Humboldt-Universität zu Berlin
Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2012
8. Jahrgangsstufe (VERA-8)
Mathematik – Didaktische Handreichung

Modul B

Inhaltsverzeichnis

Allgemeine Erläuterungen im Fach Mathematik

Zuerst werden die wesentlichen Komponenten der Bildungsstandards Mathematik sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt. Danach wird eine der mathematischen Kompetenzen, das mathematische Problemlösen, anhand von typischen Aufgaben ausführlich erläutert und werden Hinweise zur unterrichtlichen Behandlung gegeben. Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen skizziert, wie das Fach Mathematik so unterrichtet werden kann, dass gute Chancen auf die Erreichung der durch die Standards vorgegebenen Ziele bestehen.

Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

1. Die Bildungsstandards Mathematik

Wie – fächerübergreifend – im Modul A ausgeführt worden ist, beschreiben Bildungsstandards die fachbezogenen Kompetenzen, die Schüler bis zu gewissen Zeitpunkten ihrer Schullaufbahn erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die nur in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Illustriert und konkretisiert werden solche Kompetenzen durch Aufgaben, zu deren Lösung diese Kompetenzen benötigt werden. Das wesentliche Ziel von Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern (siehe II.3) und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schüler zu verbessern. Daneben sollen die Standards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten ebenso wie Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele bis zu definierten Punkten in Bildungsgängen erreicht worden sind.
Konkret werden bei den Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss drei „Dimensionen“ unterschieden, die man als „Prozess“-, „Inhalts“- und „Anspruchs“-Dimension bezeichnen kann:

Die „Prozess“-Dimension besteht aus den allgemeinen mathematischen Kompetenzen, deren Erwerb im Mittelpunkt des Unterrichts stehen soll; im Einzelnen sind dies[1]:

- Mathematisch argumentieren (K1),
- Probleme mathematisch lösen (K2),
- Mathematisch modellieren (K3),
- Mathematische Darstellungen verwenden (K4),
- Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5),
- Mathematisch kommunizieren (K6).

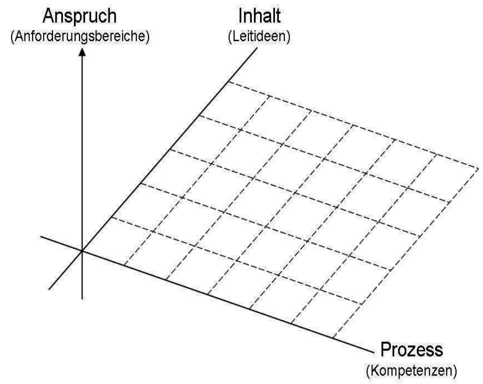


Abbildung. 1: Kompetenzmodell

Diese Aufschlüsselung von „mathematischer Kompetenz“ in einzelne Kompetenzen soll eine gezielte Entwicklung dieser Fähigkeiten und Fertigkeiten ermöglichen. Dabei ist es weder möglich noch beabsichtigt, die einzelnen Kompetenzen scharf voneinander abzugrenzen. Vielmehr ist es geradezu typisch für mathematisches Arbeiten, dass mehrere Kompetenzen im Verbund benötigt werden und sich die verschiedenen Kompetenzen gegenseitig durchdringen. Parallel zum Erwerb von

[1] Genauer werden die Kompetenzen im Buch „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ (Hrsg. W. Blum u.a., Cornelsen-Scriptor 2006) beschrieben.

Kompetenzen sind im Unterricht auch mathematisches Grundwissen sowie Grundvorstellungen von mathematischen Begriffen und Methoden langfristig aufzubauen.

Die „Inhalts“-Dimension wird bestimmt von den inhaltsbezogenen Leitideen, anhand derer die Kompetenzen erworben werden sollen; im Einzelnen sind dies:

- Leitidee Zahl (L1),
- Leitidee Messen (L2),
- Leitidee Raum und Form (L3),
- Leitidee funktionaler Zusammenhang (L4),
- Leitidee Daten und Zufall (L5).

Innerhalb dieser Leitideen gibt es konkrete Inhalte, die sogenannten inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen, die typischerweise zum mathematischen Schulcurriculum gehören und mit deren Hilfe die allgemeinen mathematischen Kompetenzen erworben werden sollen. Die – eher „phänomenologisch“ orientierten – Leitideen sind nicht identisch mit den klassischen Stoffgebieten der Schulmathematik (Zahlen und Größen, Geometrie, Algebra, Stochastik), es gibt aber offensichtliche enge Beziehungen zwischen Leitideen und Stoffgebieten. Die Strukturierung der Inhalte nach Leitideen soll stärker als bisher die Verbindungen zwischen den verschiedenen Stoffgebieten betonen (z.B. funktionale Beziehungen im geometrischen Kontext).

Die „Anspruchs“-Dimension ergibt sich aus den Anforderungsbereichen, die den kognitiven Anspruch kompetenzbezogener mathematischer Tätigkeiten – vor allem beim Bearbeiten von Aufgaben – auf theoretischer Ebene beschreiben sollen. Bei den Mathematik-Standards unterscheidet man pragmatisch drei solche Anforderungsbereiche (d.h. Anspruchsniveaus), die kurz mit

- „Reproduzieren“ (AB I),
- „Zusammenhänge herstellen“ (AB II),
- „Verallgemeinern und reflektieren“ (AB III)

überschrieben sind. Natürlich sind die Übergänge zwischen diesen Bereichen fließend. Je nachdem, wie viele Kompetenzen auf welchen dieser Anspruchsniveaus gefordert sind, werden Aufgaben einem der drei Anforderungsbereiche zugeordnet[2] Dieses theoretische Anspruchsniveau einer Aufgabe darf keinesfalls mit der empirischen Schwierigkeit der Aufgabe verwechselt werden (wobei kognitiv anspruchsvollere Aufgaben natürlich tendenziell auch schwieriger sind; mehr dazu im folgenden Abschnitt).

Bildungstheoretische Grundlage dieses dreidimensionalen „Kompetenzmodells“ ist der Allgemeinbildungsauftrag des Unterrichtsfachs Mathematik, wie er prägnant von Heinrich Winter beschrieben worden ist (Winter, 2003). Hierauf beziehen sich die von der KMK Verabschiedeten Bildungsstandards Mathematik in ihrer Präambel ausdrücklich: Schüler sollen im Mathematikunterricht drei Grunderfahrungen kennenlernen, nämlich Mathematik als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt um uns in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen, als geistige Schöpfung und Welt eigener Art,

1. als Hilfsmittel zum Erwerb fachbezogener und fachübergreifender Fähigkeiten.
2. Selbstverständlich kann und soll Bildung nicht auf fachbezogene kognitive Leistungen eingeschränkt werden; vielmehr schließt eine umfassende schulische Bildung u.a. auch soziale Kompetenzen sowie motivationale und emotionale Faktoren mit ein. Dies wird im nächsten Abschnitt exemplarisch deutlich, wenn es um die Förderung von Problemlösekompetenz geht.

[2] Siehe die Tabelle am Anfang der didaktischen Handreichung

2. Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die im Abschnitt dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik ist theoretischer Natur. Interessant ist nun natürlich zu wissen, wie schwierig einzelne Aufgaben tatsächlich sind und was Schüler verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge in Bezug auf diese Aufgaben tatsächlich „können"; hierfür braucht man empirische Daten. Damit kann man dann sowohl die Aufgaben – nach Schwierigkeit – als auch die Schüler – nach Leistungsfähigkeit – gewissen „Stufen" zuordnen, was allen Beteiligten hilfreiche Orientierungen geben kann.

Wie bereits in Abschnitt I ausgeführt worden ist, ist der VERA-8-Test aus Aufgaben zusammengesetzt, die an einer repräsentativen Stichprobe von annähernd 3000 Achtklässlern erprobt worden sind. Die Ergebnisse sind dann mithilfe gängiger statistischer Verfahren auf eine Skala mit Mittelwert 500 und Standardabweichung 100 transformiert worden[3]. Jeder Aufgabe ist hierdurch also ein solcher Kennwert, der ein Maß für die relative Schwierigkeit der Aufgaben ist, zugeordnet. Leichte Aufgaben haben somit auf dieser Skala Kennwerte von 400 und darunter, schwierige Aufgaben Kennwerte von 600 und darüber. Selbstverständlich stellt das, was als „leicht" oder „schwer" eingestuft wird, nur eine Momentaufnahme dar, die zu einem späteren Zeitpunkt – je nach unterrichtlichen Schwerpunktsetzungen – auch anders ausfallen kann.

Wie ebenfalls in Modul A ausgeführt, kann man die mathematische Kompetenz von Schülern in direkte Beziehung zur Schwierigkeit von Aufgaben setzen und auf derselben Skala abbilden[4]. Auf diese Weise ist eine inhaltliche Beschreibung von bestimmten Intervallen auf dieser Skala, Kompetenzstufen genannt[5] und damit auch eine Setzung von Standards aufgrund inhaltlicher Kriterien möglich.

