsch subtrahiert (Fehlösungen:  $8 \cdot n$  oder  $8 \cdot n - 1$ ) (K2, K4).
- Es wird keine allgemeine Gleichung, sondern nur die spezielle Berechnung für  $n = 10$  notiert (Fehlösung:  $8 + 9 \cdot 7 = 71$ ) (K5).
- Das erste Folgeglied wird nicht als solches ( $n = 1$ ), sondern als Ausgangsposition ( $n = 0$ ) wahrgenommen (Fehlösung:  $8 + n \cdot 7$ ) (K2, K4, K5).

Zu [03]:

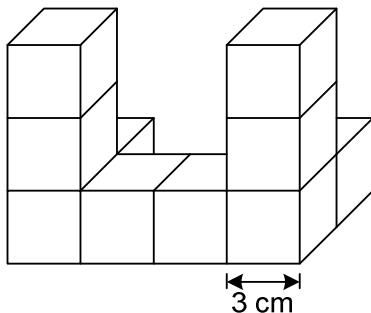
- Der Aufbau der Folge wird nicht deutlich, da nur das erste Folgeglied oder ein beliebiges anderes Folgeglied gezeichnet wird (K4, K5).

## Aufgabe 16: Körpervolumen

### Aufgabentext

Der Körper ist aus gleichen Würfeln zusammengesetzt.

Berechne das Volumen des gesamten Körpers.



Kreuze an.

9 cm<sup>3</sup>10 cm<sup>3</sup>30 cm<sup>3</sup>90 cm<sup>3</sup>270 cm<sup>3</sup>

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 4, 5
Anforderungsbereich: I

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 16: Körpervolumen</b>	
Item: M2402501	
RICHTIG	
	5. Kästchen angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Aufgabenbezogener Kommentar

Diese geometrische Problemstellung entstammt der Leitidee Messen (L2), da das Volumen eines aus Würfeln zusammengesetzten Körpers zu bestimmen ist. Hierzu ist der Abbildung zunächst die Anzahl der Würfel sowie deren Kantenlänge zu entnehmen (K4), bevor das Volumen eines solchen Würfels und dann das Volumen des Körpers berechnet werden kann (K5). Aufgrund der direkten Anwendbarkeit mathematischer Begriffe und Verfahren sowie der unmittelbar zugänglichen Darstellung wird dieser Aufgabe dem Anforderungsbereich I zugeordnet.

## Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Fehllösung 9 cm<sup>3</sup>: Die Größe einer Seitenfläche eines Würfels wird berechnet und als Volumen aufgefasst.
- Fehllösung 10 cm<sup>3</sup>: Es wird mit der Kantenlänge 1 cm gerechnet (K4).
- Fehllösung 30 cm<sup>2</sup>: Die Anzahl der Würfel wird mit deren Kantenlänge multipliziert.
- Fehllösung 90 cm<sup>3</sup>: Es wird die Größe der Seitenfläche eines Würfels mit der Anzahl der Würfel multipliziert.

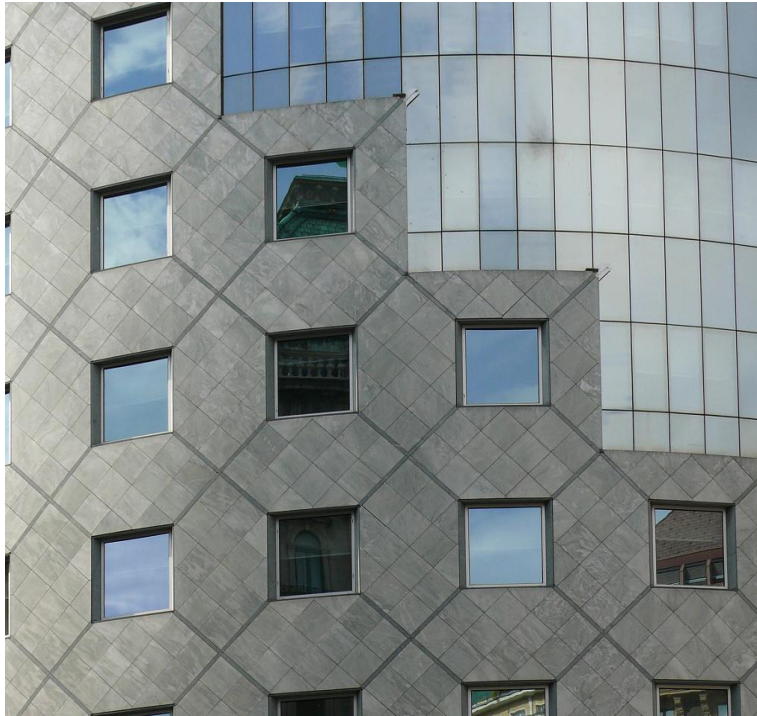


## Aufgabe 17: Moderne Fassade

### Teilaufgabe 17.1: Moderne Fassade

#### Aufgabentext

Das Foto zeigt dir einen Ausschnitt der Fassade eines modernen Gebäudes. Du siehst Bauelemente, die sich immer wiederholen.



M3401701a

Nach oben hört das Muster immer jeweils mit einem Trapez  auf.

Durch eine geeignete Abbildung des Trapezes soll als Gesamtfigur ein Sechseck wie auf dem Foto (vorhergehende Seite, unten) entstehen.



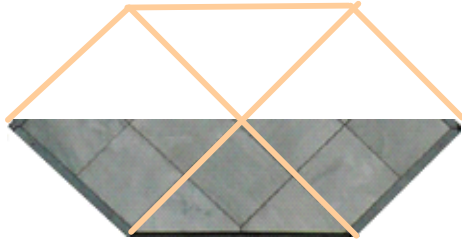
Führe eine solche Abbildung durch:



## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 3. Raum und Form
Allgemeine Kompetenz: 2, 3, 4
Anforderungsbereich: I

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 17.1: Moderne Fassade</b>	
Item: M3401701	
RICHTIG	
	<p>Achsen spiegung an der Oberkante des Trapezes</p> <p>ODER:</p> <p>Punktspiegung am Mittelpunkt der Oberkante des Trapezes</p> 
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 17.2: Moderne Fassade

### Aufgabentext

Vergleiche den Flächeninhalt eines der Sechsecke mit dem Flächeninhalt eines der quadratischen Fenster.



M3401702a...  
M3401702e

Kreuze alle richtigen Antworten an.

- Das Sechseck ist ein einhalb mal so groß wie das Fenster.
- Das Sechseck ist doppelt so groß wie das Fenster.
- Das Sechseck ist 50% größer als das Fenster.
- Das Sechseck ist dreimal so groß wie das Fenster.
- Zwei Sechsecke sind so groß wie drei Fenster.

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 3. Raum und Form
Allgemeine Kompetenz: 2, 3, 4, 5, 6
Anforderungsbereich: II

## Kodieranweisung

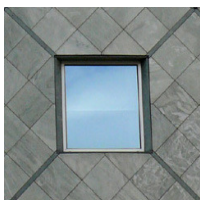
<b>Aufgabe 17.2: Moderne Fassade</b>	
Item: M3401702	
RICHTIG	
	<input checked="" type="checkbox"/> Das Sechseck ist ein einhalb mal so groß wie das Fenster. <input type="checkbox"/> Das Sechseck ist doppelt so groß wie das Fenster. <input checked="" type="checkbox"/> Das Sechseck ist 50% größer als das Fenster. <input type="checkbox"/> Das Sechseck ist dreimal so groß wie das Fenster. <input checked="" type="checkbox"/> Zwei Sechsecke sind so groß wie drei Fenster.
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Teilaufgabe 17.3: Moderne Fassade

### Aufgabentext

Man kann sich die Fassade auch aus diesen Quadraten zusammengesetzt denken:

M3401703a



Welcher Bruchteil dieses Quadrates wird von dem Fenster eingenommen?

Kreuze an.

$\frac{1}{5}$

$\frac{4}{16}$

$\frac{4}{12}$

$\frac{6}{32}$

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 3. Raum und Form
Allgemeine Kompetenz: 2, 3, 4, 5
Anforderungsbereich: II

### Kodieranweisung

<b>Aufgabe 17.3: Moderne Fassade</b>	
Item: M3401703	
RICHTIG	
<input checked="" type="checkbox"/>	2. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
<input type="checkbox"/>	alle anderen Antworten

### Teilaufgabe 17.4: Moderne Fassade

#### Aufgabentext

Dieses Element wiederholt sich immer in der Fassade.

M3401704a



Welcher Bruchteil dieses Achtecks wird von dem Fenster eingenommen?

Kreuze an.

ein Achtel

ein Siebentel

ein Fünftel

ein Viertel

ein Drittel

### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 3. Raum und Form
Allgemeine Kompetenz: 2, 3, 4, 5
Anforderungsbereich: II

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 17.4: Moderne Fassade</b>	
Item: M3401704	
RICHTIG	
	2. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

### Aufgabenbezogener Kommentar

Diese realitätsbezogene Aufgabe gehört der Leitidee Raum und Form (L3) an, da es um die Analyse einer aus verschiedenen geometrischen Figuren zusammengesetzten Fassade geht. Dabei sind sowohl Überlegungen zu den vorhandenen Symmetrien anzustellen als auch einzelne Ausschnitte der Fassade bezüglich ihrer Flächeninhalte miteinander zu vergleichen. Hierzu ist es auch erforderlich, dass Grundprinzip des Messens (L2) anzuwenden.

