



Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2012

8. Jahrgangsstufe (VERA-8)

Mathematik – Didaktische Handreichung

Testheft II



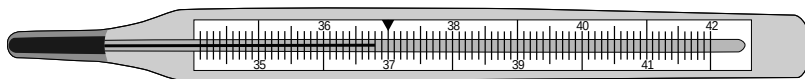
Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1: Fieberthermometer	4
Aufgabe 2: Zahlen gesucht.....	7
Aufgabe 3: Zahlenmauer	9
Aufgabe 4: Kreise färben.....	13
Aufgabe 5: Harzwanderung	14
Aufgabe 6: Zufallsversuche	17
Aufgabe 7: Glücksrad drehen	22
Aufgabe 8: Ungleichung erfüllen.....	25
Aufgabe 9: Tabelle	26
Aufgabe 10: Joggen	28
Aufgabe 11: Rolltreppe	32
Aufgabe 12: Briefmarkenschachteln	36
Aufgabe 13: Verkehrszeichen.....	39
Aufgabe 14: Quader	43
Aufgabe 15: Geometrische Körper erkennen.....	46
Aufgabe 16: Schulgrundstück.....	47

Nr.	Name der Aufgabe	Kompetenz- stufe	Kompetenz						Leitidee					AB
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	L1	L2	L3	L4	L5	
1.1	Fieberthermometer	IA				x			x					I
1.2	Fieberthermometer	IA					x		x					I
1.3	Fieberthermometer	III					x	x				x		II
2.1	Zahlen gesucht	IB		x					x					I
2.2	Zahlen gesucht	IV		x					x					II
3.1	Zahlenmauer	IA		x					x					I
3.2	Zahlenmauer	II		x			x		x					I
3.3	Zahlenmauer	IB		x			x		x					I
4	Kreise färben	IB				x	x		x					I
5.1	Harzwanderung	IA				x			x					I
5.2	Harzwanderung	II		x		x			x					II
6.1	Zufallsversuche	IB				x		x					x	I
6.2	Zufallsversuche	III		x				x					x	I
6.3	Zufallsversuche	V	x	x		x		x					x	II
6.4	Zufallsversuche	III		x				x					x	III
7.1	Glücksrad drehen	IV		x		x	x	x					x	II
7.2	Glücksrad drehen	III		x	x		x	x					x	II
8	Ungleichung erfüllen	II					x					x		I
9	Tabelle	II		x		x	x					x		II
10.1	Joggen	IV			x		x	x				x		II
10.2	Joggen	V			x		x	x				x		II
10.3	Joggen	V			x	x	x	x				x		II
11.1	Rolltreppe	II			x	x		x				x		I
11.2	Rolltreppe	IV			x	x		x				x		I
11.3	Rolltreppe	IV			x	x		x				x		II
12.1	Briefmarkenschachteln	IB				x					x			II
12.2	Briefmarkenschachteln	II				x					x			II
13.1	Verkehrszeichen	IV				x					x			I
13.2	Verkehrszeichen	IA				x	x				x			I
13.3	Verkehrszeichen	II				x					x			I
13.4	Verkehrszeichen	II				x					x			I
14.1	Quader	II				x	x			x				I
14.2	Quader	III				x	x			x				I
15	Geometrische Körper erkennen	II				x					x			I
16.1	Schulgrundstück	IV				x	x	x		x				I
16.2	Schulgrundstück	IV				x	x	x		x				I

Aufgabe 1: Fieberthermometer

Die Abbildung zeigt ein Fieberthermometer. Die schwarze dicke Linie zeigt die gemessene Körpertemperatur in Grad Celsius an.



Grafik: © IQB

Teilaufgabe 1.1

Gib an, wie viel °C die gemessene Körpertemperatur in der Abbildung beträgt.

Auswertung

RICHTIG	36,8 °C
---------	---------

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Teilaufgabe 1.2

Zu einem anderen Zeitpunkt beträgt die Körpertemperatur 37,9 °C. Sie steigt dann um 2,3 °C an.

Gib an, wie viel °C die Körpertemperatur nach dem Temperaturanstieg beträgt.

Auswertung

RICHTIG	40,2 °C
---------	---------

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Teilaufgabe 1.3

In den USA werden Temperaturen in Grad Fahrenheit (°F) gemessen.

Um Grad Celsius in Fahrenheit umzurechnen, kann man die folgende Formel benutzen:

$$F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$$

F: Temperatur in Grad Fahrenheit

C: Temperatur in Grad Celsius

Gib 40 °C in Grad Fahrenheit an.

Auswertung

RICHTIG	104 °F
---------	--------

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	3

Hinweise zur Bearbeitung

Die ersten beiden Teilaufgaben gehören zur Leitidee Zahl (L1). Teilaufgabe 1.1 liegen Vorstellungen von rationalen Zahlen zugrunde und in Teilaufgabe 1.2 wird ein vertrauter Algorithmus genutzt. Die dritte Teilaufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da eine Funktion als Mittel zur Beschreibung eines quantitativen Zusammenhangs verwendet wird.

In Teilaufgabe 1.1 gehen die Schülerinnen und Schüler mit einer Darstellung um (K4). Sie übertragen die vertraute und geübte Darstellung eines Zahlenstrahls auf den Anwendungskontext Thermometer und lesen die dargestellte Temperatur ab.

In Teilaufgabe 1.2 motiviert der gegebene Kontext zwar die erforderliche Addition, bleibt aber ansonsten praktisch unberücksichtigt. Die Formulierung „steigt um“ kann unmittelbar in „addieren“ übersetzt werden, um dann die gesuchte Temperatur zu berechnen (K5).

Bei der Bearbeitung von Teilaufgabe 1.3 ist dem Aufgabentext zu entnehmen, wie die gegebene Formel mit ihren Parametern zu deuten ist (K6), bevor dann die gegebene Temperatur eingesetzt und der zugehörige Wert in Fahrenheit errechnet wird (K5).

Die ersten beiden Teilaufgaben erfordern die direkte Anwendung vertrauter Verfahren und werden daher beide dem Anforderungsbereich I zugewiesen. Teilaufgabe 1.3 gehört schon zum Anforderungsbereich II, da auf verschiedenen Gebieten der Mathematik erworbene Kenntnisse mehrschrittig auf einen bekannten Sachverhalt angewendet werden.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 1.1:

- Die Temperatur wird ungenau abgelesen [Fehlösung z. B. 36,6 °C] (Defizit bzgl. K4).
- Der Skalierung wird eine Hundertsteileinteilung zugrunde gelegt [Fehlösung 36,08 °C] (Defizit bzgl. K4).
- Der mittige Strich zwischen 36 °C und 37 °C wird missachtet, sodass 36,5 °C mit 36,0 °C verwechselt wird [Fehlösung 36,3 °C] (Defizit bzgl. K4).