Ursprünglich ist diese Skala sowohl für den Mittleren Schulabschluss als auch für den Hauptschulabschluss – jeweils abschlussspezifisch – in je fünf solche Intervalle eingeteilt worden (jeweils „Kompetenzstufen 1 bis 5" genannt). Ein neu entwickeltes integriertes Kompetenzstufenmodell für den Haupt- und den Mittleren Schulabschluss, das sechs Stufen hat, ersetzt nun diese zunächst getrennt erarbeiteten Modelle. Dieses Vorgehen trägt der schulstrukturellen Entwicklung in vielen Ländern der Bundesrepublik Deutschland in den letzten Jahren Rechnung. Hierzu zählen die generelle Tendenz zu zweigliedrigen Schulsystemen sowie die Tendenz, den Mittleren Schulabschluss als den Regelabschluss der Sekundarstufe I anzusehen. Dies ist verbunden mit einer erhöhten Durchlässigkeit für Schülerinnen und Schüler in Bildungsgängen, die regulär zum Hauptschulabschluss führen, d.h. mit der Möglichkeit, nachträglich den Mittleren Schulabschluss zu erwerben. Die Kompetenzstufen in diesem neuen integrierten Modell tragen die Bezeichnungen 1A, 1B, 2, 3, 4 und 5. Dabei haben z.B. Schülerinnen und Schüler aus Bildungsgängen, die zum Hauptschulabschluss führen, auf Stufe 1B (d.h. der zweiten der sechs Stufen) den Regelstandard erreicht, Schülerinnen und Schüler, die mindestens einen Mittleren Schulabschluss anstreben, erst auf Stufe 2,und analog auch für Regel- und Maximalstandards.

---

[3] Diese Transformation ist im Grunde willkürlich und wurde in Anlehnung an die PISA-Studie gewählt.

[4] Genauer wurde die Skala der Bildungsstandards so normiert, dass ein Schüler mit einem bestimmten Personen- (Fähigkeits-)Kennwert eine Aufgabe mit demselben Aufgaben- (Schwierigkeits-) Kennwert mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa zwei Drittel lösen kann.

[5] Dieser Begriff könnte insofern missverständlich sein, als Stufen der mathematischen Kompetenz von Schülern gemeint sind, nicht Stufungen der einzelnen Kompetenzen. Man könnte vielleicht besser – bezogen auf die Aufgaben – von „Schwierigkeitsstufen" sprechen. Genauere Erläuterungen und detaillierte Beschreibungen zu den Kompetenzstufen für den Mittleren Schulabschluss einschließlich vieler illustrierender Beispiele finden sich im Buch „Bildungsstandards: Kompetenzen überprüfen. Mathematik Sekundarstufe I" (Hrsg. M. Katzenbach u.a., Cornelsen-Scriptor 2009, Kap. 3.4, S. 15ff).

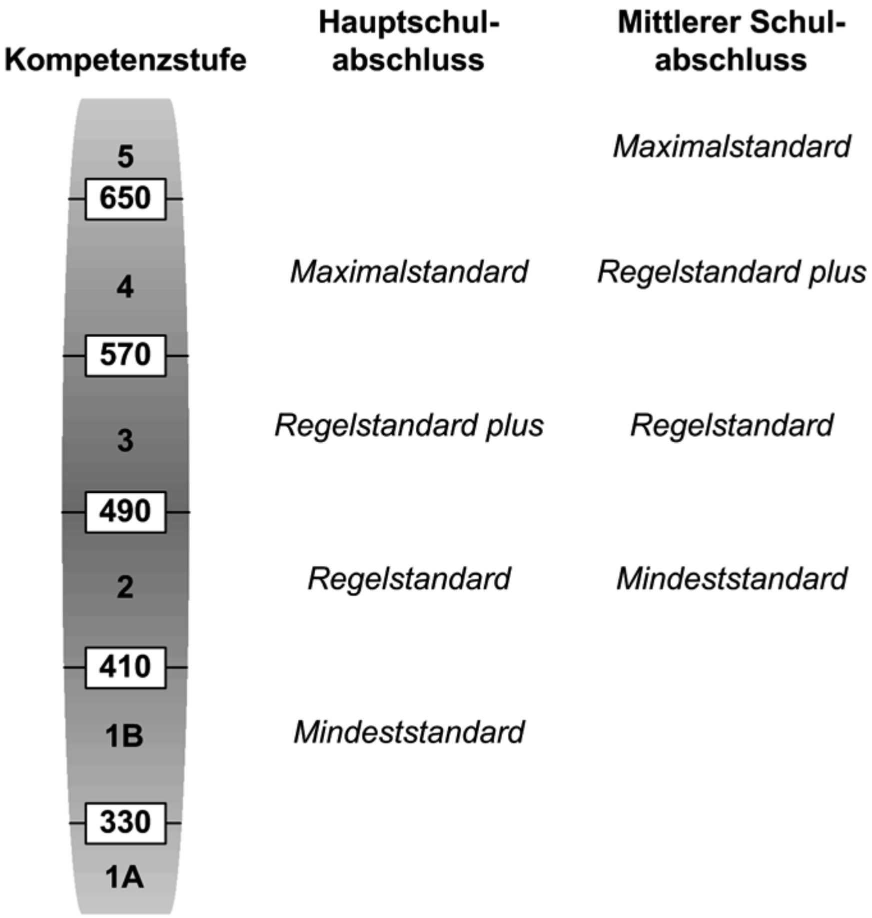
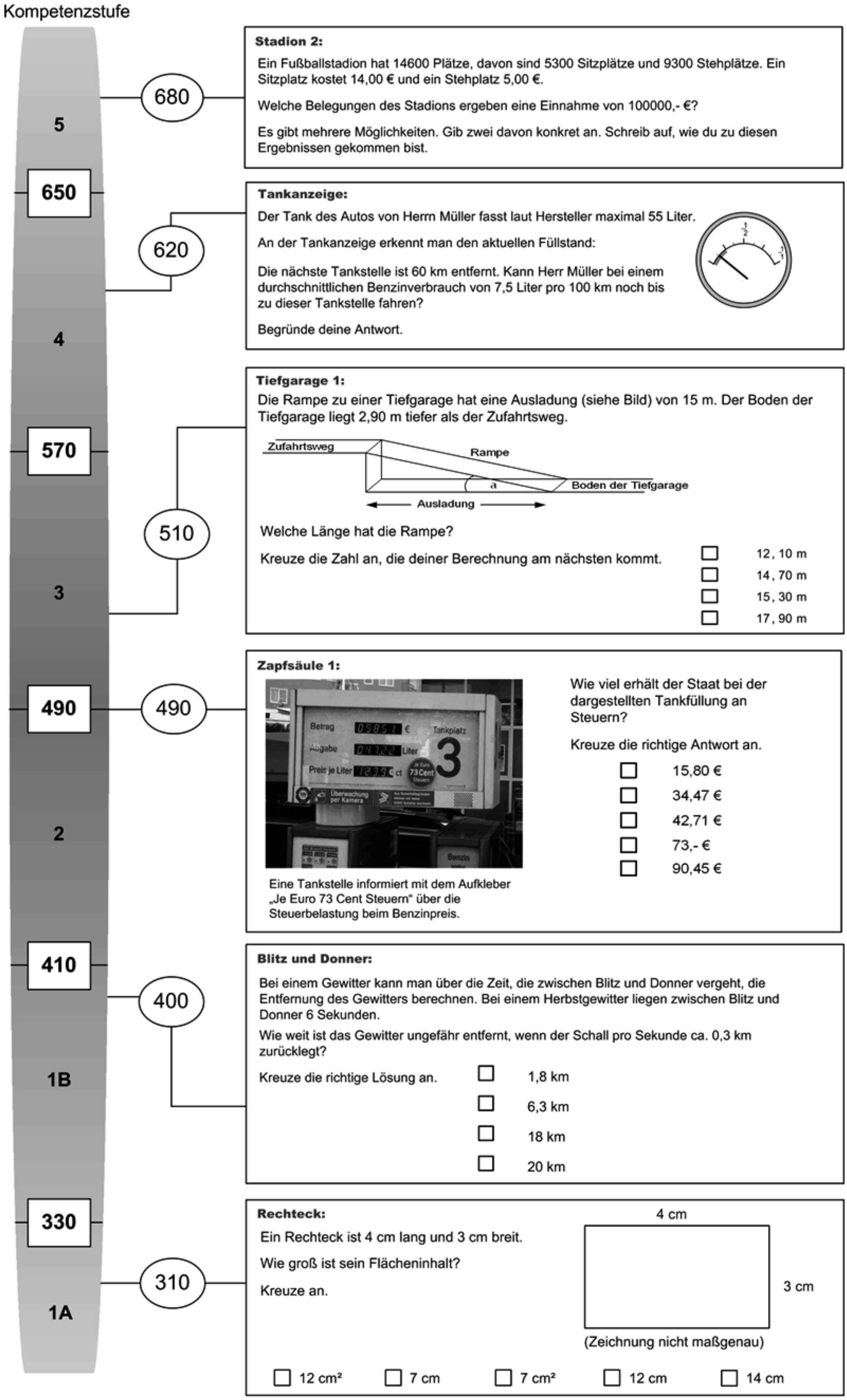


Abbildung 2: Lage von Mindest- und Regelstandards für die HSA- bzw. MSA-Population auf dem integrierten Kompetenzstufenmodell Mathematik

In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet worden.



Aus Platzgründen sind die Aufgaben in modifiziertem Layout dargestellt.