Zur Lösung aller vier Teilaufgaben ist es zunächst notwendig, die Abbildungen zu verstehen (K4) und anhand dieser Abbildungen Idealisierungen vorzunehmen, d.h. die verschiedenen Bauelemente der Fassade als ebene mathematische Figuren aufzufassen (K3). Auf dieser Grundlage ist dann bei Teilaufgabe 1 eine Kongruenzabbildung (Achsen- oder Punktspiegelung) bzw. sind bei den Teilaufgaben 2, 3 und 4 Flächeninhaltsvergleiche vorzunehmen (K5). Letzteres erfordert die Anwendung heuristischer Strategien, vor allem das geschickte Zerlegen der zu vergleichenden Fassadenausschnitte in kongruente Teilfiguren (K2). Bei Teilaufgabe 2 ist es ferner notwendig, aus den angegebenen Antwortalternativen die grundlegenden Informationen sinnerfassend zu erfassen (K6).

Da eine Spiegelung eine für Schüler vertraute Operation darstellt, ist es sinnvoll der Teilaufgabe 1 den Anforderungsbereich I zuzuweisen. Die übrigen Teilaufgaben gehören aufgrund der Anforderungen an das Problemlösen bzw. der Verknüpfung inhaltsbezogener Kompetenzen der Leitideen Messen sowie Raum und Form dem Anforderungsbereich II an.

### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:

- Es wird nur das Sechseck gezeichnet, die durchgeführte Abbildung ist nicht erkennbar.

Zu [02]:

- Eine Übertragung des Problems auf zwei Sechsecke und drei Fenster erfolgt nicht. Demzufolge wird die 5. Antwortmöglichkeit nicht als richtig bewertet (K2).

Zu [03, 04]:

- Fehllösung 1/5: Es wird nur auf die Anzahl der Teilfiguren, nicht auf deren Form und Größe geachtet (K2, K4).

Zu [03]:

- Fehllösung 4/12: Der Flächeninhalt des quadratischen Fensters und der Flächeninhalt der vier das Fenster umgebenden Trapeze werden miteinander in Beziehung gesetzt (K2, K6).

Zu [04]:

- Fehllösung ein Achtel: Der Flächeninhalt des quadratischen Fensters wird in Beziehung zum Flächeninhalt der vier das Fenster einrahmenden Sechsecke gesetzt, wobei diese in 4 Quadrate und 4 Dreiecke (insgesamt also acht Figuren) zerlegt werden (K2).

- Fehllösung ein Viertel: Der Flächeninhalt des quadratischen Fensters wird ohne Beachtung der Größen in Beziehung zum Flächeninhalt der vier das Fenster einrahmenden Sechsecke gesetzt (K2).

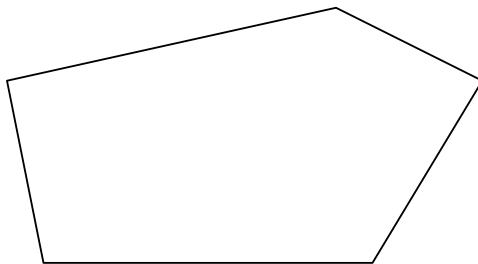
## Aufgabe 18: Innenwinkel

### Aufgabentext

Begründe, weshalb die Innenwinkelsumme in einem Fünfeck  $540^\circ$  beträgt.

M2402801a

Benutze dazu die gegebene Zeichnung.



### Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 1, 2, 5
Anforderungsbereich: III

## Kodieranweisung

### Aufgabe 18: Innenwinkel

Item: M2402801

RICHTIG

Herleitung der Innenwinkelsumme eines Fünfecks durch Zerlegung: Geschickte Zerlegung des Fünfecks in 3 Dreiecke oder durch Zerlegung in ein Viereck und ein Dreieck und Argumentation mittels der Innenwinkelsumme im Dreieck bzw. Viereck.

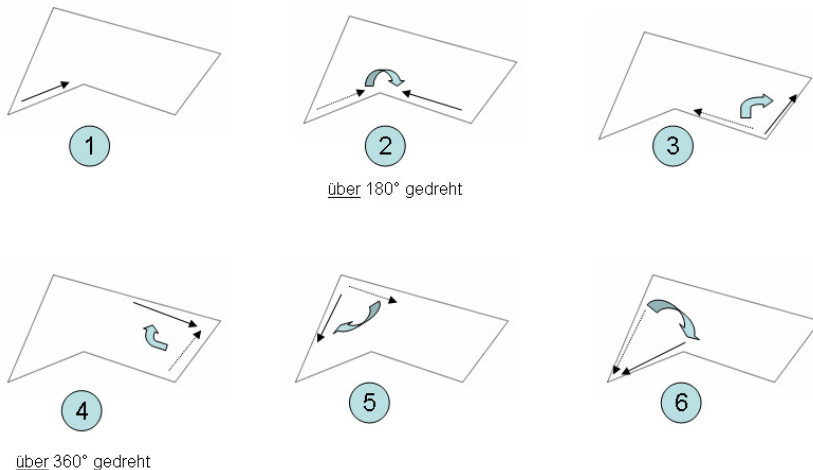
Anmerkung: Die Lösung der Aufgabe muss nicht formal richtig notiert werden.

Z.B.:

Ein Fünfeck kann in 3 Dreiecke zerlegt werden. Die Innenwinkelsumme jedes Dreiecks beträgt  $180^\circ$ . Also beträgt die Innenwinkelsumme des Fünfecks  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$

ODER:

Linealbeweis (hier mit anderem Fünfeck, ist aber einfach übertragbar!): Betrachte einen Pfeil, der das Fünfeck entlang wandert und sich an jeder Ecke genau um den Innenwinkel dreht:



Habe genau um  $540^\circ$  gedreht, da der Pfeil bereits in **4** über  $360^\circ$  gedreht war und nun in Gegenrichtung zu Position **1** steht (d.h.:  $+180^\circ$ ).  
 $360^\circ + 180^\circ = 540^\circ$

ODER:

Sonstige korrekte Herleitung

z.B.

Das Fünfeck wurde in 3 Dreiecke zerlegt und die Innenwinkelsummen wurden korrekt in jedes Dreieck eingetragen (je  $180^\circ$ ).

ODER:

Das Fünfeck wurde in ein Dreieck und ein Viereck zerlegt und die Innenwinkelsummen wurden korrekt eingetragen ( $180^\circ$  bzw.  $360^\circ$ )

FALSCH

alle fehlerhaften, falschen oder unvollständigen Antworten

Z.B.:

Messen der Innenwinkel und Addition der gemessenen Winkelgrößen.

## Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da begründet dargelegt werden muss, dass die Innenwinkelsumme eines Fünfecks  $540^\circ$  beträgt. Dazu ist es erforderlich, eine Strategie zu entwickeln (K2), mit Hilfe derer die mehrschrittige Argumentation (K1) erfolgen kann. Dabei sind der Umgang mit der gegebenen Darstellung (K4) sowie das Wissen über Winkelgrößen in Dreiecken unerlässlich (K5). Es gibt mehrere Begründungsmöglichkeiten. Eine naheliegende Argumentation kann beispielsweise über die Zerlegung des Fünfecks in drei Dreiecke erfolgen. Die gesamte Winkelsumme beträgt dann  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ . Alternativ kann ein Punkt im Inneren des Fünfecks markiert werden, der mit allen Ecken des Fünfecks verbunden wird. Auf diese Weise entstehen fünf Dreiecke, deren Innenwinkelsummen zu addieren sind. Abschließend ist der Vollwinkel im Inneren des Fünfecks zu subtrahieren. Bloßes Nachmessen und Addieren der Innenwinkel im dargestellten Fünfeck ist hierbei nicht ausreichend.

Da die geforderte mehrschrittige Begründung eine Einsicht in ein allgemeingültiges Verfahren zur Begründung bzw. Herleitung der Innenwinkelsumme von n-Ecken (mit  $n > 2$ ) erfordert, ist es naheliegend, diese Aufgabe bereits dem Anforderungsbereich III zuzuordnen.

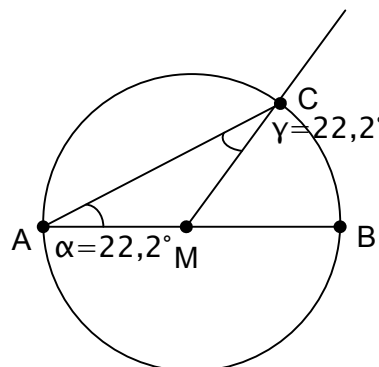
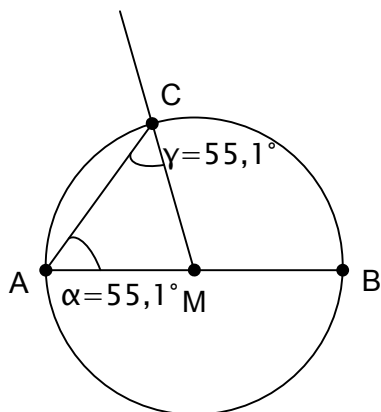
### Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Die Größen der Innenwinkel des gegebenen Fünfecks werden lediglich ausgemessen und anschließend addiert. Eine verallgemeinernde Begründung erfolgt nicht (K1).
- Die Begründungen sind unvollständig: Es wird z.B. nur begründet, dass die Innenwinkelsumme im 5-Eck größer sein muss als die Innenwinkelsumme im Viereck, also größer als  $360^\circ$  (K1).
- Die Formel  $((n-2) \cdot 180^\circ)$  zur Berechnung der Innenwinkelsumme eines n-Ecks wird ohne Bezug zur gegebenen Zeichnung angewandt (K1).
- Es wird nicht erkannt, dass das Fünfeck in andere n-Ecke (Dreieck bzw. Viereck) zerlegbar ist (K2, K4).

## Aufgabe 19: Winkel und Kreise

### Aufgabentext

Vera hat diese Konstruktion mit einem Computerprogramm (dynamische Geomtriesoftware) erstellt.