Zu 1.2:

- Die Maßzahlen werden subtrahiert. Möglicherweise wird „steigt an“ mit „fällt um“ verwechselt [Fehlösung 35,6 °C] (Defizit bzgl. K5).

Zu 1.3:

- Der Faktor vor C wird vernachlässigt [Fehlösung $40\text{ °C} + 32\text{ °C} = 72\text{ °C}$] (Defizit bzgl. K5).
- Nach dem Einsetzen der gegebenen Temperatur wird das Malzeichen als Pluszeichen fehlgedeutet [Fehlösung $\frac{9}{5}\text{ °C} + 40\text{ °C} + 32\text{ °C} = 73,8\text{ °C}$] (Defizit bzgl. K5).

Weiterarbeit und Förderung

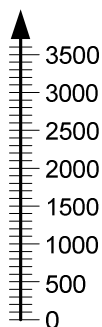
Bereitet das Ablesen der Temperatur vom Fieberthermometer Schwierigkeiten, so kann dies an anderen Skalen, die ebenfalls nicht digital sind, geübt werden. Hierzu bieten sich u. a. Tankanzeigen, Küchenwaagen oder Skalen, die Füllstände anzeigen, an. Im Sinne des ope-

rativen Durcharbeitens können wechselseitig sowohl Werte von Skalen abgelesen als auch auf diesen eingetragen werden, wobei der Detaillierungsgrad der einzelnen Skalen variiert werden kann. Man vergleiche hierzu etwa auch den didaktischen Kommentar zur Aufgabe „Milchmenge“ aus VERA-8 2010.

Gelingt in Teilaufgabe 1.2 die Deutung der die Temperaturänderung beschreibenden fachsprachlichen Begriffe nicht, so können diese zunächst bewusst gemacht und ihre Bedeutung graphisch am Fieberthermometer veranschaulicht werden. Auch ein Kontrastieren mit verwandten Begriffen, z. B. mit „fällt um“, liegt nahe. Diese Teilaufgabe kann ebenfalls im Sinne des operativen Durcharbeitens variiert werden, indem je zwei der drei Angaben Anfangszustand, Temperaturänderung und Endzustand genannt werden. Die jeweils zugehörigen Rechnungen können dann aufgestellt, im Sachkontext verbalisiert und schließlich rechnerisch und/oder graphisch gelöst werden, wobei sich der Schwierigkeitsgrad durch die Hinzunahme negativer Temperaturen auch erhöhen lässt. Alternativ können auch je zwei dieser drei Angaben am Thermometer visualisiert, passende Situationen daran verbalisiert und in Rechnungen übersetzt werden.

Einige solcher Aufgaben seien nachfolgend exemplarisch genannt:

- Zu einem anderen Zeitpunkt beträgt die Körpertemperatur 37,9 °C. Sie fällt dann um 2,3 °C. Gib an, wie viel °C die Temperatur anschließend beträgt.
- Ein Außenthermometer zeigt morgens 15 °C. Gegen Mittag zeigt es bereits 23 °C
 - a) Beschreibe die Temperaturänderung in Worten.
 - b) Skizziere ein Thermometer. Trage beide Temperaturen darauf ein und kennzeichne die Temperaturänderung.
- An einem heißen Tag fällt die Temperatur nach einem Gewitter um 11 °C und beträgt anschließend nur noch 18 °C. Ermittle die Temperatur vor dem Gewitter.
- Veranschauliche folgende Situation an der Anzeige des Heizöltanks (s. Abbildung): Im Tank befinden sich noch ungefähr 600 Liter. Beim Betanken werden 2300 Liter eingefüllt. Kennzeichne die Veränderung und markiere zusätzlich den neuen Füllstand.



Als Erweiterung von Teilaufgabe 1.2 kann auch die Aufgabe „Außenthermometer“ aus VERA-8 2010 behandelt werden (vgl. auch den didaktischen Kommentar hierzu).

Ausgehend von Teilaufgabe 1.3 kann man eine inhaltliche Ausweitung auf proportionale und lineare funktionale Zusammenhänge vornehmen. Deren Unterscheidung kann anhand der jeweiligen Funktionsterme und durch Gegenüberstellung der zugehörigen Funktionsgraphen geschehen, um so die Bedeutung des Absolutglieds und der Steigung der Geraden zu thematisieren. Besonders die Auswirkungen des ersten beschriebenen typischen Fehlers (Fehl-

lösung 72 °C) können am Graphen besprochen werden. Würde der Faktor $\frac{9}{5}$ keine Rolle

spielen, so würden sich alle in °C angegebenen Temperaturen um 40 °C von den in Fahrenheit umgerechneten Temperaturen unterscheiden. Dass dies nicht so ist, lässt sich schon anhand eines Gegenbeispiels, z. B. für 0 °C, zeigen.

Man vergleiche hierzu auch den didaktischen Kommentar zur Aufgabe „Lineare Funktionen anwenden“.

Aufgabe 2: Zahlen gesucht

Teilaufgabe 2.1

Schreibe **alle** dreistelligen Zahlen auf, die aus den Ziffern 1, 2 und 3 gebildet werden können.
In keiner der Zahlen darf eine dieser Ziffern mehrfach vorkommen.

Auswertung

RICHTIG	123; 132; 213; 231; 312; 321 Anm.: Die Reihenfolge der Zahlentupel ist irrelevant.
FALSCH	Alle unvollständigen, fehlerhaften oder falschen Antworten.

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1B

Teilaufgabe 2.2

Luisa weiß, dass man aus den vier Ziffern 1, 2, 3 und 4 insgesamt genau 24 verschiedene vierstellige Zahlen bilden kann, in denen keine dieser vier Ziffern mehrfach vorkommt.

Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlen können insgesamt gebildet werden, wenn man ebenso mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 vorgeht?

Gib dein Ergebnis an.

Auswertung

RICHTIG	120 ODER $5!$ ODER $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ODER $24 \cdot 5$
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	4

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört der Leitidee Zahl (L1) an, da die Schüler kombinatorische Überlegungen durchführen, um die Anzahlen der jeweiligen Möglichkeiten zu ermitteln.

Zur Bearbeitung der Teilaufgabe 2.1 ist es erforderlich, alle Permutationen der Ziffern 1, 2 und 3 zu finden. Hierzu bietet es sich an, die Ziffern von einer anfänglichen Kombination systematisch zu vertauschen. Alternativ kann die gesuchte Anzahl berechnet werden, indem man die für die einzelnen Ziffern zur Verfügung stehenden Anzahlen von Plätzen miteinander multipliziert ($3 \cdot 2 \cdot 1$) (K2).