Abbildung 3: Illustration der Kompetenzstufen mithilfe von zugehörigen Beispielaufgaben

Die unterste Kompetenzstufe (Kompetenzstufe 1A) wurde nach oben hin bei 330 Punkten begrenzt. Auf Stufe 1A (d.h. unterhalb von 330 Punkten) werden Kompetenzstände erreicht, die das Verfehlen der Mindestanforderungen für HSA-Schülerinnen und Schüler indizieren. Kompetenzstufe 1B (ab 410 bis 490 Punkten) umfasst Kompetenzen, die typischerweise zu Beginn eines Hauptschulbildungsganges erreicht werden sollten. Dies bedeutet, dass auf Kompetenzstufe 1B basale Bereiche der Hauptschulmathematik beherrscht werden. Man kann hier von einem Mindeststandard für den Hauptschulbildungsgang sprechen. Es muss die Anstrengung aller Länder sein, alle Schülerinnen und Schüler der Hauptschulbildungsgänge in absehbarer Zeit zumindest auf dieses Kompetenzniveau zu heben. Langfristig sollten aber alle Bestrebungen dahin gehen, das Bildungsminimum auch für diese Schülerinnen und Schüler bei Kompetenzstufe 2 und damit analog zum Mindeststandard für die zum MSA führenden Bildungsgänge anzusetzen. Andernfalls besteht weiterhin die Gefahr, dass diese Schüler selbst in einfachen mathematikhaltigen schulischen, alltäglichen oder beruflichen Situationen nicht ohne Hilfe zurechtkommen.

Der Regelstandard, den die Schülerschaft zumindest im Durchschnitt erfüllen soll, ist demgemäß für die Schüler des Hauptschulbildungsgangs zurzeit auf der Kompetenzstufe 2 anzusetzen, während er für dien Mittleren Schaulabschluss auf Kompetenzstufe 3 (ab 490 Punkten) liegt. Wer den Regelstandard für den Mittleren Schulabschluss erfüllt, soll über „Sekundarstufe I-typische“ mathematische Kompetenzen verfügen, die sowohl einen Beitrag dazu leisten, in Alltag und Beruf als „mündiger Bürger“ zu handeln, als auch eine mathematische Grundbildung konstituieren, die u. a. elementare Begründungen, basale Begriffsbildungen und Standardmodellierungen mit einschließt. Dieser Regelstandard kann in der Kompetenzstufe 3 als erfüllt angesehen werden. Mit hinreichender Sicherheit können allerdings nur diejenigen Schülerinnen und Schüler dem Regelstandard entsprechende Aufgaben lösen, die in der oberen Hälfte dieser Kompetenzstufe liegen.

Mit Erreichung der Kompetenzstufe 4 (ab 570 Punkten) werden bereits die Regelstandards für den Mittleren Schulabschluss überschritten. Schülerinnen und Schüler in diesem Bereich verfügen über mathematische Kompetenzen, die über die grundlegenden Zielsetzungen der Bildungsstandards hinausgehen und ein Kompetenzniveau abbilden, das auf der Basis curricularer Vorgaben Ziel schulischen Unterrichts sein sollte. Will man ein Label für diese Stufe verwenden, so könnte man von Regelstandards plus für die MSA-Population sprechen. Schülerinnen und Schüler aus Hauptschulbildungsgängen, die Leistungen auf Kompetenzstufe 4 zeigen, haben dagegen bereits das erwartbare Maximum in diesem Bildungsgang erzielt und erfüllen daher bereits auf dieser Stufe den HSA-Maximalstandard.

Deutlich anspruchsvollere Aufgaben liegen in Kompetenzstufe 5, die bei 650 Punkten beginnt. Schülerinnen und Schüler, die auch diese Aufgaben hinreichend sicher lösen können, bilden die Spitzengruppe und erreichen Maximalstandards, die wesentlich über die grundlegenden Ziele der Sekundarstufe I hinausgehen und höchstens unter optimalen Lehr-Lernbedingungen erreicht werden.

Das Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik finden Sie im Anhang.

Beschreibung der zu testenden Kompetenzbereiche

Im VERA-8 Test Mathematik werden **alle** oben beschriebenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen und alle inhaltsbezogenen Leitideen getestet. Dabei wird bei VERA jedes Jahr eine der allgemeinen Kompetenzen besonders ausführlich in den Blick genommen. Im Mittelpunkt steht in diesem Jahr die Kompetenz **„Probleme mathematisch lösen“ (K2)**.Im Folgenden erläutern wir diese Kompetenz näher. Im ersten Abschnitt wird zuerst eine allgemeine Definition des Begriffs „Problem“ gegeben und diese auf die Fähigkeit bezogen, mathematische Probleme zu lösen. Verschiedene kognitive Niveaus dieser Kompetenz werden dann jeweils durch Beispiele illustriert. Im zweiten Abschnitt werden unterschiedliche

Heurismen[6] Vorschläge zum Aufbau der Kompetenz K2. Unter Verwendung eines in der Fachdidaktik etablierten und empirisch evaluierten Modells zum Erwerb von Problemlösefähigkeit wird ein Orientierungsrahmen vorgeschlagen, in dem Kompetenzentwicklung ermöglicht werden kann. Die wesentliche Annahme dieses Modells ist die Möglichkeit einer Vermittlung von Problemlösefähigkeiten durch das Bewusstmachen von Strategien beim Bearbeiten von mathematischen Problemen. Abschließend sind kommentierte Literaturempfehlungen gegeben, die helfen können, das Wissen über die vorgestellte Kompetenz zu vertiefen und zu erweitern.

Beschreibung der Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“

Die Bearbeitung von Problemen in verschiedenen Lebensbereichen beschäftigt die Menschen schon immer. Eine systematische Entwicklung der Problemlöseforschung als eigenständige Wissenschaft hat jedoch erst am Anfang des 19. Jahrhunderts mit entsprechenden Arbeiten in der Psychologie begonnen. Oft standen dabei mathematische Probleme im Fokus, wie z.B. die Analyse von Tätigkeiten eines Problemlösers bei der Bestimmung des Flächeninhalts eines Parallelogramms (Wertheimer, 1945/1964). Ein Problem liegt allgemein vor, wenn der Problemlöser ein Ziel hat, aber nicht unmittelbar weiß, wie er dieses Ziel erreichen kann (Duncker, 1935/1974). Anders ausgedrückt: Ist dem Problemlöser der Lösungsweg unbekannt und muss dieser neu entwickelt werden, wird eine Aufgabe für ihn zum Problem (Pólya, 1948). Der Problemcharakter einer Aufgabe kann hingegen verschwinden, falls die Aufgabe in einem kurzen zeitlichen Abstand wieder bearbeitet werden soll und nun durch bloßes Abrufen von bekannten Lösungsschritten gelöst werden kann. Die Anforderungen bei der Bearbeitung eines Problems bestehen somit in (anspruchsvollen) Transferleistungen. Dies bedeutet, dass vorhandenes Wissen und verfügbare Kompetenzen beim Problemlösen auf eine neue, unbekannte Fragestellung übertragen werden sollen. Neben motivationalen Lernvoraussetzungen sind Fertigkeiten und vor allem Fähigkeiten im Nutzen von (heuristischen) Strategien für die erfolgreiche Bearbeitung von Problemen entscheidend (Mayer, 1998). Während Fertigkeiten eine Grundlage für jegliches mathematische Arbeiten darstellen, wird das besondere Augenmerk beim Bearbeiten von Problemen auf Strategien oder Heurismen gelegt. Dabei unterscheidet man kognitive Strategien, welche sich unmittelbar mit der Verarbeitung von Informationen aus der Aufgabe beschäftigen, und metakognitive Strategien, die den gesamten Lösungsprozess planen, kontrollieren und regulieren. Entsprechend den genannten Schwerpunkten wird die Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ (K2) als „Finden und Anwenden geeigneter Lösungswege und -strategien“ definiert (KMK, Universität Kassel & IQB, 2008). Die Auswahl, Entwicklung oder Anwendung von Strategien kann in einer gegebenen Aufgabestellung auf verschiedenen kognitiven Niveaus gefordert sein, welche durch die folgenden Anforderungsbereiche näher charakterisiert werden (KMK et al., 2008):

Anforderungsbereich I: Lösen einer einfachen mathematischen Aufgabenstellung durch Identifikation und Auswahl einer naheliegenden Strategie.

Anforderungsbereich II: Finden eines Lösungsweges zu einer Problemstellung durch ein mehrschrittiges strategiegestütztes Vorgehen.

Anforderungsbereich III: Konstruieren einer elaborierten Strategie, um z. B. die Vollständigkeit einer Fallunterscheidung zu begründen oder eine Schlussfolgerung zu verallgemeinern; Reflektieren über verschiedene Lösungswege.

[6] Die Begriffe „Heurismen“ und „Strategien“ werden in diesem Beitrag synonym verwendet.

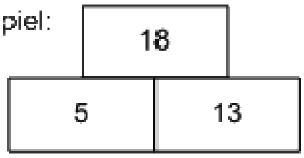
Zwei Beispielaufgaben:

Zahlenmauer

Zahlenmauern sind aus Steinen gebaut.

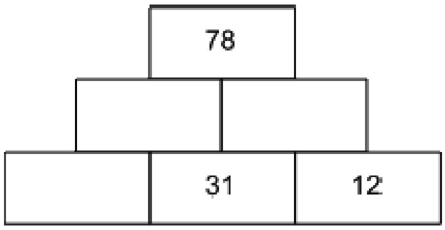
Dabei steht in jedem Stein die **Summe** der beiden darunter liegenden Steine.