Sie sagt: „Wenn ich die Halbgerade MC um den Mittelpunkt M drehe, fällt mir auf, dass der Winkel  $\alpha$  immer genauso groß ist wie der Winkel  $\gamma$ , egal wo der Punkt C auf dem Kreis liegt.“

Ist dies tatsächlich immer richtig? Begründe deine Antwort.

## Aufgabenkennwerte

<b>Merkmale:</b>
Leitidee: 3. Raum und Form
Allgemeine Kompetenz: 1, 2, 4, 5, 6
Anforderungsbereich: III

## Kodieranweisung

<b>Aufgabe 19: Winkel und Kreise</b>	
Item: M3402401	
RICHTIG	
	Die Aussage wird als richtig erkannt und unter Verweis auf die Gleichschenkligkeit des Dreiecks begründet.  Z.B.: Da A und C auf dem Kreis k liegen, ist $ \overline{AM}  =  \overline{CM} $ . Das Dreieck AMC ist gleichschenkelig, also müssen die Basiswinkel gleich groß sein.  ODER: Das Dreieck AMC ist gleichschenkelig, also sind $\alpha$ und $\gamma$ gleich.
FALSCH	
	alle anderen Antworten

## Aufgabenbezogener Kommentar

Diese innermathematische Aufgabe gehört zur Leitidee Raum und Form (L3), da es hier erforderlich ist, innerhalb einer komplexen geometrischen Konstruktion die Beziehung der beiden (stets gleich großen) Winkel  $\alpha$  und  $\gamma$  zu erkennen und begründet darzulegen. Dazu ist zunächst die verbal beschriebene Situation zu erfassen (K6). Anschließend ist eine naheliegende Strategie zu entwickeln (K2), durch die eine angemessene Argumentation erfolgen kann (K1), d.h. insbesondere, dass erkannt werden muss (K4), dass es sich – unabhängig von der Lage des Punkts C auf dem Kreis – jeweils um ein gleichschenkliges Dreieck handelt, in dem die Basiswinkel jeweils gleich groß sind (K5). Ein bloßes Nachmessen der beiden Winkel  $\alpha$  und  $\gamma$  ist hierbei nicht ausreichend. Man kann die Behauptung auch unter Verwendung des Satzes des Thales beweisen, was aber eine

aufwendigere und weniger naheliegende Argumentation erfordert. Aufgrund der hohen Anforderung an das Argumentieren (Begründung einer verallgemeinernden Aussage) ist diese Aufgabe dem Anforderungsbereich III zuzuordnen. Im Unterricht bietet es sich an, Veras Behauptung durch die Anwendung von Geometriesoftware explorativ untersuchen zu lassen, um die Überzeugung zu vertiefen, dass Veras Beobachtung tatsächlich immer richtig ist.

**Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:**

- Die dargelegte komplexe geometrische Situation bleibt unverstanden (K4, K6).
- Es wird keine geeignete Strategie gefunden, mit der die Aussage verifiziert werden kann (K2).
- Es tritt das Missverständnis auf, dass die Größe der Winkel selbst immer unverändert bleibt, wenn man C auf dem Kreisbogen verschiebt (K4).
- Es wird nicht erkannt, dass AC und MC jeweils die Radien des Kreises um M sind. Somit kann die Folgerung, dass AMC ein gleichschenkliges Dreieck ist, nicht gezogen werden (K1, K2, K4).

## 4. Kompetenzentwicklung im Mathematik-Unterricht: Modellieren

### 1. Zur Kompetenz Modellieren

#### 1.1. Modelle und Modellieren

Sowohl in der nationalen als auch in der internationalen mathematikdidaktischen Diskussion wurde in den letzten Jahren die Bedeutung realitätsbezogener Problemstellungen immer stärker betont und ihre Behandlung im Unterricht eingefordert (siehe u.a. Kaiser, 1995). Bei der Auseinandersetzung mit derartigen Problemstellungen spielt die mathematische Kompetenz *Modellieren* eine zentrale Rolle. Sie ist daher in den Bildungsstandards Mathematik zu Recht als eine der sechs zentralen Kompetenzen fest verankert. Beim *Modellieren* geht es darum, realitätsbezogene Situationen durch den Einsatz mathematischer Mittel zu verstehen, zu strukturieren und das der Situation zugrunde liegende Problem einer Lösung zuzuführen sowie Mathematik in der Realität zu erkennen und zu beurteilen (Blum et al, 2007).

Die durch einen solchen Modellierungsprozess entstehenden mathematischen Modelle, die gewissermaßen ein „vereinfachtes mathematisches Abbild der Realität“ (Leiß/Blum, 2006, S. 41) sind und „nur gewisse, einigermaßen objektivierbare Teilaspekte berücksichtigen“ (Henn, 2002, S. 4), können deskriptiver oder normativer Art sein und demzufolge verschiedene Funktionen erfüllen. Mittels *deskriptiver* Modelle lassen sich reale Phänomene mathematisch beschreiben oder erklären, mit *normativen* Modellen lassen sich Teile der Realität gestalten oder vorhersagen (vgl. Henn, 2002, S. 6).

Deskriptive Modelle mit erklärender oder beschreibender Funktion können im Mathematikunterricht einen ersten Zugang zu Modellierungsaufgaben erleichtern, da sie im Allgemeinen in ihrer Komplexität überschaubarer sind als normative Modelle, die das Ziel haben, Vorhersagen über die Realität zu treffen oder ihre Merkmale vorzuschreiben.

In den letzten Jahrzehnten sind im Wesentlichen vier zentrale Argumente genannt worden, die einen stärkeren Realitätsbezug im Mathematikunterricht rechtfertigen. Sie sind gut mit den von Winter formulierten Grunderfahrungen vereinbar, die jeder Schüler im Mathematikunterricht machen sollte (siehe Abschnitt II). So sollen Modellierungsaufgaben dazu dienen, die zur Bewältigung und zum Verständnis mathemathhaltiger Umweltsituationen notwendigen Kompetenzen aufzubauen, den Schülern heuristische Strategien (z. B. Problemlöse- und Argumentationsfähigkeiten) zu vermitteln sowie Schüler zur Beschäftigung mit Mathematik zu motivieren und ihnen die Mathematik zugänglicher zu machen. Des Weiteren soll Schülern durch Aufzeigen von Realitätsbezügen ein ausgewogenes Bild von Mathematik als Wissenschaft vermittelt werden (vgl. Blum, 1996, S. 21 sowie Maaß, 2007, S. 15f). Auch Henn (2002) fordert, dass Schüler im Anschluss an ihre Schullaufbahn in der Lage sein sollen, als mündige Bürger zu agieren und Urteile über vorhandene Modelle zu fällen. Daher sollen Schüler im Unterricht an einfachen Beispielen Grunderfahrungen des Modellierens machen und sich mit diesen reflektierend auseinandersetzen (Henn, 2002, S. 4).

Modellierungsaufgaben in dem von uns verstandenen Sinne unterscheiden sich von den sog. eingekleideten Aufgaben dadurch, dass zu ihrer Bearbeitung ein „ehrlicher“ Bezug zwischen Realität und Mathematik hergestellt oder „ernsthaft thematisiert“ (Henn 2002, S. 6) wird. Dies ist bei den im Unterricht häufig dominierenden Einkleidungen nicht der Fall. Zu ihrer Bearbeitung ist es meistens ausreichend, den der Einkleidung zugrunde gelegten Algorithmus freizulegen und abzuarbeiten.

Um den Bezug zwischen Realität und Mathematik zu explizieren, kann auf den sogenannten Modellierungskreislauf als strategisches Instrument zurückgegriffen werden, da dieser den

idealtypischen Lösungsprozess von Modellierungsaufgaben auf einer Metaebene beschreibt (vgl. die Übersicht über verschiedene Varianten dieses Kreislaufs bei Borromeo Ferri, 2006). Die Variante von Blum/Leiß (2005, siehe Abb. IV.1) hat sich dabei als besonders hilfreich erwiesen. Dieser relativ komplexe siebenschrittige Kreislauf ist erfolgreich als deskriptives Instrument zur Beschreibung von realen Modellierungsprozessen sowie den dabei auftretenden kognitiven Hürden eingesetzt worden (vgl. u.a. Maaß, 2004, Galbraith/Stillman, 2006, Borromeo Ferri, 2006, Leiß, 2007). Er bietet eine geeignete Grundlage, auf deren Basis Modellierungsprozesse von Schülern im Detail rekonstruiert und analysiert werden können.