Bei Teilaufgabe 2.2 ist ein systematisches Notieren aller einzelnen Permutationen aufgrund der hohen Anzahl von 120 verschiedenen Möglichkeiten kaum machbar. Somit ist bei dieser Teilaufgabe der bereits beschriebene rechnerische Ansatz naheliegender ($5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$). Zweckmäßigerweise kann auch die im Text angegebene Anzahl von Permutationen bei vier verschiedenen Ziffern genutzt werden, $24 \cdot 5 = 120$. Die Überlegung ist dabei, dass die Ziffer 5 an jeder der 5 Positionen stehen kann und die anderen 4 Ziffern jeweils beliebig permutieren können (K2).

Aufgrund der einfachen Strategie des Hinschreibens aller Möglichkeiten gehört Teilaufgabe 2.1 noch zu Anforderungsbereich I. Da es die Bearbeitung von Teilaufgabe 2.2 erforderlich macht, eine geeignete heuristische Strategie zu finden, gehört sie Anforderungsbereich II an.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 2.1:

- Es wird nur die Anzahl 6 aller Permutationen notiert. Die Zahlen selbst werden nicht angegeben.

Zu 2.1, 2.2:

- Es werden verschiedene Zahlenkombinationen mit den angegebenen Ziffern notiert, ohne jedoch auf die Einschränkung hinsichtlich der Stellenanzahl oder des Zahlenbereichs zu achten. So wird beispielsweise 12,3 als Zahl angegeben.
- Es werden Permutationen vergessen oder aber doppelt aufgezählt (Defizit bzgl. K2).

Zu 2.2:

- Die Ziffer 5 wird als Anzahl möglicher neuer Zifferkombinationen aufgefasst und somit zu den 24 verschiedenen Zahlen bei vier Ziffern addiert (Fehlösung 29; Defizit bzgl. K2).
- Die Anzahl möglicher Kombinationen wird mit 30 angegeben. Dies kann auf verschiedenen Überlegungen basieren.
 - Vermutlich verbirgt sich dahinter die Überlegung, dass es pro Ziffer 6 verschiedene Kombinationsmöglichkeiten gibt ($24 : 4 = 6$). Demzufolge gibt es bei 5 verschiedenen Ziffern insgesamt 30 verschiedene Zahlen, wie die folgende Schülerlösung illustriert (Defizit bzgl. K2).

Teilaufgabe 2: Zahlen gesucht

Luisa weiß, dass man aus den vier Ziffern 1, 2, 3 und 4 insgesamt genau 24 verschiedene vierstellige Zahlen bilden kann, in denen keine dieser vier Ziffern mehrfach vorkommt.

Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlen können insgesamt gebildet werden, wenn man ebenso mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 vorgeht?

Gib dein Ergebnis an.

30

Weil $24 : 4 = 6$ eine Zahl kommt 6 mal vor
also $24 + 6 = 30$

- Es wird festgestellt, dass sich die Anzahl der Möglichkeiten bei vier statt drei Ziffern vervierfacht. Daraus wird geschlossen, dass es nun bei fünf Ziffern fünfmal so viele sein müssen. Fälschlicherweise wird nun jedoch als Ausgangspunkt die 6 statt der 24 verwendet und $5 \cdot 6 = 30$ gerechnet (Defizit bzgl. K2).

Teilaufgabe 2: Zahlen gesucht

Luisa weiß, dass man aus den vier Ziffern 1, 2, 3 und 4 insgesamt genau 24 verschiedene vierstellige Zahlen bilden kann, in denen keine dieser vier Ziffern mehrfach vorkommt.

Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlen können insgesamt gebildet werden, wenn man ebenso mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 vorgeht?

Gib dein Ergebnis an.

30

$$\begin{array}{l} 3 = 6 \\ 4 = 24 \end{array} \quad \begin{array}{l} 24 : 6 = 4 \\ 5 \cdot 6 = 30 \end{array}$$

Weiterarbeit und Förderung

Schwierigkeiten beim Lösen der Aufgabe können sicherlich des Öfteren auf noch zu geringe Erfahrungen beim Lösen mathematischer Probleme zurückgeführt werden. Aus diesem Grund bietet es sich an, die Aufgabe in Kleingruppen bearbeiten zu lassen, so dass sich die Schülerinnen und Schüler gegenseitig helfen können. Dabei können beispielsweise Tippkarten zur Verfügung gestellt werden, um als Lehrkraft Zeit zur Beobachtung und Unterstützung der einzelnen Gruppen nach dem Prinzip der minimalen Intervention zu haben. Auf den Tippkarten könnten beispielsweise folgende Hinweise stehen:

1. Legt euch eine Tabelle nach folgendem Muster an.

1. Position	2. Position	3. Position

2. Notiert verschiedene Zahlenkombinationen. Versucht sie nach einem bestimmten Kriterium zu sortieren. Welche Zahlenkombinationen fehlen euch noch?
3. Übertragt das Problem auf einen anderen Kontext. z. B. das dreimalige Ziehen einer Kugel mit den Ziffern 1, 2, 3 aus einer Urne ohne zurücklegen.

Werden die Arbeitsergebnisse der Kleingruppen anschließend im Plenum vorgestellt, können die verschiedenen Herangehensweisen sowie die genutzten Hilfsmittel herausgearbeitet und zusammengestellt werden. Dabei sollte zunächst das systematische Notieren der verschiedenen Zahlenkombinationen angesprochen werden. Dies kann unter Rückgriff auf eine Tabelle oder auch auf ein Baumdiagramm erfolgen. Im Anschluss an dieses Vorgehen kann leicht überlegt werden, wie viele Plätze für die einzelnen Ziffern zur Verfügung stehen und durch welche Rechnung sich die Anzahl möglicher Zahlen ermitteln lässt. Hierauf aufbauend kann nun betrachtet werden, wie sich die Anzahl an Zahlenkombinationen durch das Hinzufügen einer weiteren Ziffer verändert.

Aufgabe 3: Zahlenmauer

Zahlenmauern sind aus Steinen gebaut.

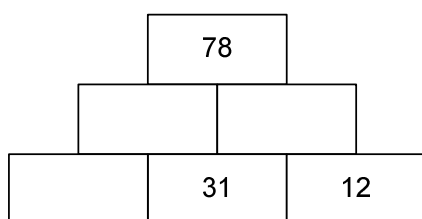
Dabei steht in jedem Stein die **Summe** der beiden darunter liegenden Steine.

Beispiel:

18	
5	13

Teilaufgabe 3.1

Ergänze die drei fehlenden Zahlen in der Zahlenmauer.



Auswertung

RICHTIG	<table><tr><td colspan="3">78</td></tr><tr><td>35</td><td colspan="2">43</td></tr><tr><td>4</td><td>31</td><td>12</td></tr></table>	78			35	43		4	31	12
78										
35	43									
4	31	12								
FALSCH	Alle anderen fehlerhaften, unvollständigen oder falschen Antworten. Insbesondere, wenn nur zwei statt drei Steine richtig ausgefüllt wurden.									