Beispiel:



Teilaufgabe 1

Ergänze die drei fehlenden Zahlen in der Zahlenmauer.

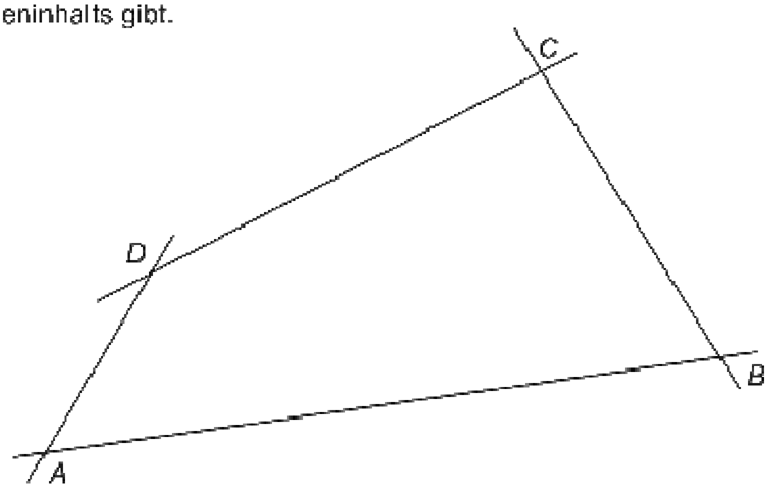


Diese erste Teilaufgabe der Aufgabe „Zahlenmauer“ wurde in den Anforderungsbereich I eingeordnet. Für ihre Lösung ist eine einfache, für viele Lernende bekannte Vorgehensweise notwendig. Diese besteht im Wesentlichen darin, zwei Zahlen zu erkennen, die mit Hilfe einer mathematischen Operation (Addition oder Subtraktion) eine dritte Zahl ergeben. Zwei hilfreiche Heurismen sind dabei Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten (siehe mehr zu diesen Strategien im nächsten Abschnitt).

Unregelmäßiges Viereck

Flächeninhalte von Rechtecken oder Dreiecken kann man leicht mit Formeln ausrechnen, wenn bestimmte Längen gegeben sind oder gemessen werden können.

Hier ist ein Viereck abgebildet, für das es keine Formel zur direkten Berechnung des Flächeninhalts gibt.



Beschreibe möglichst genau, wie man den Flächeninhalt dieses Vierecks sehr genau bestimmen kann.

Veranschauliche dein Vorgehen in der Abbildung, indem du z.B. die Strecken markierst oder einzeichnest, deren Länge du messen musst.

Abbildung 4: Aufgabe „Unregelmäßiges Viereck“

Die Aufgabe „Unregelmäßiges Viereck“ stellt deutlich höhere Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler als die Aufgabe „Zahlenmauer“. Hier soll eine Vorgehensweise für einen allgemeinen Fall (Anforderungsbereich III) entwickelt werden, welche bei der Berechnung von Flächeninhalten verschiedener Figuren hilfreich sein kann. Strategien wie „Zerlegen“ oder „Ergänzen“, die hier hilfreich sind, werden im nächsten Abschnitt erläutert.

Die Bandbreite der Verfügbarkeit einer jeweiligen Kompetenz wird hier in Anlehnung an empirische Daten in sechs Kompetenzstufen eingeteilt (KMK et al., 2008). Im Unterschied zu den Anforderungsbereichen einer Kompetenz, welche theoriegeleitet definiert sind, werden die Kompetenzstufen aufgrund tatsächlicher empirischer Schwierigkeiten beschrieben. In der untersten Kompetenzstufe (KS 0) liegen Aufgaben, die sehr viele Schülerinnen und Schüler lösen konnten. Schwierige, nur von ganz wenigen Lernenden bearbeitete Aufgaben bilden die fünfte Kompetenzstufe (KS 5). Speziell für die Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ können die Stufen ganz grob folgendermaßen beschrieben werden:

Speziell für die Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ können die Stufen ganz grob folgendermaßen beschrieben werden:

KS 1A: ausschließlich Routineverfahren verwenden,

KS 1B: einfache Verfahren anwenden,

KS 2: einfache vertraute Problemlösestrategien anwenden,

KS 3: naheliegende Problemlösestrategien anwenden,

KS 4: selbst entwickelte Problemlösestrategien anwenden,

KS 5: anspruchsvolle Problemlösestrategien anwenden und reflektieren.

Diese Beschreibungen der Kompetenzstufen verdeutlichen, dass mit wachsender Stufe die Transferprozesse beim Problemlösen sukzessiv anspruchsvoller werden. Im nächsten Abschnitt soll nun der Kern der Problemlösekompetenz, nämlich das Thema Strategien bzw. Heurismen, erläutert werden.

Heurismen beim Bearbeiten von mathematischen Aufgaben: Beschreibung und Illustration

Eine charakteristische Eigenschaft einer Heuristik ist, dass ihre einwandfreie Anwendung nicht zwingend zur angestrebten Lösung führt. Dies unterscheidet Heurismen (Strategien) von Algorithmen, deren korrekte Ausführung immer ein richtiges Lösungsergebnis ermöglicht. Einige typische Strategien werden nun vorgestellt und jeweils an einem Beispiel veranschaulicht.

1. Vorwärts- bzw. Rückwärtsarbeiten

Die Bearbeitung eines Problems kann durch die Anwendung der Strategie „Vorwärts- bzw. Rückwärtsarbeiten“ erleichtert werden. Der Problemlöser überlegt sich beim **Vorwärtsarbeiten**, welche Angaben gegeben sind, wie sie sinnvoll mathematisch verknüpft werden können und ob das Ergebnis dieser Verknüpfung ihn näher an die Lösung der Aufgabe heranbringt (Leitfrage: „Was kann ich hiermit ermitteln?“). Beim **Rückwärtsarbeiten** wird in umgekehrter Reihenfolge vorgegangen. Man analysiert, mit Hilfe welcher mathematischer Verfahren eine gesuchte Größe bestimmt werden kann und ob Voraussetzungen für die Anwendung solcher Verfahren gegeben sind. Die Überlegung geht hier also von der gesuchten Größe aus (Leitfrage: „Was brauche ich, um … zu ermitteln?“). Beide Strategien können mehrfach nacheinander oder auch im Wechsel angewendet werden.

Die Strategien Vor- und Rückwärtsarbeiten helfen, die Teilaufgabe 1 „Zahlenmauer“ zu lösen (siehe Abb. 1). Die Anwendung der Strategie Vorwärtsarbeiten beginnt mit der Analyse der Angaben: Beschriftet sind in der Beispielaufgabe ein Mauerstein oben (78) und zwei Mauersteine unten (31 und 12). Die Zahl 78 kann zwar in zwei Teile zerlegt werden, jedoch gibt es beliebig viele mögliche Zahlenkombinationen mit ganzen Zahlen und die Steine der zweiten Reihe können ohne weiteres nicht bestimmt werden. Die Zahlenangaben der zwei unteren Bausteine können hingegen unmittelbar benutzt werden, um einen der leeren Mauersteine mit der fehlenden Zahl zu versehen. Dadurch rückt man der Lösung der Aufgabe näher. Nun ist der rechte Mauerstein beschriftet und die Angabe auf dem oberen Baustein kann benutzt werden, um den linken Baustein der zweiten Reihe zu berechnen. Analog kann auch die Zahl auf dem letzten Baustein unten links ausgerechnet werden.

2. Analogiebildung

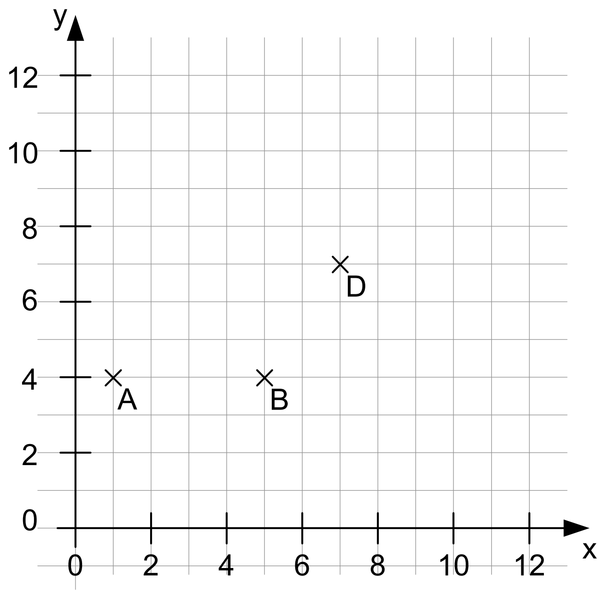
Steht man vor einem neuen Problem, ist es oft hilfreich zu überlegen, ob man schon einmal eine ähnliche Aufgabe bearbeitet hat und wie man dabei vorgegangen ist. Gelingt es, sich an ein solches Problem zu erinnern und sind die einzelnen Lösungsschritte noch im Gedächtnis präsent, kann man beim Bearbeiten des neuen Problems analog vorgehen. Insbesondere bei der Bearbeitung von kontextbezogenen Aufgaben gestaltet sich die Suche einer ähnlichen Aufgabe oft als nicht trivial, da Schülerinnen und Schüler die Gemeinsamkeiten von Problemen oft anhand der Kontexte und nicht anhand der zugrundeliegenden mathematischen Verfahren oder Kompetenzen bestimmen. Die Betonung von strukturellen Ähnlichkeiten aber auch von Unterschieden bei der Bearbeitung von verschiedenen Problemen ist daher eine wichtige Voraussetzung für die erfolgreiche Identifikation von „analogen" Aufgaben und somit auch für die Anwendung der Heuristik „Analogiebildung" beim Problemlösen. Die folgende Aufgabe „Punkt gesucht" verdeutlicht diese Heuristik.