## 1.2. Der Modellierungskreislauf

Trotz der schon länger bestehenden Forderungen nach mehr Realitätsbezügen im Mathematikunterricht spielen Modellierungsaufgaben häufig nicht jene Rolle, die ihnen angemessen ist, wohl auch, weil ihre Behandlung den Unterricht anfangs sowohl für Schüler als auch für Lehrer (erheblich) anspruchsvoller macht. Für Schüler stellt eine Modellierungsaufgabe eine komplexe Anforderung dar, denn jeder der unten näher beschriebenen Teilschritte des Modellierungskreislaufs kann eine potentielle kognitive Hürde beim Lösen von solchen Aufgaben sein. Auch die Antizipation solcher potentieller kognitiver Hürden im Rahmen der Unterrichtsvorbereitung kann die vorbereitenden Arbeiten oft komplexer und zeitaufwändiger machen als dies beim Unterricht mit eher traditionellen Aufgaben der Fall ist (vgl. Blum, 1996). Ermutigend ist zu erwähnen, dass der auffordernde Charakter von Modellierungsaufgaben oft zu einer intensiveren Auseinandersetzung der Schüler mit diesen führt, und dass solche Aufgaben häufig vielfältige Möglichkeiten zur Binnendifferenzierung bieten. Somit kann im Vergleich zum traditionellen Unterricht, bei dem im Wesentlichen alle Schüler die gleiche Aufgabe in der gleichen Weise bearbeiten, die kognitive Aktivierung aller Schüler erhöht werden. Anfängliche Schwierigkeiten bei der Behandlung von Modellierungsaufgaben reduzieren sich, wenn adäquate Hilfen – beispielsweise der Modellierungskreislauf oder der Lösungsplan - zu ihrer Bearbeitung gegeben werden. Dabei ist das Bewusstmachen der einzelnen Teilschritte des Modellierens sowohl für Schüler als auch für Lehrer grundlegend. Im Folgenden wird daher zunächst der siebenschrittige Modellierungskreislauf dargestellt, um die einzelnen Teilaspekte des Modellierens detailliert aufzeigen zu können. Später werden dann ein vereinfachter Kreislauf (der sogenannte Lösungsplan, s.u.) vorgestellt und unterrichtliche Anregungen gegeben, die helfen können, möglichen Schwierigkeiten beim Einsatz von Modellierungsaufgaben im Unterricht zu begegnen.

Der in Abb. IV.1 dargestellte siebenschrittige Modellierungskreislauf gibt die einzelnen Schritte des Modellierens, von denen im Sinne der Bildungsstandards streng genommen lediglich die vier Teilschritte 2, 3, 5 und 6 zur Kompetenz *Mathematisch modellieren* gezählt werden, idealtypisch wieder. Dabei scheinen die einzelnen Bearbeitungsschritte beim Lösen von Modellierungsaufgaben linear aufeinander zu folgen. In der Regel „springen“ die Schüler jedoch mehrfach zwischen Mathematik und dem „Rest der Welt“ hin und her.

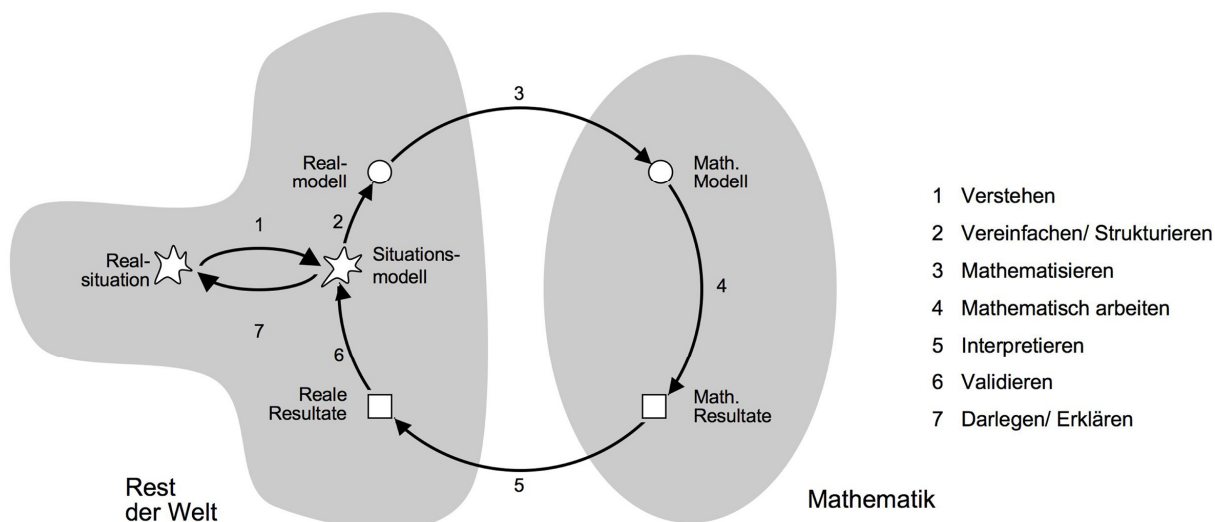


Abb. IV.1: Modellierungskreislauf von Blum/Leiß (2005)

Alle sieben Schritte des Modellierungskreislaufs werden im Weiteren am Beispiel der Aufgabe „Kanutour“ (Anforderungsbereich III) exemplarisch konkretisiert:

Die 21 Schüler der Klasse 8e möchten eine Kanutour machen. Leider sind im Kanuclub nicht genügend Kanus vorhanden. Daher möchte Frau Krell einen Kleintransporter mit Anhänger mieten, um weitere Kanus zu transportieren. In der Zeitung findet Frau Krell die beiden folgenden Angebote.

1. Angebot	2. Angebot
<b>Kleintransporter mit Anhänger!</b>	<b>Kleintransporter mit Anhänger!</b>
Einmaliger Grundpreis: 90 €	Einmaliger Grundpreis: 110 €
Preis pro gefahrenem Kilometer: 25 Cent (Kilometerpauschale)	Preis pro gefahrenem Kilometer: 0,15 € (Kilometerpauschale)

Vergleiche die beiden Angebote.

Beräte Frau Krell bei der Wahl eines Angebots für einen Kleintransporter mit Anhänger.

Notiere deine Argumente.

## 1. Verstehen

Die beschriebene Realsituation mit den beiden Angeboten für zu mietende Kleintransporter ist im ersten Schritt zu verstehen. Hierzu ist sinnentnehmendes Lesen erforderlich (*Mathematisch kommunizieren*). Beim Lesen der Aufgabenstellung wird zunächst ein mentales Modell der beschriebenen Situation konstruiert. Dieses sogenannte Situationsmodell enthält in diesem Fall unterschiedliche und teilweise für die Lösung irrelevante Angaben, wie z. B. die Anzahl der Schüler.

## 2. Vereinfachen/ Strukturieren

Als nächstes müssen die wichtigen Angaben identifiziert und die Fragestellung muss präzisiert werden, wodurch sich ein so genanntes Realmodell ergibt. Dabei ist es wichtig zu erfassen, dass sich der Mietpreis für einen Kleintransporter aus dem einmalig zu zahlenden Grundpreis sowie dem Preis pro gefahrenem Kilometer zusammensetzt. Des Weiteren ist es aufgrund fehlender Informationen zu der zurückzulegenden Fahrtstrecke erforderlich, diesbezüglich entweder eine konkrete Annahme (z.B. 20 km) zu treffen oder aber der Frage nachzugehen, ab welcher Entfernung sich welches der beiden Angebote lohnt.

### 3. Mathematisieren

Bei diesem Schritt müssen die Preisinformationen in die Mathematik übersetzt werden. Folglich können in Abhängigkeit vom vorher gebildeten Realmodell beispielsweise zwei Gleichungen aufgestellt ( $y = 0,25x + 90$  und  $y = 0,15x + 110$ ) oder eine passende Wertetabelle angelegt werden. Das hierbei entstehende mathematische Modell, mit Hilfe dessen die Tarifstrukturen beider Anbieter mathematisch erfasst werden, ermöglicht dann deren Vergleich.

### 4. Mathematisch arbeiten

Bei diesem rein innermathematischen Teilschritt wird durch Anwendung geeigneter mathematischer Kenntnisse und Verfahren ein mathematisches Resultat erzeugt. Die anzuwendenden Lösungsverfahren können je nach aufgestelltem Modell verschiedener Art sein (z. B. systematisches Probieren, graphische Lösung, rechnerische Lösung oder rein inhaltliche Überlegungen). Zur Bewältigung dieses Teilschrittes ist hier insbesondere die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* erforderlich. Bei bestimmten Aufgaben können zusätzlich die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren* und *Probleme mathematisch lösen* notwendig sein.

### 5. Interpretieren

Die erhaltene mathematische Lösung (z. B.  $x = 200$  mit  $x$ : Anzahl der gefahrenen Kilometer) ist nun zurück auf die Realität zu übertragen und in dieser als reales Resultat zu deuten. Die Lösung  $x = 200$  bedeutet hier, dass beide Angebote bei einer gefahrenen Strecke von 200 km gleich teuer sind und dass somit bei allen Entfernungen unter 200 km Angebot 1 günstiger ist und bei allen Entfernungen über 200 km Angebot 2 gewählt werden sollte.

### 6. Validieren

Das Resultat (200 km als Scheidepunkt zwischen den beiden Angeboten) ist nun anhand des Situationsmodells zu überprüfen: „Ist die Größenordnung plausibel?“, „Welche Entscheidung ist bei einer Entfernung von 201 km plausibel?“, „Ist die Genauigkeit sinnvoll?“, „Ist die Ausgangsfrage damit beantwortet?“. Eine solche Validierung erfordert auch die kritische Reflexion des (rein) rechnerischen Ergebnisses.

Führt eine solche Validierung zu einer Verwerfung des Resultats, ist der Modellierungskreislauf – beispielsweise mit veränderten Annahmen – erneut zu durchlaufen.

### 7. Darlegen

Die in der Aufgabe geforderte Beratung verlangt abschließend die Darlegung der gewonnenen Erkenntnisse. Dazu wird bei dieser Aufgabe in besonderem Maße die Kompetenz *Kommunizieren* (nämlich einem externen Adressaten Überlegungen und Ergebnisse verständlich darzulegen) benötigt.