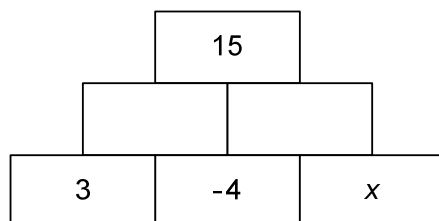
Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Teilaufgabe 3.2

Gib an, welche Zahl man hier für x einsetzen muss.

x = _____



Auswertung

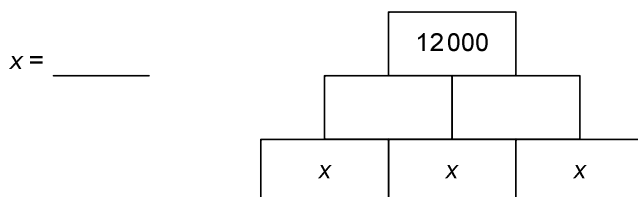
RICHTIG	x = 20 Anm.: Die Steine der Zahlenmauer müssen nicht ausgefüllt werden.
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Teilaufgabe 3.3

Gib an, welche Zahl man hier für x einsetzen muss.



Auswertung

RICHTIG	$x = 3000$ Anm.: Die Steine der Zahlenmauer müssen nicht ausgefüllt werden.
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1B

Hinweise zur Bearbeitung

Die Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da mit Zahlen und Variablen verständnisorientiert umgegangen werden muss.

Zur Bearbeitung der einzelnen Teilaufgaben muss zunächst das Bildungsprinzip solcher Zahlenmauern erfasst werden. Die jeweils gegebenen Zahlenmauern erfordern alle, in Teilen auch rückwärts zu arbeiten (K2) und von einer gegebenen Summe auf einen fehlenden Summanden zu schließen. Die zur Bearbeitung der verschiedenen Teilaufgaben durchzuführenden Rechnungen sind alle elementar. Zudem ist bei den Teilaufgaben 3.2 und 3.3 mit negativen Zahlen und mit einer Variablen umzugehen (K5).

Aufgrund der eher elementaren Anforderungen an das Problemlösen und das Rechnen gehören alle drei Teilaufgaben dem Anforderungsbereich I an.

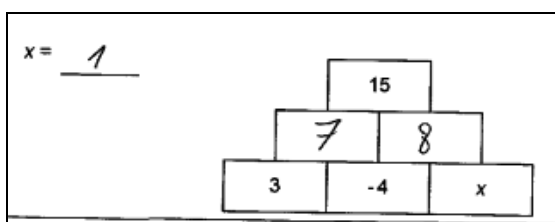
Mögliche Schwierigkeiten

Zu 3.1, 3.2:

- Es werden nur die Steine, deren Zahlen mittels Additionen berechnet werden können, ausgefüllt. Das Aufstellen und Berechnen von Umkehraufgaben im Sinne des Rückwärtsarbeitens gelingt nicht (Defizit bzgl. K2).

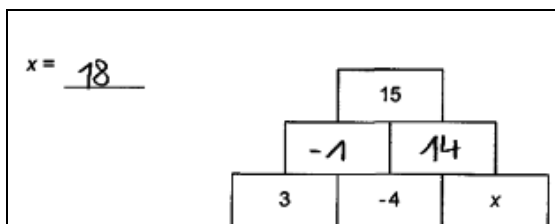
Zu 3.2, 3.3:

- Das Bildungsgesetz wurde nicht richtig erfasst, wie die folgende Schülerlösung zeigt. Zwar ergibt sich die Zahl 15 aus der Summe der beiden darunter stehenden Zahlen, doch passen diese nicht mehr zu den Zahlen der untersten Reihe (Defizit bzgl. . Die Schülerlösung legt vielmehr nahe, dass die Zahlen der freien Steine so gewählt wurden, dass die Summe aller Zahlen der Zielzahl entspricht.



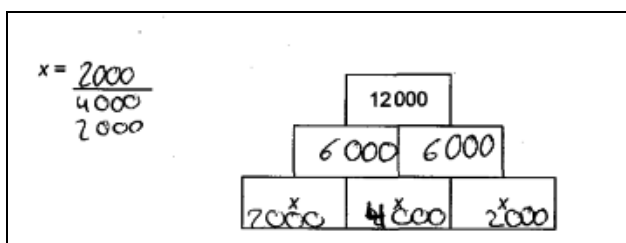
Zu 3.2:

- Der Umgang mit negativen Zahlen bereitet Probleme, so dass es bei deren Addition und Subtraktion zu Fehlern (und dann zu Folgefehlern) kommt (Defizit bzgl. K5). Diese Schwierigkeit wird durch die folgende Schülerlösung veranschaulicht.



Zu 3.3:

- Statt der Gleichung $4x = 12000$ wird die Gleichung $x^4 = 12000$ aufgestellt und gelöst [Fehlösung: 10,466351...] (Defizit bzgl. K2, K5).
- Es ist nicht klar, dass die Variable x stets für dieselbe Zahl stehen muss (Defizit bzgl. K5). So werden unter passender Berücksichtigung des Bildungsprinzips verschiedene Zahlen eingesetzt, wie die folgende Schülerlösung zeigt.



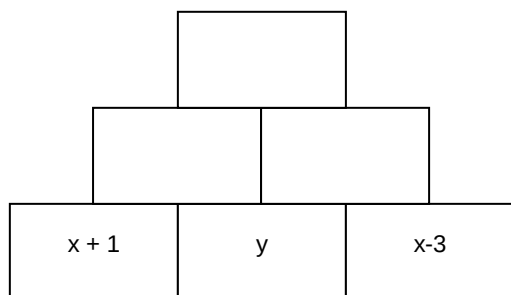
Weiterarbeit und Förderung

Treten bei der Bearbeitung dieser Aufgabe Schwierigkeiten auf, können zunächst Zahlenmauern, bei denen lediglich vorwärts gearbeitet werden muss, behandelt werden. Bei Zahlenmauern, die auch ein rückwärtsgerichtetes Arbeiten erforderlich machen, können den Schülern richtige und falsche Rechenterme an die Hand gegeben werden. Hierdurch können sie selbständig erkennen, dass bei manchen Steinen nur die Umkehraufgabe zum richtigen Ergebnis führt. Weitere Informationen zum Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten können dem allgemeinen Kapitel zur Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ entnommen werden.