Punkt gesucht

Gegeben sind die Punkte A, B und D in dem abgebildeten Koordinatensystem.

Gesucht ist ein Punkt P, der

- von den Punkten A und B den gleichen Abstand hat **und**
- von dem Punkt D den Abstand d von 5 Längeneinheiten hat.



Teilaufgabe 1

Konstruiere im obigen Bild einen Punkt P, der die gegebenen Bedingungen erfüllt.

Gib die Koordinaten des Punktes an.

P(|)

Abbildung 5. Teilaufgabe 1: „Punkt gesucht"

In der Teilaufgabe 1 „Punkt gesucht" werden Koordinaten eines Punktes gesucht, der zwei Bedingungen erfüllen muss. Bei der Suche nach einer Punktmenge, die den gleichen Abstand von zwei Punkten hat, erinnert man sich an die Mittelsenkrechte. Die Mittelsenkrechte wird oft z.B. beim Thema „geometrische Konstruktionen" gezeichnet. Analog dazu wird die Senkrechte zur Strecke AB im Koordinatensystem konstruiert. Ähnlich erinnert man sich bei der zweiten Bedingung an die Kreislinie, deren Punkte per definitionem den gleichen Abstand vom Punkt D besitzen. Schnittpunkte der Mittelsenkrechte zu den Punkten A und B und der Kreislinie mit dem Radius 5 Längeneinheiten um den Punkt D liefern dann zwei mögliche Koordinaten für den gesuchten Punkt P.

3. Systematisches Probieren

Falls die Lösung eines Problems nicht sofort gefunden werden kann, verfallen Lernende manchmal in trial-and-error (Versuch und Irrtum). Dabei suchen sie irgendwelche Zahlen in der Aufgabe und verbinden diese mit vordergründig passenden mathematischen Operationen, die bis dato bekannt sind. Ein solches Vorgehen ist bei Aufgaben, deren curriculare Zuordnung nicht offensichtlich ist (wie es insbesondere bei curricular breit angelegten Tests die Regel ist), selten effektiv. Bei Klassenarbeiten, die sich oft stark an gelernten Verfahren orientieren, können Lernende damit aber durchaus Erfolg haben und wenden es deshalb auch immer wieder an. Eine aussichtsreiche Alternative zu einem solch unreflektierten Kombinieren von Zahlen ist die Heuristik „systematisches Probieren“. Wie der Name schon sagt, geht man dabei systematisch vor und tastet sich dadurch immer näher an die richtige Lösung heran. Diese Heuristik kann an der folgenden Aufgabe „Glücksrad drehen“ veranschaulicht werden.

Glücksrad drehen

Gib ein Ereignis am Glücksrad an, dessen Eintreten eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ hat.

Abbildung 6: Teilaufgabe 2: „Glücksrad drehen“

Wie auch bei der Bearbeitung anderer Aufgaben gibt es bei der Aufgabe „Glücksrad drehen“ ver-schiedene Lösungswege, die es erlauben, die Lösung (ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit 1/5) zu finden. Da die Anzahl von Ereignissen beim „Glücksrad drehen“ beschränkt ist, kann ein gesuch-tes Ereignis durch systematisches Probieren erschlossen werden. Man bestimmt zuerst die Wahrscheinlichkeit, dass eins von 10 Feldern (z.B. Zahl „7“) als Ereignis definiert wird, und berechnet seine Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis beträgt 1/10. Da diese Zahl noch zu klein ist, wird die Anzahl von Ergebnissen erhöht und man berechnet die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das durch zwei mögliche Ergebnisse bestimmt wird (z.B. Zahlen „1“ oder „2“). Die Wahrscheinlichkeit für das letztgenannte Ereignis beträgt hier 1/5. Somit hat man die Aufgabe gelöst. Möglich wäre es auch, Ereignisse mit anderen Wahrscheinlichkeiten wie etwa z.B. 1/3 bestimmen zu lassen, die mehr Lösungsschritte speziell bei dieser Strategie erfor-dern würden.

Es gibt andere Strategien, die dieses Verfahren beschleunigen können. So kann man hier beim Ver-gleich der beiden Brüche 1/10 und 1/5 feststellen, dass der eine Bruch doppelt so groß wie der andere ist, deshalb muss die Anzahl der Ergebnisse verdoppelt werden.

4. Repräsentationswechsel

Eine bekannte Heuristik beim Bearbeiten eines Problems ist der Repräsentationswechsel. Oft werden Aufgaben in Textform angeboten, so dass Zusammenhänge zwischen verschiedenen Größen nicht direkt sichtbar sind. Gibt es mehrere solche Zusammenhänge, wird das Problem oft unübersichtlich. In dieser Situation kann das Erstellen einer bildlichen Repräsentation wie z.B. einer Skizze helfen, die Informationen in der Aufgabe zu strukturieren und einen nächsten Schritt im Lösungsprozess zu vollziehen. Während das Erstellen einer Skizze eine eher allgemeine Strategie ist, gibt es eine Reihe von Repräsentationen wie z.B. Zuordnungstabellen, Graphen oder verschiedene Typen von

Diagrammen, welche viel stärker auf bestimmte mathematische Inhaltsbereiche fokussiert sind. Das Erstellen einer passenden Repräsentation kann das weitere Schlussfolgern erleichtern. An dieser Stelle wird ein Zusammenhang mit der Kompetenz „Mathematische Darstellungen verwenden“ (K4) deutlich. Sicheres Beherrschen verschiedener Darstellungen sowie Wissen über ihre speziellen Vor- und Nachteile sind zwei wichtige Bausteine für die Anwendung der Heuristik „Repräsentationswechsel“ im Problemlöseprozess. Die Bedeutung dieser Strategie kann am Beispiel der Aufgabe „Zahlen gesucht“ deutlich gemacht werden.

Zahlen gesucht

Teilaufgabe 1

Schreibe **alle** dreistelligen Zahlen auf, die aus den Ziffern 1, 2 und 3 gebildet werden können. In keiner der Zahlen darf eine dieser Ziffern mehrfach vorkommen.

Teilaufgabe 2

Luisa weiß, dass man aus den vier Ziffern 1, 2, 3 und 4 insgesamt genau 24 verschiedene vierstellige Zahlen bilden kann, in denen keine dieser vier Ziffern mehrfach vorkommt.

Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlen können insgesamt gebildet werden, wenn man ebenso mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 vorgeht?

Gib dein Ergebnis an.

Abbildung 7: Aufgabe „Zahlen gesucht“

Bei der Bearbeitung von Teilaufgabe 1 „Zahlen gesucht“ ist es möglich, die für den Inhaltsbereich „Kombinatorik“ typische Repräsentation „Baumdiagramm“ zu wählen. Durch die Wahl eines Baumdiagramms werden alle gesuchten Permutationen sichtbar. Diese Variante der Visualisierungsstrategie kommt jedoch bei der Bearbeitung von Teilaufgabe 2 an ihre Grenzen. Nun ist es zu mühsam, alle 120 Ausgänge aufzuschreiben. Falls es sehr viele Möglichkeiten gibt, muss diese Heuristik modifiziert oder eine andere Strategie gesucht werden (siehe genauer bei der Heuristik „Fallunterscheidung“). Dieses Beispiel macht deutlich, dass Strategien je nach Aufgabentyp unterschiedlich gut geeignet sein können.

5. Fallunterscheidung

Auch wenn Fallunterscheidung im Unterricht der Sekundarstufe I bislang eher implizit vorkommt und ihre Anwendung erst in der Oberstufe und im Studium sichtbar wird, ist ihre Bedeutung bereits in mittleren Klassenstufen nicht zu unterschätzen. Bei der Lösung von Problemen mit hohen argumentativen Anteilen oder bei der Beurteilung der Gültigkeit mathematischer Aussagen, wie dies insbesondere bei Beweisaufgaben vorkommt, ist die Unterscheidung verschiedener Fälle wichtig. Diese Heuristik im Unterricht zu thematisieren und zu üben, ist daher ein wichtiger Bestandteil kompetenzorientierten Unterrichts. Eine Aufgabe, in der Fallunterscheidung in einer einfachen Form nützlich sein kann, ist die zweite Teilaufgabe der eben betrachteten Aufgabe „Zahlen gesucht“. Bei der Bearbeitung von Teilaufgabe 2 kann man zwischen den verschiedenen Stellen einer 5-stelligen Zahl unterscheiden, an denen die Ziffer 5 stehen kann. Diese Stellen repräsentieren verschiedene Fälle, die alle berücksichtigt werden müssen. Steht die Ziffer 5 an der 1. Stelle, gibt es 24 Permutationen. Wird sie an der 2., 3., 4. oder 5. Stelle platziert, sind es wieder jeweils 24 Permutationen. Somit gibt es insgesamt 5 mal 24 verschiedene 5-stellige Zahlen, die aus 5 Ziffern gebildet werden können.