Da der siebenstufige Modellierungskreislauf im Allgemeinen zu komplex ist und aus empirischen Studien zudem bekannt ist, dass Schüler Schwierigkeiten haben, zwischen den sieben Schritten dieses Modellierungskreislaufs zu unterscheiden (vgl. Maaß, 2004), ist es sinnvoll, für den unterrichtlichen Einsatz einen vereinfachten Kreislauf zu verwenden. Aus diesen Gründen wurde im Rahmen des DISUM-Projekts<sup>13</sup> ein so genannter Lösungsplan entwickelt, der die sieben Schritte des oben vorgestellten Kreislaufs auf vier Schritte verdichtet und somit dessen Komplexität wesentlich reduziert (siehe Abb. IV.2). Dabei entspricht der erste Schritt „Aufgabe verstehen“ auch Schritt 1 im siebenstufigen Modellierungskreislauf, der zweite Schritt „Modell erstellen“ fasst die Schritte 2 und 3

---

<sup>13</sup> Das Forschungsprojekt DISUM (Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik) ist ein im Jahr 2002 begonnenes DFG-Projekt unter der Leitung von Prof. Dr. W. Blum, Prof. Dr. R. Messner (beide Universität Kassel) und Prof. Dr. R. Pekrun (Universität München).

zusammen, der dritte Schritt „Mathematik benutzen“ entspricht Schritt 4 und der vierte Schritt „Ergebnis erklären“ vereint die Schritte 5 bis 7 des siebenschriftigen Modellierungskreislaufs. Eine bewusste Auseinandersetzung mit einem für Schüler und Lehrer gut nutzbaren Lösungsplan kann als strategisches Instrument eine erfolgreiche Bearbeitung von Modellierungsaufgaben unterstützen.

Solche Hilfen sind den Schülern bereits aus der Grundschule bekannt. Bereits in den ersten Schuljahren lernen Schüler zu benennen, was in einer Aufgabe gegeben und was gesucht ist, sowie dies von der Rechnung und der Antwort zu unterscheiden. Auf diesen grundlegenden Bausteinen des Lösungsprozesses einer Aufgabe aufbauend, kann zu Beginn der Sekundarstufe I gut der sog. Lösungsplan (vgl. auch 2.2.1) als vereinfachte Version des Modellierungskreislaufs erarbeitet werden, und daran lassen sich die wesentlichen Bearbeitungsschritte und Merkmale von Modellierungsaufgaben verdeutlichen. Hierauf aufbauend ist auch eine unterrichtliche Auseinandersetzung mit dem siebenschriftigen Modellierungskreislauf denkbar. Beiden Versionen ist gemeinsam, dass auf ihrer Grundlage die Lösungsprozesse bei Modellierungsaufgaben reflektiert und gesteuert werden können.

Zu diagnostischen Zwecken ist allerdings der siebenschriftige Modellierungskreislauf besser geeignet, da er die kognitiv ablaufenden Prozesse von Schülern beim Lösen von Modellierungsaufgaben wesentlich differenzierter erfasst als der demgegenüber vereinfachte Lösungsplan (vgl. auch Abschnitt 2.2.1).

#### Vier Schritte zur Lösung einer Textaufgabe („Lösungsplan“)

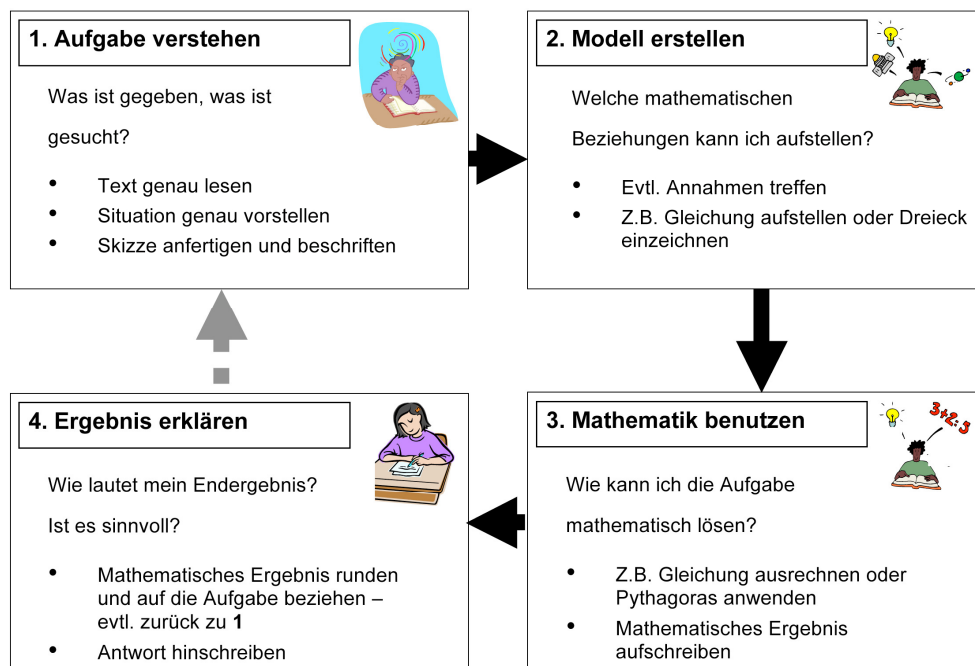


Abb. IV.2: Lösungsplan aus DISUM (vgl. Blum, 2007)

## 2. Möglichkeiten zur Förderung der Modellierungskompetenz

### 2.1. Modellieren im Unterricht

Ziel dieses Abschnitts ist es, anhand ausgewählter Aufgaben exemplarisch Möglichkeiten aufzuzeigen, die Kompetenz *Modellieren* im Unterricht zu fördern. Dieser Abschnitt kann es jedoch nicht leisten, ein systematisches Vermittlungskonzept zum Modellieren vorzustellen, zumal der Erwerb von Modellierungskompetenz ein langfristiger Prozess ist, der bereits im Primarbereich in angemessener Weise aktiviert werden sollte. Neben den hier vorgestellten Modellierungsaufgaben liefern vor allem neuere Schulbücher sowie beispielsweise die VERA 8-Aufgaben, zahlreiche Anregungen zu dieser Thematik (vgl. u. a. Dockhorn/Leiß, 2002, Drüke-Noe/Leiß, 2005, Leiß/Wiegand, 2006, Maaß, 2007, Leiß, 2007). Eine weitere wichtige Grundlage für die Entwicklung der Modellierungskompetenz stellt neben dem Einsatz adäquater Aufgaben die Beachtung der Qualitätskriterien für eine „gute Unterrichtspraxis“ (vgl. Abschnitt II) dar.

Im Folgenden werden exemplarisch einige Modellierungsaufgaben unterschiedlicher kognitiver Komplexität, d. h. unterschiedlicher Anforderungsbereiche, vorgestellt. Diese Aufgaben werden zunächst mit Bezug zum Modellierungskreislauf kurz analysiert, bevor anschließend Verbindungen zu einer weiteren ausgewählten mathematischen Kompetenz neben der des Modellierens aufgezeigt und Unterrichts Anregungen gegeben werden. Den Abschluss bildet eine Analyse der Aufgabe „Tanken“.

### 2.2. Beispiele für Modellierungsaufgaben im Unterricht

#### 2.2.1 Die Aufgabe „Fähre“ (Anforderungsbereich II)

Frau Weitzel fährt einen PKW mit 5 Sitzen. Sie muss in der nächsten Woche viermal auf die andere Rheinseite (und zurück) und benutzt die Autofähre. Welche Karte sollte sie kaufen, um möglichst wenig zu bezahlen?

Begründe deine Antwort mit einer Rechnung.

Preistafel			
	Einfach	10er-Karte	Wochenkarte
Fußgänger	1,40	8,-	7,-
Fahrrad, Moped	1,80	14,-	12,-
Motorrad	2,00	16,-	13,-
PKW bis 5 Sitze	3,00	24,-	17,-
PKW ab 6 Sitze (Kombi, Kleintransporter)	3,50	27,-	19,-

„Einfach“ bedeutet eine Einzelfahrt (ohne Rückfahrt)

Schüler müssen vor der Bearbeitung der Aufgabe „Fähre“ zunächst die vorliegende Realsituation und die in der Tabelle dargelegten Informationen verstehen, um ein adäquates reales Modell aufstellen zu können. Unter Berücksichtigung des Fahrzeugtyps, der Anzahl der wöchentlichen Fahrten und der angegebenen Preistafel ist die Realsituation daraufhin zu strukturieren. Bei diesem mehrschrittigen Vorgehen sind mehrere Informationen gezielt aus der im Aufgabentext beschriebenen Realsituation sowie aus der Tabelle zu entnehmen und miteinander zu verknüpfen. Erst danach kann ein geeignetes mathematisches Modell



aufgestellt werden, mit dessen Hilfe die Art der günstigsten Karte ermittelt wird. Dieses Resultat ist abschließend wiederum im Kontext zu deuten und zu validieren.

Um den Ablauf dieses Bearbeitungsprozesses sowie die einzelnen Teilschritte des Modellierens transparent und auf einer Metaebene bewusst zu machen, ist eine anschließende Reflexionsphase sehr geeignet, in der anhand der hier vorgestellten, in ihren Teilschritten überschaubaren Aufgabe „Fähre“ der erwähnte Lösungsplan (siehe Abb. IV.2) erarbeitet werden kann. Hierzu können den Schülern zunächst Reflexionsfragen zum Bearbeitungsprozess der Aufgabe gestellt werden, beispielsweise beginnend mit „Wie seid Ihr bei der Bearbeitung der Aufgabe vorgegangen?“, „Was habt Ihr zuerst gemacht und was danach?“, „Welche Schwierigkeiten sind aufgetreten und wie habt ihr diese gelöst?“ oder „Was hat Euch beim Bearbeiten der Aufgabe geholfen?“. Mit solchen und ähnlichen Fragen kann zunächst der erste Schritt des Lösungsplans „Aufgabe verstehen“ mit seinen einzelnen Facetten erarbeitet werden. Schülern soll in dieser Reflexionsphase der Aufgabenbearbeitung ebenso bewusst gemacht werden, dass sie einen Übergang von der Realität zur Mathematik vornehmen, indem sie ein „Modell erstellen“ (Schritt 2 des Lösungsplans). Während in dieser Aufgabe die für die Modellierung zu treffenden Annahmen bereits gegeben sind, kann bei der Erarbeitung des Lösungsplans besprochen werden, dass solche Annahmen je nach Aufgabe unter Umständen erst zu treffen sind.