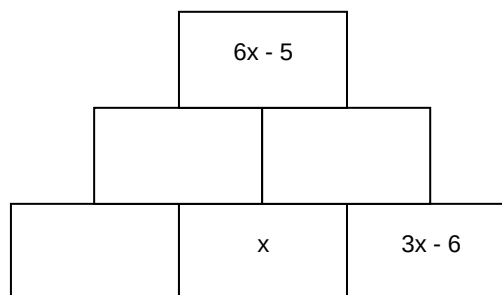
Weiterführend können Zahlenmauern zu anderen Grundrechenarten in den Unterricht eingebunden werden. Dabei ist es denkbar, dass die Schülerinnen und Schüler eigene Zahlenmauern entwickeln und diese dann von einer Mitschülerin oder einem Mitschüler bearbeitet werden. Je nach Altersstufe und Leistungsstand kann dabei auch umfassender mit Variablen bzw. Termen gearbeitet werden. Eine mögliche weiterführende Aufgabe hierzu ist beispielsweise die folgende:

Zahlenmauern sind aus Steinen gebaut. Dabei steht in jedem Stein die **Summe** der darunterliegenden Steine. Fülle jeweils die drei freien Steine mit dem richtigen Term aus.

a)



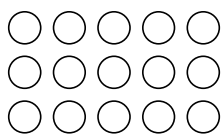
b)



Man vergleiche hierzu auch die didaktischen Kommentare zu den Aufgaben „Zahlen gesucht“, „Zahl gesucht“ und „Berechne x “.

Aufgabe 4: Kreise färben

Färbe 20% dieser Kreise ein.



Auswertung

RICHTIG	Insgesamt sind 3 ganze Kreise eingefärbt. (Dabei können auch Bruchteile gefärbt werden.)
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1B

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da die Schülerinnen und Schüler Prozentrechnung anwenden.

Die geforderte Anzahl Kreise kann auf verschiedene Weisen ermittelt werden. Je nach Lösungsweg dominiert als Kompetenz eher das symbolisch-technische Arbeiten (K5) oder die Verwendung mathematischer Darstellungen (K4). Beispielsweise kann der gegebene Prozentsatz durch Anwenden der Hundertstel-Vorstellung vom Prozentbegriff als 20/100 gedeutet und in $\frac{1}{5}$ umgerechnet werden, um danach eine Anteilsvorstellung zu aktivieren und die gesuchte Anzahl der Kreise zu bestimmen.

Die kognitiven Anforderungen liegen im Anforderungsbereich I, da Routineverfahren auf eine vertraute Darstellung angewendet werden.

Mögliche Schwierigkeiten

- Die Übersetzung des Prozentsatzes 20 % in einen Bruch, z. B. in 20/100, gelingt nicht (Defizit bzgl. K5).
- 20 % wird als $\frac{1}{2}$ gedeutet und die Hälfte der Kreise wird eingefärbt (Defizit bzgl. K5).

Weiterarbeit und Förderung

Diese einfache Darstellung lässt vielfältige Lösungswege zu und erlaubt die Kombination zeichnerischer und konkret handelnder Ansätze.

Vereinfachend könnte zunächst eine Darstellung mit 100 Kreisen gewählt werden (alternativ: ein Hunderterfeld), von denen 20 % zu färben sind. Durch Anwendung der Hundertstel-Vorstellung kann 20 % in 20/100 übersetzt werden, was bedeutet, dass 20 der 100 Kreise zu färben sind.

Gelingt die Übersetzung in einen Hundertstelbruch ohne Schwierigkeiten, kann im nächsten Schritt die Anzahl der gegebenen Kreise variiert und z. B. auf 50 reduziert werden. Nun kann man auch funktional überlegen: „Wie verändert sich (bei gleichbleibendem Prozentsatz) die Anzahl der zu färbenden Kreise, wenn die Grundmenge halbiert wird?“

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, $\frac{1}{5}$ als andere Darstellung von 20 % auf die Figur anzuwenden. So kann die gegebene Figur in fünf gleichgroße Teilmengen mit je drei Kreisen

unterteilt werden, von denen eine farbig markiert wird. Zumindest gedanklich ließe sich diese Aufgabe auch lösen, indem von jedem Kreis $\frac{1}{5}$ gefärbt wird. Oder es kann einfach jeder fünfte Kreis gefärbt werden, wobei zu problematisieren wäre, bei welchen Grundmengen eine solche Strategie tragfähig ist (Mögliche Frage: „Funktioniert diese Strategie auch bei 30 Kreisen, bei 40 Kreisen, bei ... Kreisen?“, oder allgemeiner: „Welche Eigenschaft muss die Anzahl der Kreise erfüllen, damit – bei gegebenem Prozentsatz – die gesuchte Anzahl Kreise durch Abzählen ermittelt werden kann?“).

Diese Aufgabe bietet auch die Möglichkeit, Umkehraufgaben zur gegebenen Frage zu behandeln und schließlich alle drei Grundaufgaben der Prozentrechnung mithilfe einer solchen Darstellung zu thematisieren (Grundwert, Prozentsatz oder Prozentwert ist gesucht). Insbesondere kann bei fehlerhaften Lösungen der obigen Aufgabe gefragt werden, welcher Prozentsatz – anstelle des geforderten – dargestellt ist.

Schließlich kann diese Aufgabe auch Anlass geben, grundlegende Fertigkeiten, wie das Umwandeln eines Prozentsatzes in einen Hundertstelbruch, einen gekürzten Bruch und einen Dezimalbruch zu üben.

Aufgabe 5: Harzwanderung

Peter und Markus planen eine Wanderung durch den Harz.



Foto: © IQB

Teilaufgabe 5.1

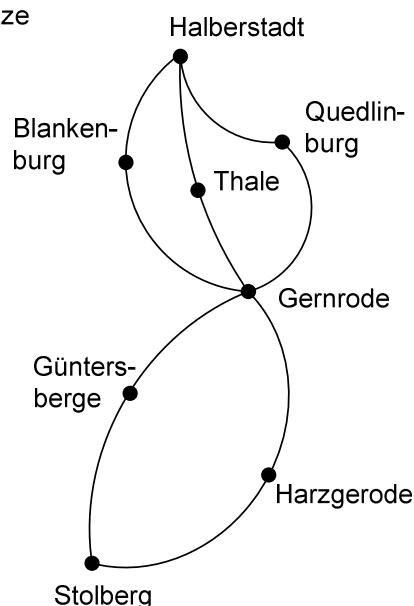
Die Wanderung soll in Stolberg beginnen und auf einem der eingezeichneten Wanderwege nach Halberstadt führen (s. Skizze).

Gib anhand der Skizze **eine** mögliche Wanderroute von Stolberg nach Halberstadt an.

Ergänze die beiden Lücken.

Stolberg → _____ → Gernrode
 → _____ → Halberstadt

Skizze



Auswertung

RICHTIG	Stolberg → Harzgerode → Gernrode → Thale → Halberstadt
	ODER
	Stolberg → Harzgerode → Gernrode → Quedlinburg → Halberstadt
	ODER
	Stolberg → Harzgerode → Gernrode → Blankenburg → Halberstadt
	ODER
	Stolberg → Güntersberge → Gernrode → Thale → Halberstadt
	ODER
	Stolberg → Güntersberge → Gernrode → Quedlinburg → Halberstadt
	ODER
	Stolberg → Güntersberge → Gernrode → Blankenburg → Halberstadt

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Teilaufgabe 5.2

Aus wie vielen verschiedenen Wanderrouten (siehe Skizze aus Teilaufgabe 1) können Peter und Markus insgesamt wählen, um von Stolberg über Gernrode nach Halberstadt zu kommen?