6. Zerlegen und Ergänzen

Die Heuristik „Zerlegen“ bedeutet auf einer allgemeinen Ebene, dass ein komplexes Problem in Teilprobleme zerlegt wird, die nacheinander bearbeitet werden können. Im Prozess der Bearbeitung eines mathematischen Problems ist die Strategie „Zerlegen und Ergänzen“ aber

auch in bestimmten Inhaltsbereichen wie etwa bei der Berechnung von Flächeninhalten komplexer Figuren oder bei Volumenberechnungen hilfreich. Bei der Bearbeitung der Aufgabe „Unregelmäßiges Viereck“ (vgl. Abb. 2) wird ein Vorgehen entwickelt und beschrieben, welches eine Flächeninhaltsberechnung bei einem beliebigen Viereck erlaubt. Um dieses Problem zu lösen, können Schülerinnen und Schüler unterschiedlich vorgehen. Eine Möglichkeit wäre es, das Viereck in Teilfiguren zu zerlegen (Zerlegungsstrategie), deren Flächeninhalt nach dem Abmessen zugehöriger Strecken leicht bestimmt werden kann. Abschließend werden die Flächeninhalte aller Teilfiguren addiert.
Das Viereck zu einer anderen Figur zu ergänzen, deren Flächeninhalt bestimmt werden kann, wäre eine andere Heuristik (Ergänzungsstrategie). Dabei kann das Viereck z.B. zu einem größeren Dreieck ergänzt werden. Die Flächeninhalte eines großen und eines kleineren, neu hinzugekommenen Dreiecks werden im nächsten Lösungsschritt unter Verwendung der Längen jeweiliger Grundseiten und Höhen berechnet und ihre Differenz gebildet.

7. Planung, Kontrolle und Regulation

Wie am Anfang dieses Abschnitts ausgeführt wurde, kann die Anwendung einer Heuristik einen Erfolg bei der Bearbeitung eines Problems nicht garantieren. Es ist deshalb durchaus möglich, nach einiger Zeit festzustellen, dass die angewandte Heuristik nicht zum Ziel führt. Notwendig sind dann Änderungen im Problemlöseverhalten. Spätestens an dieser Stelle müssen metakognitive Strategien aktiviert werden. Bei metakognitiven Strategien werden Planung, Kontrolle und Regulation unterschieden.

Gute Problemlöser beginnen die Bearbeitung einer Aufgabe mit dem Erstellen eines Plans (Pólya, 1948; Schoenfeld, 1985; Schukajlow, 2011). Erscheint der entwickelte Plan aussichtsreich, kann man mit seiner Ausführung beginnen. Den Plan möglichst genau zu durchdenken ist eine wichtige Tätig-keit, die mögliche Sackgassen im Lösungsprozess umgehen lässt und entscheidende Vorteile im Lösungsprozess bringen kann. Beim Erstellen des Plans werden die oben genannten Heurismen ausgewählt und Schritt für Schritt bis zum Ergebnis auf die Inhalte projiziert. Sollten beim Ausführen des Plans Probleme auftreten, kann die metakognitive Strategie „Kontrolle“ diese Schwierigkeiten registrieren und ggf. über die Strategie „Regulation“ Änderungen im Lösungsprozess einleiten. Solche Prozesse erfolgen meist automatisiert, so dass Problemlöser sie oft gar nicht wahrnehmen. Ihre Offenlegung kann die Bearbeitung von mathematischen Problemen erleichtern.

Unterrichtliche Vorschläge zur Entwicklung der Kompetenz „Problemlösen“

Wie im vorherigen Abschnitt ausgeführt, geht es beim Unterrichten von Problemlösen vor allem um das Bewusstmachen, die Vermittlung und die eigenständige Anwendung von verschiedenartigen Strategien. Die erste und vielleicht wichtigste Voraussetzung für die Entwicklung der Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ ist die Auswahl geeigneter Aufgaben für den Unterricht. Solche Aufgaben sollen die Anwendung verschiedener Heurismen ermöglichen. Werden Schülerinnen und Schülern etwa nur einschrittige Aufgaben zur Bearbeitung vorgelegt, brauchen sie kaum einen Plan zu erstellen. Sie erkennen sofort den notwendigen Bearbeitungsschritt und führen diesen dann unmittelbar aus. Sind geeignete Aufgaben ausgewählt, stellt sich die Frage, welche methodische Inszenierung für die Bearbeitung von Problemen entwickelt werden sollte. Die Mehrzahl der hierzu vorhandenen Unterrichtskonzeptionen geht davon aus, dass das Bewusstmachen von Heurismen mit ihrer anschließenden Anwendung und Reflexion die Problemlösekompetenz von Schülerinnen und Schülern entscheidend verbessern kann.

Ein vielzitiertes und empirisch evaluiertes Modell zum Erlernen von Heurismen besteht aus den folgenden vier aufeinander aufbauenden Etappen, welche – immer wieder über einen längeren Zeitraum eingesetzt – die Entwicklung der Problemlösekompetenz fördern sollen (nach Bruder & Collet, 2011, S. 114).

1. **Etappe. Gewöhnen an Heurismen und ihr intuitives Verwenden.** Am Anfang einer Einheit zur Vermittlung des Problemlösens werden Lernende sukzessiv an das Reflektieren von Problemlöseprozessen herangeführt. Dabei lernen sie, richtige Fragen

zu stellen sowie ihren eigenen Lösungsprozess und die Lösungsprozesse von anderen zu beobachten und zu analysieren. Die Arbeit wird in dieser Etappe stark von der Lehrperson gelenkt.

2. **Etappe. Bewusstmachen von Heurismen und Einsicht in ihre Wirksamkeit**. Der nächste Schritt besteht darin, die Notwendigkeit des Lernens von Heurismen zu verdeutlichen und Vorteile des sicheren Beherrschens von Strategien aufzuzeigen. Hiermit ist es möglich, die subjektive Bedeutung von Heurismen zu verdeutlichen und dadurch auch die Motivation von Lernenden zu steigern. Die Einführung von einzelnen Heurismen sollte anhand von Aufgaben stattfinden, die die Anwendung einer bestimmten Strategie besonders nahe-legen.
3. **Etappe. Zeitweilige bewusste Übung und Anwendung der neu kennengelernten Heurismen**. Nun sollen Transferprozesse für schon bekannte Strategien stimuliert werden. Die Aufgaben sollen dann in ihrer Schwierigkeit streuen, damit eine bewusste Anwendung von Heurismen herausgefordert wird.
4. **Etappe. Schrittweise bewusste Kontexterweiterung für den Einsatz der Heurismen und ihre zunehmend automatisierte Nutzung.** In der letzten Phase wird angestrebt, die Transferprozesse von Strategien auszuweiten. Es sollen nun Probleme aus unterschiedlichen mathematischen Inhaltsbereichen bearbeitet werden, welche zugleich auch in unterschiedliche Kontexte eingebettet werden sollten. In diesem Prozess des Erwerbs von flexiblem, beweglichem Wissen über Heurismen sollte deren Anwendung zunehmend automatisiert werden.

Die unterrichtliche Realisierung des Lernens in diesen vier Etappen wird im Folgenden anhand einiger methodischer Anregungen veranschaulicht. Weitere Informationen findet man in entsprechenden Literaturquellen. Die Vorschläge vereinigen die einzelnen Phasen zu einem zusammenhängenden Ganzen.

Ein Einstieg in die Thematik „Problemlösen“ kann durch die Vermittlung der Nützlichkeit von Strate-gien anhand allgemeiner Problemstellungen erfolgen. In einer Unterrichtseinheit, die von Bruder (2002) federführend entwickelt und ab der Jahrgansstufe 5 erprobt wurde, wurden Schülerinnen und Schüler gefragt, welche Möglichkeiten es zur Verwendung von Mauersteinen gibt. Nachdem erste Vorschläge hierzu festgehalten wurden, wurden die verschiedenen Eigenschaften von Mauersteinen (Form, Farbe, Material …) besprochen. Über diese Eigenschaften konnte die Liste der Möglichkeiten zur Verwendung von Mauersteinen wesentlich erweitert werden. Mit Hilfe dieser Methode haben die Schülerinnen und Schüler gelernt, wie sie die Verwendungsmöglichkeiten eines Objekts anhand seiner Eigenschaften systematisch entdecken können. Um die Wirksamkeit dieser Strategie in verschiedenen Situationen zu demonstrieren, wurden andere Objekte genommen und nach ihren Verwendungsmöglichkeiten gesucht. Die Schülerinnen und Schüler haben dadurch erlebt, dass auch „Kreativität“ durch die Vermittlung von Strategien geschult werden kann, und waren positiv gegenüber der Vermittlung anstehender mathematischen Strategien eingestellt.

Wichtige Fragen, die bei der ersten Etappe eine Orientierung geben, können sein (Bruder & Collet, 2011, S. 115):

- Worum geht es?
- Was wissen wir schon im Zusammenhang mit dem Problem?
- Welche Methoden und Techniken stehen uns zur Verfügung?
- Welche davon eignen sich für das Problem?
- Wie kann man die gegebene Situation strukturieren?