Beim Verdeutlichen von Schritt 4 „Ergebnis erklären“ durch derartige Reflexionsfragen ist im Unterricht hervorzuheben, dass die Ermittlung eines Endergebnisses den Bearbeitungsprozess einer (Modellierungs-)Aufgabe nicht abschließt. Schüler sollten immer wieder dazu angehalten werden, ein Endergebnis bewusst zu reflektieren und zu beurteilen, ob es im Kontext sinnvoll ist. Geeignete Reflexionsfragen könnten im Aufgabenbeispiel „Fähre“ sein: „Wurden alle in der Aufgabe genannten Angaben und Annahmen berücksichtigt?“, „Ist die Ersparnis gegenüber der nächst teureren Karte angemessen, oder wäre der Kauf einer anderen Karte in diesem Realkontext sinnvoller?“ Die Sinnhaftigkeit des Stellens solcher und ähnlicher Reflexionsfragen belegt exemplarisch die Analyse erwartbarer Schwierigkeiten und Fehler bei der Bearbeitung dieser Aufgabe (vgl. Kapitel 3). Reflexionsfragen zum Bearbeitungsprozess gestatten, ausgehend von einem speziellen Beispiel das Allgemeine eines Aufgabenbearbeitungsprozesses herauszuarbeiten und in der geschilderten Weise den Lösungsplan sukzessive zu erarbeiten, um ihn bei der Bearbeitung anderer Modellierungsaufgaben bewusst anwenden zu können.

Die Kompetenz **Kommunizieren (K6)** spielt bei dieser wie auch bei vielen anderen Modellierungsaufgaben eine wesentliche Rolle und ist entscheidend für das erfolgreiche Aufstellen eines geeigneten Situationsmodells. Wie bei den meisten Modellierungsaufgaben geht es hier vor allem um das Verstehen von Texten und die Entnahme wichtiger Informationen („sinnentnehmende Seite“ des Kommunizierens). Während der Realitätsbezug von Modellierungsaufgaben insbesondere auch auf leistungsschwächere Schüler motivierend wirken kann, ist im Unterricht und selbstverständlich ebenso bei der Leistungsmessung generell zu beachten, dass vorliegende Leseanforderungen nicht zu komplex sein sollten, da sie sonst zu sehr die Aufgabenbearbeitung erschweren können. Dennoch sollte mit bestehenden Anforderungen an das Lesen offensiv umgegangen werden und keinesfalls auf die Behandlung textintensiver Aufgaben verzichtet werden. Hinweise zur Förderung von Lesestrategien beispielsweise mithilfe eines sog. Lesefächers finden sich beispielsweise in Mohl-Lamb (2007).

Im Unterricht kann der beschriebenen Komplexität des Kommunizierens in verschiedener Weise Rechnung getragen werden. Insbesondere ist es wünschenswert, den Schülern Strategien zu vermitteln, die sie befähigen, selbstständig komplexere Texte zu verstehen. Dazu können relevante Informationen beispielsweise optisch hervorgehoben oder auf das sorgfältige Lesen der Aufgabe als Grundlage für deren Bearbeitung verwiesen werden. Damit sich die Schüler die Realsituation möglichst konkret vorstellen können, kann eine Skizze der Realsituation mit den in die Modellierung eingehenden Angaben angefertigt werden. Konkret könnte in einer solchen Skizze zu der Aufgabe „Fähre“ der Rhein dargestellt, die einzelnen Überfahrten mit Pfeilen symbolisiert und diese mit den zu

zahlenden Preisen versehen werden, um einen besseren Überblick über die entstehenden Kosten zu gewinnen.

### 2.2.2. Die Aufgabe „Zoobesuch“ (Anforderungsbereich II)

Du siehst hier zwei Bildschirmfotos aus dem Internetauftritt des Zoos in Münster.

The screenshot shows the 'Allwetterzoo Münster' website. On the left is a navigation menu with 'WIR ÜBER UNS' and 'BESUCHERINFOS' (containing 'Öffnungszeiten', 'Anfahrt', 'BioCity', 'Delphinarium', and 'Hippomaxx'). The main content area is titled 'Eintrittspreise / Tageskarten'. It states: 'Die Eintrittspreise beinhalten auch den Einlass in das Pferdemuseum Hippomaxx und das Delphinarium im Allwetterzoo.' Below this, under 'Einzelpreise', it lists: 'Erwachsene 12,50 €' and 'Kinder und Jugendliche von 3 bis einschl. 17 Jahren 6,30 €'.

The screenshot shows the 'Allwetterzoo Münster' website. On the left is a navigation menu with 'WIR ÜBER UNS' and 'BESUCHERINFOS' (containing 'Öffnungszeiten', 'Anfahrt', 'BioCity', 'Delphinarium', and 'Hippomaxx'). The main content area is titled 'Jahreskarten'. It states: 'Die Eintrittspreise beinhalten auch den Einlass in das Pferdemuseum Hippomaxx und das Delphinarium im Allwetterzoo.' Below this, it lists: 'Familienkarte für Eltern und ihre Kinder von 3 bis einschl. 17 Jahren 135 EUR', 'Erwachsene 65 EUR', and 'Kinder und Jugendliche von 3 bis einschl. 17 Jahren 32,50 EUR'.

Herr und Frau Schöffler haben drei Kinder (fünf, sieben und zehn Jahre). Sie wollen eine Familien-Jahreskarte kaufen. Ermittle, wie oft sie zusammen in den Zoo gehen müssen, damit sich der Kauf im Vergleich zu den Tageskarten auch lohnt.

Notiere deine Rechnung.

Die Aufgabe „Zoobesuch“ ist hinsichtlich des Modellierens ähnlich komplex wie die Aufgabe „Fähre“. Beim Durchlaufen des Modellierungskreislaufs ist hierbei u. a. die Kompetenz **Probleme mathematisch lösen (K2)** erforderlich. Die Schüler wählen eine naheliegende heuristische Strategie (hier z.B. das „Zerlegungsprinzip“, im Sinne des Zerlegens des gegebenen Problems in Teilprobleme) und vereinfachen und strukturieren auf diese Weise die beschriebene Realsituation. Beim nächsten Schritt des Mathematisierens können sie die im Realmodell getroffene Annahme, dass stets beide Elternteile und alle drei Kinder zusammen den Zoo besuchen, verwenden, um schließlich durch mehrschrittiges mathematisches Arbeiten zunächst die Kosten für jeden einzelnen Zoobesuch zu errechnen. Diese sind dann in Beziehung zum Preis einer Familien-Jahreskarte zu setzen, um herauszufinden, ab welcher Anzahl an Zoobesuchen sich der Kauf einer Familien-Jahreskarte lohnt.

Im Unterricht kann am Beispiel dieser Aufgabe anschaulich die besondere Rolle des Interpretierens und Validierens im Modellierungsprozess deutlich gemacht werden. Besteht das aufgestellte mathematische Modell beispielsweise aus der Gleichung  $x \cdot (2 \cdot 12,5 + 3 \cdot 6,3) = 135$  (mit  $x$ : Anzahl der Zoobesuche), so ist die Rückübersetzung des erhaltenen mathematische Resultats  $x = 3,075...$  in die Realität eine nicht-triviale kognitive Leistung. So ist u.a. die Antwort „Ab 3 Zoobesuchen lohnt sich der Kauf einer Familien-Jahreskarte.“ zu erwarten. Diese sollte im Unterricht unbedingt aufgenommen und mit den Schülern thematisiert werden. Es ist nämlich keinesfalls eindeutig, ob diese Antwort als

falsch oder richtig zu werten ist, denn bei genau 3 Zoobesuchen im Jahr beträgt der Preisunterschied zwischen dem Kauf einer Familien-Jahreskarte und dem von Einzelkarten marginale 3,30 €, so dass man – fasst man die Aufgabe als realistische Problemstellung auf – bei geplanten 3 Zoobesuchen im Jahr sicherlich darüber streiten kann, ob sich Familie Schöffler nicht doch eine Familien-Jahreskarte zulegen sollte, um die Option zu haben, den Zoo noch ein viertes oder gar ein fünftes Mal ohne zusätzliche Kosten besuchen zu können. An diesem Beispiel wird also deutlich, dass selbst bei der Interpretation des mathematischen Resultats Spielräume vorhanden sind, die – je nach getroffenen Annahmen – zu unterschiedlichen Aussagen führen können. Diese Offenheit sollte als wesentliches Element realer Problemstellungen im Unterricht zugelassen und dazu genutzt werden, die Schüler anzuregen, den Realkontext bei der Interpretation mathematischer Ergebnisse (und auch bei den anderen Teilschritten des Modellierens) möglichst ernst zu nehmen.

### 2.2.3. Die Aufgabe „Apfelkauf“ (Anforderungsbereich I)

4 kg Äpfel kosten 9,60 €.

Berechne, wie viel 6 kg derselben Sorte kosten.