Gib das Ergebnis an.

_____ verschiedene Wanderrouten

Auswertung

RICHTIG	6 verschiedene Wanderrouten
---------	-----------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2

Hinweise zur Bearbeitung

In dieser Aufgabe werden kombinatorische Überlegungen durchgeführt, weshalb sie der Leitidee Zahl (L1) zugeordnet wird.

In Teilaufgabe 5.1 gehen die Schülerinnen und Schüler mit einer mathematischen Darstellung um (K4). Sie führen die hierin und die im Text gegebenen Informationen zusammen, um den Lückentext zu ergänzen.

Die Bearbeitung von Teilaufgabe 5.2 erfordert neben dem Umgang mit der vorgegebenen Darstellung (K4) vor allem die Entwicklung einer Strategie zur Ermittlung aller möglichen Wanderwegen (K2). Um deren Anzahl zu bestimmen, kann man die Routen konkret einzeichnen, mithilfe eines Baumdiagramms bestimmen oder systematisch aufschreiben.

In Teilaufgabe 5.1 werden die nötigen Informationen direkt dem Diagramm entnommen, so dass diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich I zugeordnet wird. Die Bearbeitung von Teilaufgabe 5.2 erfordert dagegen die Entwicklung und Ausführung einer mehrschrittigen Strategie und ist daher dem Anforderungsbereich II zuzuordnen.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 5.1:

- Zwar wird eine richtige Route markiert, aber die Übertragung der Ortsnamen in den Lückentext gelingt nicht, wie die folgende Schülerlösung zeigt (Defizit bzgl. K4).

Teilaufgabe 1: Harzwanderung

Die Wanderung soll in Stolberg beginnen und auf einem der eingezeichneten Wanderwege nach Halberstadt führen (s. Skizze).
Gib anhand der Skizze eine mögliche Wanderroute von Stolberg nach Halberstadt an.
Ergänze die beiden Lücken.

Stolberg → Güntersberge → Gernrode

→ Stolberg → Halberstadt

Skizze

Zu 5.2:

- Schüler und Schülerinnen variieren nur die Anzahl aller Wege vor bzw. nach der Abzweigung [Fehlösungen 2 bzw. 3] (Defizit bzgl. K2).
- Es wird bloß die Anzahl aller Teilstrecken in der Grafik angegeben [Fehlösung 10] (Defizit bzgl. K2).

Weiterarbeit und Förderung

Dieser Aufgabe liegt eine für den Mathematikunterricht eher untypische, aber dennoch zugängliche Darstellung zugrunde.

Bereitet der Umgang mit dieser Darstellung Probleme, kann zunächst die Bedeutung der Verbindungslinien und der Punkte im Kontext thematisiert werden. Anschließend kann man die Schülerinnen und Schülern auffordern, sich mit Teilen dieser Darstellung auseinanderzusetzen. Dazu bietet es sich an, sich ganz konkret in die beschriebene Situation hineinzuversetzen. Dies kann etwa mit folgender Aufforderung geschehen:

„Stell Dir vor du bist in Stolberg. Du willst nach Gernrode laufen. Durch welchen Ort führt der Weg dorthin?“

Oder man fragt:

„Nach einiger Zeit bist Du in Thale angekommen. In welchem Ort warst Du vorher?“

In beide Fragestellungen geht ein, dass Entscheidungen über zu wählende Routen zu treffen sind. Die erste Fragestellung kann dahingehend erweitert werden, dass man nach der Anzahl der Möglichkeiten fragt, nach Gernrode zu gelangen.

Eine vertiefende Auseinandersetzung mit dieser Art Darstellung kann auch von der Bedeutung der verschiedenen Punkte ausgehen. So bietet der Ausgangsort Stolberg zwei Möglichkeiten, den weiteren Weg zu wählen, während andere Orte keine zweite Möglichkeit bieten. Ist dieser Unterschied deutlich, kann man die Schülerinnen und Schüler fragen, was in Gernrode bezüglich der Wanderroute(n) passieren kann.

Alternativ zu dieser bereits deutlich mathematisierten Darstellung kann man auch mit realen Landkarten arbeiten und darin Routen zusammenstellen lassen. Zudem können, als thematische Erweiterung solcher Darstellungen, Streckenpläne von Bussen oder U- bzw. S-Bahnen hinzugenommen werden, die nach einem ähnlichen Prinzip aufgebaut sind. Vor allem das systematische Erfassen mehrerer bzw. aller Möglichkeiten lässt sich an solchen Beispielen üben, um so einen Beitrag zum Aufbau der Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ zu leisten (vgl. hierzu auch das allgemeine Kapitel zur Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“).

Aufgabe 6: Zufallsversuche

Mit einem 12-seitigen Spielwürfel werden Zufallsversuche durchgeführt. Die Seiten dieses Würfels sind mit den Zahlen 1 bis 12 beschriftet.



Teilaufgabe 6.1

Gib zu jedem der folgenden Ereignisse an, welche Zahlen beim Würfeln oben liegen können.

Schreibe die Ergebnisse in die Tabelle.

Die oberen beiden Zeilen sind bereits ausgefüllt.

Ereignis	Ergebnisse (Ausgänge)
Die Augenzahl ist gerade.	2, 4, 6, 8, 10, 12
Die Augenzahl ist durch 5 teilbar.	5, 10
Die Augenzahl ist kleiner als 5.	
Die Augenzahl ist zweistellig und ungerade.	

Auswertung

RICHTIG	Ereignis	Ergebnisse (Ausgänge)
	Die Augenzahl ist gerade.	2, 4, 6, 8, 10, 12
	Die Augenzahl ist durch 5 teilbar.	5, 10
	Die Augenzahl ist kleiner als 5.	1, 2, 3, 4
	Die Augenzahl ist zweistellig und ungerade.	11
Anm.: Die Tabelle muss vollständig ausgefüllt sein.		

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1B

Teilaufgabe 6.2

Ein anderes Ereignis bei diesem Würfel soll genau drei Ergebnisse (Ausgänge) haben.

Beschreibe dazu ein passendes Ereignis.

Auswertung

RICHTIG	Richtig ist die Beschreibung eines Ereignisses mit nur drei Ergebnissen. Diese müssen nicht genannt werden. z. B. Die Augenzahl ist kleiner als 4. ODER Der Würfel zeigt eine 5, 6 oder eine 11. ODER Die Augenzahl ist zweistellig. ODER Die Augenzahl ist durch 4 teilbar.
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	3

Teilaufgabe 6.3

Beim Spielen mit zwei 6-seitigen Würfeln (s. Abbildung 1) werden oft beide Augenzahlen addiert.

Die Tabelle zeigt alle möglichen Augensummen. Die 7 ist die am häufigsten vorkommende Summe.