Bei der Reflexion über die angewandten Strategien sind dann Fragen nützlich wie

- Welche mathematischen Inhalte haben uns geholfen, die Aufgaben zu lösen?
- Welche Strategien waren nützlich?
- Was war neu für uns?
- Welche Fragen sind offen geblieben?

Im nächsten Unterrichtsabschnitt (Etappe 2) können die erworbenen Kenntnisse nun speziell auf mathematische Aufgaben übertragen werden. Auch hier wird vorgeschlagen, Lernenden Kontexte anzubieten, zu denen sie selber mathematische Fragen stellen können (vgl. Bruder, 2002). Die be-sondere Rolle von Fragen bei der Vermittlung des Problemlösens wurde schon von Polya (1948) erkannt, der einen Fragenkatalog zu verschiedenen Bearbeitungsphasen des Problemlösen zusammengestellt hat. Diese Fragen beziehen sich im Wesentlichen auf Strategien, die beim Bearbeiten von Problemen nützlich sein können. In schülergerechter Sprache findet man solche Fragenkataloge z.B. bei Bruder & Collet (2011) oder Leuders (2001, S. 212).

Das Problem verstehen • Was wird gesucht? • Welche Angaben sind vorgegeben? (Hat man wirklich alle verwendet? Sind bestimmte Angaben we-sentlicher als andere?) • Fertige eine Zeichnung an. Wähle passende Bezeichnungen. • ….
Einen Lösungsplan aufstellen • Ist ein ähnliches Problem bekannt? • Kann man das zu lösende Problem zunächst vereinfachen? • …
Durchführung des Lösungsplans • So weit wie möglich die geplanten Schritte durchführen. • Kontrollieren, ob die Schritte jeweils richtig sind • …
Rückschau – Kontrolle • Sind die einzelnen Schritte korrekt? • Ist die Lösung sinnvoll? • Kontrollieren die Größenordnung durch Überschlagsrechnung. • …

Viele solcher Fragen wie z.B. „Was ist gegeben?“ oder „Was ist hier gesucht?“ sind sicherlich allgemein bekannt und gehören zum Standardrepertoire einer Lehrkraft. Ihre systematische Behandlung in Form von Hilfen für die Schülerinnen und Schüler kann wichtige Instrumente für selbständiges Problemlösen bereitstellen. Dabei gilt es, solche Hilfsfragen behutsam einzuführen bzw. bewusst zu machen und danach auch immer wieder bewusst einzusetzen. Die Einführung kann je nach methodischen Präferenzen der Lehrkraft sowohl durch ein stärker lehrergesteuertes Offenlegen eigener Überlegungen beim Bearbeiten eines Problems und unter Rückgriff auf mögliche Schwierigkeiten und Strategien als auch in einer stärker schülerzentrierten, explorierenden Form stattfinden.

Anschließende Durcharbeitungsphasen (Etappen 3 und 4) sollen Lernenden einen Raum für den Austausch nützlicher Vorgehensweisen anbieten. Dies kann erfahrungsgemäß besonders wirkungsvoll in kooperativen Lehr-Lern-Arrangements wie z.B. bei individueller Arbeit in der Gruppe umgesetzt werden (vgl. Schukajlow, Blum & Krämer, 2011). Bei dieser Arbeitsform sollen die Schülerinnen und Schüler sich zuerst allein mit der Aufgabe beschäftigen und erste Lösungsideen entwickeln („Jeder-für-sich-Phase“), dann tauschen sie sich in einer 4er- oder 5er-Gruppe über ihre Schwierigkeiten und Strategien aus („Murmelphase“) und ergänzen dann in der dritten Arbeitsphase ihre eigene Lösung („Aufschreibphase“). Mit der Erarbeitung und Übung von Heurismen ist deren Anwendung jedoch noch nicht gesichert. Mindestens genauso wichtig sind Reflexionsphasen im Plenum. Der Fokus bei solchen Reflexionsphasen sollte dabei nicht nur auf die Bearbeitung der Aufgabe gelegt werden. Notwendig sind reflektierende Gespräche zu den Fragen:

- Welche Heuristik war bei den bearbeiteten Problemen nützlich?
- Bei welchen Problemen erscheint die gewählte Lösungsstrategie aussichtsreich?
- Wie genau wird jede einzelne Heuristik ausgeführt?

Abschließend ist noch anzumerken, dass in allen genannten Unterrichtsphasen Hilfen und Rückmeldungen der Lehrkraft eine wichtige Rolle spielen. Weiterführende und ergänzende Literatur hierzu und zu den Problemlösestrategien allgemein finden sich in der nachfolgenden Literaturliste.

Anregungen für den Unterricht

Aufgaben wie die im Vera-Test enthaltenen können nicht nur zur Feststellung von Leistungsständen, sondern auch zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben per se bei den Schülern zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Schülerfähigkeiten angepasste Auswahl von Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so sagen alle empirischen Untersuchungen – ausreichend viele Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren u. v. a. m. Die Ergebnisse von nationalen und internationalen Leistungsvergleichen weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schüler im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht" achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Schüler und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus. Viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind enthalten z.B. in Bruder/Leuders (2008) oder in Blum u.a. (2006).

Die eben stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „Unterrichtsqualität" im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden[7]
Eine fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung, die Schülern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren, usw.) und bei der auch immer vielfältige Vernetzungen hergestellt werden sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität.

Eine konsequente kognitive Aktivierung der Lernenden, wo der Unterricht geistige Schülertätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.

Eine effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird, Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind, u. a. m.

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind (vgl. u a. Helmke (2003), Baumert u.a. (2004)). Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums kompetenzorientierter Aufgaben, darunter auch „selbstdifferenzierende" (d.h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schüler gleichermaßen geeignet sind). Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, indem sie Schülern ermöglichen, entsprechend ihren Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und

[7] Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum u. a. (2006).

selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schülerlösungen präsentieren und diskutieren lassen. In Abschnitt IV geben wir etwas konkretere Hinweise, wie Kompetenzen (hier speziell: die Modellierungskompetenz) im Unterricht gefördert werden können.

Quellenverzeichnis und Literaturliste

Zitierte Literatur zum Problemlösen

Bruder, R. (2002). Lernen, geeignete Fragen zu stellen. mathematik lehren (115), 4-8.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Duncker, K. (1935/1974). Zur Psychologie des produktiven Denkens (3. Aufl.). Berlin: Springer-Verlag.

KMK, Universität Kassel & IQB. (2008). Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Zugriff unter www.iqb.hu-berlin.de/dateien/Mathe_MSA.pdf

Leuders, T. (2001). Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. Instructional Science, 26, 49-63.

Pólya, G. (1948). How to solve it a new aspect of mathematical method. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando: Academic Press.

Schukajlow, S. (2011). Mathematisches Modellieren. Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur. Münster u.a.: Waxmann.

Schukajlow, S., Blum, W. & Krämer, J. (2011). Förderung der Modellierungskompetenz durch selbständiges Arbeiten im Unterricht mit und ohne Lösungsplan. Praxis der Mathematik in der Schule, 53(2), 40-45.

Wertheimer, M. (1945/1964). Produktives Denken (2 Aufl.). Frankfurt, Main: Kramer.

Themenbezogene Fachzeitschriften, andere weiterführende Literatur und eine Aufgabendatenbank zum Problemlösen

Themenbezogene Fachzeitschriften

Abels, L. (2002). Mathe-Welt. Ich hab´s. Tipps, Tricks und Übungen zum Problemlösen, In: mathematik lehren, 115, S.24-46, Friedrich Verlag, Velber.

Es handelt sich hierbei um ein Arbeitsheft, das Kindern mithilfe vieler verschiedener, alltagsbezogener Aufgaben heuristische Strategien und Hilfsmittel erklärt und anwenden lässt. Die Schülerinnen und Schüler sollen beispielsweise überlegen, was man alles mit einem Blatt Papier anfangen kann, mathematische Fragestellungen zu verschiedenen Situationen entwickeln und Aufgaben in mehreren Lösungswegen bearbeiten.

Bruder, R. (2002a). Lernen, geeignete Fragen zu stellen. Heuristik im Matheunterricht. In: mathematik lehren, 115, S.4-8, Friedrich Verlag, Velber.

Dieser Artikel bietet zum einen Beispielaufgaben mit Lösungswegen und Anleitungen zum Erlernen von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien in mehreren, genau beschriebenen Etappen und entsprechenden Leitfragen. Zum anderen liefert er einen theoretischen Hintergrund: Es werden Auswirkungen von zu leichten und schwierigen Aufgaben auf den Problemlöseprozess analysiert und dabei insbesondere die Problemlösekompetenz als Voraussetzung für das Erreichen anspruchsvoller Lernziele interpretiert. Ihre Grundlage und ihr Ziel sollen es sein, Fragenstellungen zu erkennen, zu formulieren und zu bearbeiten.

Bruder, R. u.a. (2002b). Problemlösenlernen in Verbindung mit Selbstregulation. Hintergrund zur Mathe-Welt „Ich hab`s – Tipps, Tricks und Übungen zum Problemlösen“. In: mathematik lehren, 115, S.59-62, Friedrich Verlag, Velber.