Dies ist eine – empirisch - sehr einfache Modellierungsaufgabe, die gleichsam bei ihrer Bearbeitung das Durchlaufen der einzelnen Schritte des Modellierungskreislaufs erfordert. Die vorzunehmenden Übersetzungen können jedoch alle direkt ausgeführt werden, und neben der Kompetenz des **technischen Arbeitens (K5)** sind keine weiteren Kompetenzen erforderlich. Zunächst ist die beschriebene Problemsituation zu verstehen. Anders als bei komplexeren Modellierungsaufgaben ist hier jedoch keine weitere Vereinfachung der Sachsituation nötig (Schritt 2 des Modellierungskreislaufs fällt hier also weg). Daher können die Schüler unmittelbar ein einfaches Proportionalitäts-Modell aufstellen, innerhalb dessen sie rechnerisch den gesuchten Preis für die Äpfel ermitteln. Das mathematische Resultat, hier der ermittelte Preis für 6 kg Äpfel, ist schließlich im Kontext zu deuten und auf seine Plausibilität hin zu prüfen, um mögliche Fehler aufzudecken.

Insbesondere das häufig vernachlässigte Validieren des Ergebnisses kann anhand dieser Aufgabe bewusst gemacht werden. Gerade offensichtliche Fehllösungen, wie etwa 57,60 € ( $9,60 \text{ €} \cdot 6$ ), geben Anlass hierzu und ermöglichen es, Fehler konstruktiv als Lernanlass zu nutzen. Die vorliegende Situation legt in besonderer Weise nahe, bereits vor der rechnerischen Bearbeitung der Aufgabe zu überschlagen, wie hoch der gesuchte Preis ungefähr sein wird. Um die Bedeutung des Validierens noch stärker herauszustellen, können Schüler aufgefordert werden, vorgelegte Ergebnisse zu anderen Aufgaben auf ihre Plausibilität hin zu prüfen, was zum Beispiel durch geeignetes Überschlagsrechnen erfolgen kann.

Alternativ kann im Rahmen des Validierens das unkritische Extrapolieren bei Aufgaben zu Proportionalitäten zum Gegenstand gemacht werden. Eine mögliche Aufgabe dazu könnte sein:

3 kg Äpfel kosten 5,99 €. Wie viel kosten 6 kg (50 kg, 500 kg) Äpfel dieser Sorte?
--

Während der Proportionalitätsansatz bei geringeren Mengen noch zulässig erscheint, kann er bei größeren Mengen zumindest in Frage gestellt werden. Auch der Kontext „Heizölkauf“ bietet sich für eine solche kritische Validierung an.

#### 2.2.4. Die Aufgabe „Gummibären“ (Anforderungsbereich III)

Nach Herstellerangaben werden vor dem Abfüllen von Gummibärchen in Tüten die Bären folgendermaßen durchgemischt: Je ein Sechstel grüne, gelbe, weiße und orangefarbene Bären und ein Drittel rote Bären. Die Hälfte der roten Bären schmeckt nach Erdbeere, die andere Hälfte nach Himbeere.

Luisa hat eine Minitüte bekommen, mit vier grünen, zwei roten, drei orangefarbenen, zwei weißen und einem gelben Gummibärchen. Sie sagt:

„Daran sieht man, dass die Angaben des Herstellers über die Mischung der Farben gar nicht stimmen können.“

Erkläre, was Luisa damit meint, und beurteile ihre Aussage.

Bei dieser Aufgabe wird die Kompetenz *Modellieren* auf höchstem Niveau benötigt, da ein vorgegebenes Modell zu bewerten ist. Hier sind damit insbesondere die letzten drei Schritte des Modellierungskreislaufs (Interpretieren, Validieren, Darlegen) von großer Bedeutung. Um Luisas Aussage zu beurteilen, müssen Schüler deren Interpretation zum vorliegenden stochastischen Modell (welches zunächst rekonstruiert werden muss) in Beziehung setzen, um sie dann validieren zu können. Dies setzt voraus, dass die Schüler ein grundlegendes Verständnis von Zufallsprozessen haben, damit sie beurteilen und schließlich argumentativ darlegen können, dass die Zusammensetzung der Gummibären in Luisas Minitüte den Angaben des Herstellers nicht widerspricht.

Die kognitive Komplexität dieser Aufgabe spiegelt sich in ihren hohen empirischen Schwierigkeitswerten wider und ist in der hier nötigen mehrstufigen Argumentation (**Kompetenz Argumentieren, K1**) begründet. Die Durchführung und Darlegung solcher begründeter Beurteilungen kann im Unterricht zur Verminderung von Schwierigkeiten separat geübt werden. Zahlreiche Unterrichtserfahrungen und -beobachtungen zeigen, dass es vielen Schülern Schwierigkeiten bereitet, ihre Lösungsprozesse strukturiert und angemessen darzulegen. Daher sollte auch dies mit Schülern geübt werden. Eine mögliche Vorgehensweise hierzu besteht darin, Schüler in Partnerarbeit ihre notierten Rechnungen oder Argumentationen austauschen zu lassen, wobei der jeweilige Partner diese nachvollziehen und verbalisieren muss. Dies gestattet, die Verständlichkeit der Darlegung zu überprüfen und zudem Lücken in der Argumentationskette aufzuzeigen. Eine andere Vorgehensweise kann darin bestehen, die einzelnen Elemente einer Argumentationskette in beliebiger Reihenfolge vorzugeben und diese von den Schülern begründet ordnen zu lassen. Auch hierbei sind weitere Varianten denkbar, indem etwa überflüssige Argumente hinzugefügt oder notwendige weggelassen werden.

Des Weiteren kann das Verständnis der vorliegenden Situation durch die Durchführung geeigneter Zufallsexperimente unterstützt werden. So können in einem Urnenexperiment, das auch mit dem Computer simuliert werden kann, aus einer großen Menge farbiger Kugeln, deren anteilige Zusammensetzung dem in der Aufgabenstellung angegebenen Mischungsverhältnis des Herstellers entspricht, 12 Kugeln gezogen und deren Farben notiert werden. Die Entwicklung eines vertieften Verständnisses von der Zufälligkeit der farblichen Zusammensetzung der 12 Kugeln erfordert, das Experiment mehrfach zu wiederholen und die einzelnen Ergebnisse zu protokollieren. Alternativ zu einem Urnenexperiment kann auch eine Simulation mit Hilfe eines Würfels durchgeführt werden, dessen sechs Seiten unterschiedlich gefärbt sind. Protokolliert man die Ergebnisse bei einer geringen Anzahl von Würfeln (z. B. sechs oder zwölf), wird deutlich, dass das Ergebnis nicht notwendigerweise die tatsächliche Verteilung der Farben auf den Seiten des Würfels wiedergibt und dass eine sehr hohe Anzahl von Versuchsdurchführungen erforderlich ist, um Stabilisierungen beobachten zu können.

## 2.2.5. Die Aufgabe „Tanken“ (Anforderungsbereich III)

### Tanken

Frau Stein wohnt in Trier 20 km von der Grenze zu Luxemburg entfernt. Sie fährt mit ihrem VW Golf zum Tanken nach Luxemburg, wo sich direkt hinter der Grenze eine Tankstelle befindet. Dort kostet der Liter Benzin nur 1,05 Euro, im Gegensatz zu 1,30 Euro in Trier.



Lohnt sich die Fahrt für Frau Stein?

Die Aufgabe „Tanken“ (dem DISUM-Projekt entnommen; siehe Blum/Leiß, 2006) ist eine realistische und zudem komplexe Modellierungsaufgabe. Der authentische Kontext wird u.a.

durch das gesellschaftliche Interesse am dargelegten Thema untermauert, insbesondere gab es im Laufe der letzten Jahre zahlreiche Zeitungsartikel zum Thema „Tanktourismus“ (siehe z.B. nebenstehenden Zeitungsartikel).

Zur Lösung der Aufgabe ist in besonderem Maße die Kompetenz **Modellieren** gefordert, es sind aber auch die Kompetenzen **Argumentieren**, **Problemlösen**, **technisches Arbeiten** und **Kommunizieren** notwendig. Für eine erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgabe müssen alle Teilschritte des siebenschrittigen

**„Rollende Bomben“**  
Benzinschmuggel nimmt deutlich zu / Sprit wird meist in nicht zugelassenen Behältern transportiert

VON ULF MAUDER, DPA

„Rollende Benzinbomben“ auf der Autobahn: Der Holzverschlag „Marke Eigenbau“ auf dem Kleintransporter aus Wittlich zieht alle Aufmerksamkeit auf sich. Die Polizei hat den Transporter in der Nähe der deutsch-luxemburgischen Grenze in der Nähe von Trier entdeckt. Die Polizei hat den Transporter in der Nähe der deutsch-luxemburgischen Grenze in der Nähe von Trier entdeckt. Die Polizei hat den Transporter in der Nähe der deutsch-luxemburgischen Grenze in der Nähe von Trier entdeckt.

... dass sie erwischt werden. Je höher in Deutschland die Preise steigen, desto rger wird der Tanktourismus, bestätigt auch der luxemburgische Hauptzollinspektor Guy Loesch. In Wasserbillig etwa reißt sich eine Tankstelle um ein weiteres. Gibt es ein Auto, das einen Liter Benzin für 1,05 Euro kauft, so wird es für 1,30 Euro in Deutschland bezahlt. Ein deutscher Zollbeamter berichtet, er habe im Juni im Großraum einer Kohlenwerkstatt einen Kleintransporter gefunden, der mit 1000 Litern Benzin beladen war. „Das Schlimmste dabei ist, dass die Behälter in den meisten Fällen nicht geprüft und zugelassen sind“, berichtet er.

Ein deutscher Zollbeamter berichtet, er habe im Juni im Großraum einer Kohlenwerkstatt einen Kleintransporter gefunden, der mit 1000 Litern Benzin beladen war. „Das Schlimmste dabei ist, dass die Behälter in den meisten Fällen nicht geprüft und zugelassen sind“, berichtet er.

ren nach Luxemburg geschickt haben. Wer erwischt wird, muss die Mineralölsteuer nachzahlen. Verfahren wegen Steuerhinterziehung und wegen unerlaubten Transports von gefährlichen Gütern sind möglich. Von 1990 kann die dem luxemburgischen Zollgesetz entsprechende Strafe bei Straftaten von 1 bis 5 Jahren betragen.