	Würfel B	1	2	3	4	5	6
Würfel A							
1		2	3	4	5	6	7
2		3	4	5	6	7	8
3		4	5	6	7	8	9
4		5	6	7	8	9	10
5		6	7	8	9	10	11
6		7	8	9	10	11	12



Abbildung 1

Beim Spielen mit zwei **12-seitigen** Würfeln (s. Abbildung 2) werden ebenfalls beide Augenzahlen addiert.

Gib an, welche Augensumme dabei am häufigsten ist.



Abbildung 2

Begründe deine Antwort.

Auswertung

RICHTIG	Häufigste Augensumme (13) UND richtige Begründung unter Verweis auf deren relative/absolute Häufigkeit in Abgrenzung zur relativen/absoluten Häufigkeit der anderen möglichen Augensummen.																																																																																																																																																																									
	z. B.																																																																																																																																																																									
	Die Augensumme 13 ist am häufigsten, da sie in 12 von 144 Kombinationen fällt. Für alle anderen Augensummen gibt es weniger Kombinationsmöglichkeiten (siehe Übersicht).																																																																																																																																																																									
	<table><tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr><tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr><tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td></tr><tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td></tr><tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td></tr><tr><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr></table>		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12																																																																																																																																																													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13																																																																																																																																																													
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14																																																																																																																																																													
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15																																																																																																																																																													
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16																																																																																																																																																													
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17																																																																																																																																																													
	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18																																																																																																																																																													
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19																																																																																																																																																													
	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20																																																																																																																																																													
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21																																																																																																																																																														
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22																																																																																																																																																														
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23																																																																																																																																																														
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24																																																																																																																																																														
Anm.: Die Tabelle muss nicht vollständig sein, wenn daraus hervorgeht, dass die 13 als Diagonale in jeder Spalte und Zeile vorkommt. Alternativ könnte der Ergebnisraum auch mittels eines verkürzten Baumdiagramms dargestellt werden.																																																																																																																																																																										
ODER																																																																																																																																																																										
Die Argumentation über Symmetrie: Mögliche Augensummen sind 2, 3, ..., 24. Die Zahl in der Mitte kommt am häufigsten vor. Dies ist die 13.																																																																																																																																																																										
Anm.: Diese Lösung muss keine tabellarische Übersicht aller möglichen Ergebnisse aufweisen.																																																																																																																																																																										
ODER																																																																																																																																																																										
Die Zahl des 1. Würfels kann mit 12 verschiedenen Zahlen des 2. Würfels kombiniert werden. Die 2 ist dabei die kleinste Augensumme, die 24 die größte Augensumme. Die 13 ist dabei die häufigste Augensumme. Dies liegt daran, dass egal welche Zahl der 1. Würfel zeigt, der 2. Würfel immer eine passende Augenzahl zeigen kann, so dass sich als Summe 13 ergibt. Dies ist bei den anderen Zahlen nicht der Fall. Denn zeigt der 1. Würfel z. B. eine 12, dann kann niemals eine Augensumme kleiner als 13 herauskommen. Zeigt der 1. Würfel hingegen eine 1, kann keine Augensumme größer als 13 herauskommen. Die Augensumme 13 ist bei beiden Fällen aber möglich.																																																																																																																																																																										
FALSCH	Alle unvollständigen, fehlerhaften oder falschen Antworten.																																																																																																																																																																									
	z. B.																																																																																																																																																																									
	Die Augensumme 13 ist am häufigsten, da es am meisten Kombinationen mit dieser Augensumme gibt.																																																																																																																																																																									
	Anm.: Begründung fehlt. (Ohne Bezug auf eine Tabelle.)																																																																																																																																																																									
	ODER																																																																																																																																																																									
	Die häufigste Augensumme ergibt sich immer nach dem Muster $n + 1$. Also ist 13 die häufigste Augensumme.																																																																																																																																																																									
	Anm.: Das Muster $n + 1$ wird nicht begründet bzw. erläutert.																																																																																																																																																																									

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	5

Teilaufgabe 6.4

Ein n -seitiger Würfel zeigt die Zahlen 1 bis n . Bei einem Spiel mit zwei n -seitigen Würfeln werden die beiden gewürfelten Augenzahlen addiert.

Welche Zahl kommt dabei am häufigsten als Summe vor?

Kreuze an.

☐

$2n$

☐

$n \cdot n$

☐

$n+1$

☐

$n+2$

Auswertung

RICHTIG	3. Kästchen wurde angekreuzt
---------	------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	III
Kompetenzstufe	3

Hinweise zur Bearbeitung

Bei der Aufgabe „Zufallsversuche“ geht es um stochastische Experimente, daher wird sie der Leitidee Daten und Zufall (L5) zugeordnet.

In Teilaufgabe 6.1 setzen die Schülerinnen und Schülern in einem ersten Schritt den in einem Foto dargestellten 12-seitigen Würfel mit dessen textlicher Beschreibung in Beziehung (K4). Im Weiteren ist die Unterscheidung der Fachbegriffe „Ereignis“ und „Ergebnis“ erforderlich, um dann unter Anwendung weiterer grundlegender Fachbegriffe, z. B. „kleiner als“, „gerade“ oder „zweistellig“ (K6), die fehlenden Ergebnisse in die Tabelle eintragen zu können.

Teilaufgabe 6.2 ist ergebnisoffen und kehrt die Denkrichtung um, da ein passendes Ereignis zur gegebenen Anzahl der Ergebnisse beschrieben werden soll (K6). Hierzu können die Schülerinnen und Schüler eine geeignete Strategie anwenden, z. B. die des „Rückwärtsarbeitens“ (K2). Dazu können sie ggfs. auch zuerst einfach drei Ergebnisse notieren, um dann zu überlegen, wie diese umschrieben werden können.

Teilaufgabe 6.3 erfordert ein Zusammenführen der im Text und in der Tabelle gegebenen Informationen zu den Augensummen (K6). Die Tabelle zeigt, dass die beim 6-seitigen Würfel am häufigsten vorkommende Augensumme in der Diagonale steht (K4). Um die Übertragung dieser Information auf den 12-seitigen Würfel zu leisten, hilft die Anwendung der Problemlösestrategie „Analogiebildung“ (K2). Dabei kann – zumindest gedanklich – eine strukturgleiche Tabelle für den 12-seitigen Würfel erstellt werden, um davon ausgehend 13 als häufigste Augensumme zu identifizieren. Zusätzlich ist hier noch die Begründung der Lösung verlangt (K1).

In Teilaufgabe 6.4 wird nun von einem abstrakten, n -seitigen Würfel ausgegangen. Neben dem sinnentnehmenden Lesen, welches u. a. das Verständnis mathematischer Notationen (z. B. $2n$) voraussetzt (K6), liegt auch in dieser Teilaufgabe die Anwendung einer geeigneten Strategie nahe (K2). Zum Beispiel können die Schülerinnen und Schüler durch Analysieren der bekannten Spezialfälle $n = 6$ und $n = 12$ ermitteln, welcher Zusammenhang zwischen der Anzahl der Seitenflächen eines Würfels und der am häufigsten vorkommenden Augensumme besteht, und dies dann verallgemeinern.