Es werden die empirischen und praktischen Hintergründe des Arbeitsheftes „Ich hab`s – Tipps, Tricks und Übungen zum Problemlösen“ dargelegt und die Herausforderungen einzelner Beispielaufgaben benannt.

Elschenbroich, H.-J. (2002). „Und dann ist da noch so ein Rest…“. In: mathematik lehren, 115, S.47-49, Friedrich Verlag, Velber.

Anhand einer in einem Internetforum diskutierten Optimierungsaufgabe wird gezeigt, wie man mit Dynamischer Geometrie-Software (DGS) eine anschauliche Lösung finden kann und dabei das Prinzip der Minimierung von Restflächen entdeckt.

Empacher, N. (2002). Ideenkiste. Brettspiel Move. In: mathematik lehren, 115, S.68-69, Friedrich Verlag, Velber.

Es handelt sich hierbei um eine Vorlage für ein Brettspiel für zwei bis drei Personen, bei dem jeder Spieler seine Spielfigur durch Kongruenzabbildungen wie Drehung, Verschiebung, Punkt- und Achsenspiegelung möglichst schnell auf einem Spielfeld bewegen und in verschiedene Positionen bringen muss.

Fritzlar, T. (2010). Problemlösen – mit Kopf, Hand, Symbol und Bild. Zur Bedeutung des Repräsentations- und Modalitätswechsels beim Problemlösen. In: Praxis der Mathematik in der Schule, PM 52, S.14-19, Aulis Verlag, Köln.

Ein Repräsentations- und Modalitätswechsel gilt zu Recht als wichtige heuristische Strategie beim Problemlösen. Seine Bedeutung für ein produktives mathematisches Tätigsein soll in diesem Beitrag exemplarisch verdeutlicht werden. Im Anschluss werden Aufgaben vorgestellt, mit denen entsprechende Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler erkundet und gefördert werden können.

Halverscheid, S. (2007). Wie viele 4x4-Sudoku gibt es? In: Praxis der Mathematik in der Schule, PM 49, S.30-33, Aulis Verlag, Köln.

Wie viele Sudoku-Rätsel gibt ist? Und warum sind das wirklich alle? Diese Fragen sind für das Original der 9x9-Sudokus schwierig zu beantworten. Wenn man sich aber auf eine 4x4-Version von Sudoku-Rätseln bezieht, können Fünftklässler der Frage nach der Anzahl der möglichen 4x4-Tableaus problemlösend und argumentierend nachgehen. Die Aufgabenstellung lässt Schülerinnen und Schülern mit unterschiedlichen Denkstilen die Freiheit, eigene Lösungswege zu beschreiten.

Henn, H.-W. (2002). Strukturiertes Üben mit dem Computer. In: mathematik lehren, 115, S.50-53, Friedrich Verlag, Velber.

In der vorgestellten Aufgabe wird ein einfacher Satz aus der Analysis unter dem Einsatz von CAS entdeckt und bewiesen.

Hußmann, S. (2007). Auf dem kürzesten Weg von Insel zu Insel – Brückenbau der Algolaner. In: Praxis der Mathematik in der Schule, PM 49, S.43-45, Aulis Verlag, Köln.

Das Brückenbauprojekt der Algolaner ist ein schönes Beispiel dafür, wie Problemlösen, Modellieren und Argumentieren im Rahmen einer Optimierungsaufgabe zum Tragen kommen. Auf der Suche nach dem kürzesten Weg probiert man einfach drauf los. Der

Vergleich der ersten Lösungsansätze veranlasst dazu, das Vorgehen zu variieren und Schritt für Schritt sich der besten Lösung zu nähern.

Lorbeer, W./Reiss, K. (2009). Probleme lösen und Begründungen finden. Wie viele Steine hat die 2009-te Pyramide? In: mathematik lehren, 155, S.22-26, Friedrich Verlag, Velber.

Dieser Artikel stellt eine Unterrichtsstunde mit Handlungsanweisungen und Schülerlösungen vor, in der mithilfe von Legosteinen die Anzahl der Bauklötze einer 2009- bzw. n-stufigen Pyramide ermittelt werden soll. Die auch hier enthaltene, handlungsorientierte Aufgabe zum Problemlösen wird dabei allgemein als notwendige Grundlage des Beweisens verstanden.

Rothe, N. (2002). Vorwärts – rückwärts – oder neu strukturieren? – Problemlösetechniken in Klasse 8. In: mathematik lehren, 115, S.14-17, Friedrich Verlag, Velber.

Mit Hilfe von Problemen aus der Algebra wird am Beispiel zweier Unterrichtsverläufe und dort auftretender Schüleraussagen gezeigt, wie Problemlösetechniken in Klassen 8 anschaulich vermittelt werden können. Das erste Problem behandelt die Frage, warum die Summe des Produkts aus vier aufeinander folgenden Zahlen und eins immer eine Quadratzahl ist. Im zweiten Problem gehen die Schülerinnen und Schüler dem System der Zahlenbrecher-Maschine nach. Am Ende des Unterrichts stehen jeweils verschiedene Beweise bzw. Verallgemeinerungen des algebraischen Problems.

Weiterführende Literatur zum Problemlösen

Fritzlar, T. (2010). „Investigations“ und Explorationen in der Elementargeometrie. In: Der Mathematikunterricht. Beiträge zur fachlichen und fachdidaktischen Gestaltung, Heft 3 – 2010, S. 3-13, Friedrich Verlag, Seelze.

Der Autor stellt ein Modell des Problemlösens vor und demonstriert anhand beeindruckender Erkundungen und Entdeckungen am Geobrett, dass Mathematik im Entstehen eine induktiv und erkundende Wissenschaft ist.

Greefrath, G. (2010). Problemlösen und Modellieren – zwei Seiten der gleichen Medaille. In: Der Mathematikunterricht. Beiträge zur fachlichen und fachdidaktischen Gestaltung, Heft 3 – 2010, S. 44-56, Friedrich Verlag, Seelze.

In diesem Beitrag wird die Brücke vom Problemlösen zum Modellieren im Mathematikunterricht geschlagen. Der Autor veranschaulicht anhand empirischer Untersuchungen und u.a. konkreter Dialoge, dass die genannten Kompetenzen eng miteinander verbunden sind, dass es verschiedene Planungstypen gibt und dass beispielsweise das mehrmalige Durchlaufen kleiner Bearbeitungszyklen zwischen realer und mathematischer Welt zur Lösung anwendungsorientierter Probleme beitragen kann.

Hußmann, S. (2007). Gut – besser – am besten – Optimieren überall. In: In: Praxis der Mathematik in der Schule, PM 49, S.1-6, Aulis Verlag, Köln.

Im Alltag begegnen einem immer wieder Situationen, in denen etwas optimiert werden muss. Doch wie findet man das Optimum? Funktionales Denken, Modellieren und Problemlösen gehören zu den zentralen mathematische Kompetenzen, die hier gefordert werden. Dieser Artikel zeigt an einigen Beispielen, wie und wann Optimierungsprobleme gewinnbringend im Mathematikunterricht eingesetzt werden können.

Vernay, R. (Hrsg.) (2010) Mathematik 5-10, Heft 13. Alles eine Frage der Strategie?

In dieser Ausgabe von Mathematik 5-10 werden Ihnen Aufgabenbeispiele angeboten, die in den "normalen" Unterricht eingebaut werden können. Verbunden mit Anregungen, die die Kompetenzen "Begründen" und "Argumentieren" in den Fokus nehmen.

Rehlich, H. (2010). Rechendreiecke – Problemlösen und verschiedene Denkstile von der Grundschule bis zur Universität. In: Der Mathematikunterricht. Beiträge zur fachlichen und fachdidaktischen Gestaltung, Heft 3 – 2010, S. 14-32, Friedrich Verlag, Seelze.

Der Autor stellt vor, wie schon Grundschulkinder durch aktive Auseinandersetzung mit Problemfeldern, wie Rechendreiecken, auf spielerische Weise zum Denken angeregt werden. Es wird eine Fülle verschiedener Darstellungen von Zusammenhängen zwischen Zahlen und Rechenpolygonen aufgezeigt, die verschiedenen Denkstilen entsprechen können und u.a. auf die Heronische Formel führen.

Scheu, G. (2003). Heuristisches Problemlösen nach den Regeln von G. Polya. In: Praxis der Mathematik in der Schule, PM 45, S.39-44, Aulis Verlag, Köln.

Anhand zweier Beispiele wird gezeigt, dass Problemlösen, mit oder ohne Computer, mit einigen Heurismen und einiger Übung gelernt werden kann. Als Anwendung ist auch an das Lösen von Wettbewerbsaufgaben aller Art gedacht.

Aufgabendatenbank zum Problemlösen

http://www.problemloesenlernen.dvlp.de/

Auf dieser Materialplattform der Arbeitsgruppe Fachdidaktik der Mathematik der TU Darmstadt stellt Ihnen das Team von proLehre.de Informationen und Material zum Themenbereich Problemlösen & Selbstregulation zur Verfügung. Diese Materialien ergänzen den von der Arbeitsgruppe Fachdidaktik regelmäßig durchgeführten Lehrerfortbildungskurs zum Thema Problemlösenlernen und Selbstregulation. Sie finden sowohl allgemeine Hinweise, Hintergründe und Informationen zu diesem Bereich, als auch konkrete Materialien für Ihren Mathematikunterricht unterteilt nach Klassenstufen.