Die in Deutschland von anderen Herstellern wie im französischen „Total“ oder im belgischen „Shell“ hergestellten „Tanker“ sind für den Transport von Benzin zugelassen. „Da finden wir Wasserbehälter oder Großpackmittel“, sagt Scalia.

Abb. IV.3: Zeitungsartikel „Rollende Bomben“

Modellierungskreislaufs bewältigt werden, wobei an dieser Stelle auf den zweiten Schritt „Vereinfachen/Strukturieren“ näher eingegangen werden soll. Beim Erstellen des Realmodells ist zu beachten, dass zumindest zwei konkrete Annahmen zum Tankvolumen und zum Benzinverbrauch getroffen werden müssen, um die Fragestellung, ob sich die Fahrt für Frau Stein lohnt, beantworten zu können. Allerdings bietet die Aufgabenstellung die Möglichkeit, verschiedenste weitere Annahmen zu treffen, beispielsweise, dass Frau Stein einen gut bezahlten Beruf ausübt, so dass unter dieser Annahme der Zeitfaktor wichtiger erscheint als eine mögliche Kostenersparnis oder die Berücksichtigung des Verschleißes des Autos. Aufgrund der Offenheit der Aufgabe sind somit viele Schülerlösungen möglich und auch erwünscht. Dies bedeutet wiederum, dass Lehrkräfte den Lösungsraum der Aufgabe möglichst gut kennen sollten, um so während des Unterrichts Schülerlösungen möglichst schnell verstehen und Fehler diagnostizieren zu können, so dass sie optimal auf mögliche Fragen und Probleme reagieren und adäquat intervenieren können. Die oben erwähnte Lösungsvielfalt sollte im Unterricht angesprochen und mit den Schülern diskutiert werden, so dass Schüler zu der Einsicht gelangen können, dass es zu realitätsbezogenen Aufgaben bzw. Problemstellungen meist keine eindeutigen Antworten gibt, sondern dass diese von den getroffenen Annahmen, d.h. dem aufgestellten Modell, abhängig sind. Des Weiteren sollte gerade bei solch authentischen Problemstellungen wie „Tanken“ unbedingt eine Validierung des Ergebnisses bzw. des aufgestellten Modells erfolgen, so dass unter Umständen der Modellierungskreislauf mit veränderten Annahmen und einem modifizierten oder erweiterten Modell erneut (evtl. sogar mehrmals) durchlaufen werden muss bzw. kann.

Die Lösungsvielfalt und die Authentizität der Aufgabe legen es nahe, eine Projektarbeit zum Thema „Tanktourismus“ durchzuführen. So können beispielsweise Schülergruppen

beauftragt werden, zu den verschiedenen für die Problemstellung möglicherweise relevanten Aspekten, wie z.B. Tankvolumen eines VW Golfs, Verbrauch, Verschleißkosten oder Umweltbelastungen, Informationen zu beschaffen. Auf der Grundlage dieser Informationen können dann unterschiedliche Modellierungen vorgenommen werden, die abschließend im Klassenverband präsentiert und unter Berücksichtigung der wichtigsten Modellierungsaspekte reflektierend miteinander verglichen werden können.

Das Thema „Tanktourismus“ könnte zudem in einem fächerverbindenden Unterricht (Mathematik, Naturwissenschaften, Gesellschaftswissenschaften) vertieft werden.

### 2.3. Zusammenfassung

All diese Ausführungen zeigen, dass das Bewusstmachen aller einzelnen Teilschritte beim Durchlaufen des Modellierungskreislaufs die potentiellen Hürden für Schüler beim Lösen von solchen Aufgaben verringern kann, und dass es gilt, auch Teilschritte des Modellierens einzuüben und diese den Schülern bewusst zu machen. Zudem ist deutlich geworden, dass die Kompetenz *Modellieren* viele Teilkompetenzen umfasst und nahezu immer in Kombination mit anderen mathematischen Kompetenzen auftritt, so dass bei der langfristigen Förderung der Modellierungskompetenz notwendigerweise immer auch andere Kompetenzen (möglichst ausgewogen) in den Blick genommen werden müssen. Aus all dem lässt sich folgern, dass verständiges Modellieren für alle Beteiligten anfangs nicht sehr einfach ist. Dies zeigen theoretische Analysen ebenso wie empirische Befunde. Der Einstieg in die bewusste und reflektierte Behandlung von Modellierungsaufgaben kann jedoch gut mit einfacheren und erst allmählich komplexer werdenden Beispielen gelingen und es gibt ermutigende Hinweise, dass der Erwerb einer angemessenen Modellierungskompetenz gelingen kann. So antwortet Blum (2007) auf die Frage, ob Modellieren für Schüler zu schwierig sei, auf der Basis empirischer Befunde aus dem DISUM-Projekt: „Modellieren ist schwer, aber nicht zu schwer, vielmehr gibt es dichte Hinweise auf Gelingensbedingungen, deren Berücksichtigung – bei Konstanthalten anderer Bedingungen – bessere Lernerfolge mit sich bringt.“ Somit sind für das Lehren und Lernen folgende Aspekte von Bedeutung (vgl. Blum, 2007):

- Die eingangs genannten Qualitätskriterien für guten Mathematikunterricht (vgl. Abschnitt II.1.3) müssen speziell auch in einem modellierungsorientierten Unterricht berücksichtigt werden.
- Auch im modellierungsorientierten Mathematikunterricht muss stets die Balance zwischen größtmöglicher Schülerselbstständigkeit und geringstmöglicher Lehreranleitung gewahrt werden (im Sinne des bekannten Montessori-Prinzips „Hilf mir, es selbst zu tun“).
- Hilfreich für Schüler und Lehrer ist ein Werkzeug wie der Lösungsplan bzw. der Modellierungskreislauf (für Schüler als Hilfe bei allfälligen Schwierigkeiten im Lösungsprozess, für Lehrer als Basis für Diagnosen und Interventionen), dessen Gebrauch jedoch eingeübt werden muss.
- Modellierungskompetenz muss langfristig und gestuft aufgebaut werden, u. a. durch
  - eine allmähliche Steigerung der Komplexität von Aufgaben,
  - ein breites Spektrum von Aufgabentypen und eine systematische Variation der Kontexte,
  - den parallelen Aufbau heuristischer Fähigkeiten,
  - häufige Übungs- und Festigungsphasen.

Die in den vorangegangenen Abschnitten zu den einzelnen Aufgaben gegebenen Hinweise sollen dazu beitragen, einen solchen Unterricht zu fördern.

## 5. Literaturverzeichnis

### Kapitel 2: Fachallgemeine Erläuterungen

Blum, W./ Drüke-Noe, C./ Hartung, R./ Köller, O. (2006): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Bruder, R. / Leuders, T./ Büchter, A. (2008): Mathematikunterricht entwickeln 5.-10. Schuljahr: Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Klieme, E./ Neubrand, M./ Lüdtke, O. (2001): Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: PISA 2000 - Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Leske und Budrich, Opladen, S. 141-190.

Winter, H. (2003): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 8 (Hrsg.: Henn, H.-W. & K. Maaß). Franzbecker, Hildesheim, S. 6-15.

### Kapitel 4: Kompetenzentwicklung im Mathematik-Unterricht: Modellieren

Blum, W. (1996): Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven. In: Trends und Perspektiven (Hrsg.: G. Kadunz u. a.), Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 23, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 15-38.

Blum, W./ Drüke-Noe, C./ Hartung, R./ Köller, O. (2006): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Blum, W./ Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. In: mathematik lehren, Heft 128, S. 18-21.

Blum, W. et al. (Hrsg., 2007): Modelling and Applications in Mathematics Education. Springer, New York.

Borromeo Ferri, R. (2006): Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38, H. 2, S. 86-95.

Dockhorn, C./ Leiß, D. (2002): PISA weitergedacht. Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematik-Unterricht. Hess. Landesinstitut für Pädagogik (Hrsg.), Wiesbaden.

Drüke-Noe, C./ Leiß, D. (2005): Standard-Mathematik von der Basis bis zur Spitze. Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematik-Unterricht. Hess. Landesinstitut für Pädagogik [Hrsg.], Wiesbaden.

Galbraith, P./ Stillman, G. (2006): A framework for identifying blockages during transitions in the modelling process. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38, H. 2, S. 143-162.

Henn, H.-W. (2002): Mathematik und der Rest der Welt. In: mathematik lehren, Heft 113, S. 4-7.

Leiß, D./ Blum, W. (2006): Beschreibung der Kompetenzen. In: Blum, W./ Drüke-Noe, C./ Hartung, R./ Köller O. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I:

Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Scriptor, Berlin, S. 33-48.

Leiß, D./ Wiegand, B./ Blum, W. (2006): PISA-SINUS-Bildungsstandards. In: Steffens, U., Messner, R. [Hrsg.]: Pisa macht Schule. Konzeptionen und Praxisbeispiele zur neuen Aufgabekultur. Hess. Landesinstitut für Pädagogik, Wiesbaden, S. 63-125.

Leiss, D. (2007): Hilf mir es selbst zu tun. Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren. Franzbecker, Hildesheim.

Maaß, K. (2004): Mathematisches Modellieren im Unterricht. Franzbecker, Hildesheim.

Maaß, K. (2007): Mathematisches Modellieren – Aufgaben für die Sekundarstufe I. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Mohl-Lamb (2007): Sachtexte mit dem Lesefächer knacken. In: mathematik lehren, Heft 143, S. 68.