Die Teilaufgaben 6.1 und 6.2 erfordern lediglich routinierte, im Unterricht mehrfach geübte Tätigkeiten und gehören daher zu Anforderungsbereich I. In Teilaufgabe 6.3 muss eine mehrschrittige Argumentation entwickelt werden, weshalb diese Aufgabe dem Anforderungsbereich II angehört. Die Bearbeitung der Teilaufgabe 6.4 erfordert eine Verallgemeinerung; daher ist diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich III zuzuordnen.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 6.1:

- Die Unterscheidung von „Ereignis“ und „Ergebnis“ gelingt nicht (Defizit bzgl. K6).
- Fachsprachliche Begriffe werden falsch angewendet. Zum Beispiel wird „kleiner als“ mit „kleiner oder gleich“ verwechselt [Fehlösung 1, 2, 3, 4, 5] (Defizit bzgl. K6).

Zu 6.2:

- Die drei Ergebnisse werden richtig angegeben, aber es wird kein Ereignis hierzu beschrieben. Möglicherweise können die Begriffe „Ereignis“ und „Ergebnis“ nicht unterschieden werden (Defizit bzgl. K6).
- Es werden drei Ereignisse beschrieben. Die Anzahl der zugehörigen Ergebnisse wird dabei nicht beachtet (Defizit bzgl. K6).
- Ein Ereignis wird beschrieben, es hat aber nicht genau drei Ergebnisse (Defizit bzgl. K2 oder K6).

Zu 6.3:

- Die Argumentation ist unvollständig. Dies zeigt die folgende Schülerlösung exemplarisch. In dieser wird zwar erklärt, wie „13“ zustande kommt, doch es fehlt die Begründung, warum diese Summe am häufigsten vorkommt. (Defizit bzgl. K1).

Es ist die 13, weil wenn man die 1 und die 12 höchste und die 1 tiefste addiert oder die zweithöchste und die zweitiefste addiert und so weiter kommt immer 13 raus.

- Es gelingt nicht, eine strukturgleiche Tabelle für einen 12-seitigen Würfel zu erstellen oder die Ergebnisse in einer anderen Form ausschöpfend zu erfassen (Defizit bzgl. K2).
- Die aufgestellte Tabelle ist fehlerhaft und es wird z. B. eine Spalte (eine Zeile) vergessen (Defizit bzgl. K4).

Zu 6.4:

- 1. Antwortalternative (Fehlösung: $2n$): Irrtümlich wird angenommen, dass die häufigste Augensumme durch Verdopplung der größtmöglichen Augenzahl eines Würfels entsteht.
- 2. Antwortalternative (Fehlösung: $n \cdot n$): Dieser Term beschreibt die Anzahl aller Augensummen, wobei nicht auf Gleichheiten geachtet wird.
- 4. Alternative (Fehlösung: $n+2$): Da es zwei n -seitige Würfel sind, wird irrtümlich angenommen, dass die häufigste Augensumme um 2 größer ist als die Anzahl n der Seitenflächen. Oder die Variable n und die Zahl 2 werden vordergründig kombiniert.

Weiterarbeit und Förderung

Die erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabe „Zufallsversuche“ erfordert ein Verständnis grundlegender Begriffe wie Zufallsversuch, Ereignis und Ergebnis.

Diese Aufgabe bietet die Gelegenheit, Problemlösestrategien bewusst anzuwenden. Hierzu gehört zum einen das systematische Probieren als Lösungsstrategie. Zum anderen gehört dazu die Strategie der Analogiebildung, um Vorgehensweisen mit vertrauten Objekten auf weniger vertraute – wie einen 12-seitigen Würfel – zu übertragen. In diesem Zusammenhang bietet sich auch der explizite Umgang mit tabellarischen Darstellungen an, um (schriftliche) Überlegungen zu systematisieren.

Insbesondere die Teilaufgaben 6.1 und 6.2 können schon in den ersten Stunden zur elementaren Stochastik im Unterricht eingesetzt werden. Das reale Würfeln mit einem 6- bzw. einem 12-seitigen Würfel kann den Einstieg in die Aufgabenstellung erleichtern.

Bereitet die in Teilaufgabe 6.4 geforderte Verallgemeinerung Schwierigkeiten, so können zunächst Überlegungen zu Augensummen weiterer konkreter Würfel angestellt werden. Dies kann etwa am Beispiel 8-, 10- oder 20-seitiger Würfel geschehen. Insbesondere kann auch mit einem Tetraederwürfel gearbeitet werden, dessen vier Seiten es in besonderer Weise erlauben, sich zügig einen vollständigen Überblick über die möglichen Augensummen zu verschaffen. Gelingt die Benennung der häufigsten Augensumme an mehreren konkreten Würfeln, so kann die zugrunde liegende Struktur einfacher auf einen n-seitigen Würfel übertragen werden.

Man vergleiche hierzu auch die didaktischen Kommentare zu den Aufgaben „Chancen“ und „Glücksrad drehen“, aber auch den didaktischen Kommentar zur Aufgabe „Würfeln mit zwei Würfeln“ aus VERA-8 2011.

Aufgabe 7: Glücksrad drehen

Für eine Verlosung wurde ein Glücksrad entworfen. Es hat sechs verschieden große Sektoren, die mit den Buchstaben A, B, C, D, E und F beschriftet sind.

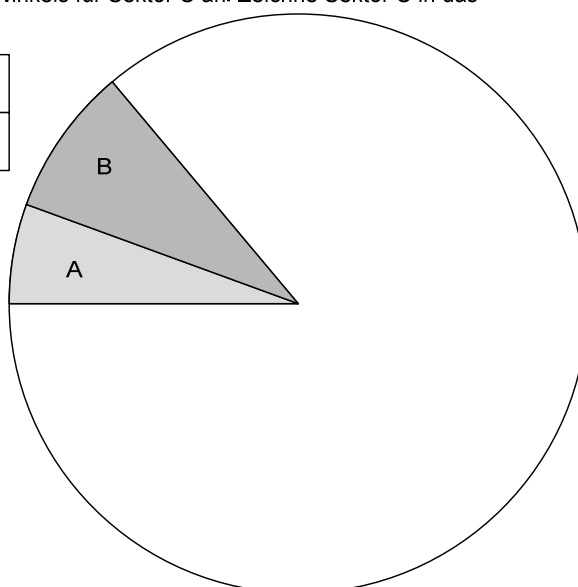
Beim Drehen des Glücksrades treten diese Ergebnisse mit folgenden Wahrscheinlichkeiten p ein:

Ergebnis	A	B	C	D	E	F
p	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

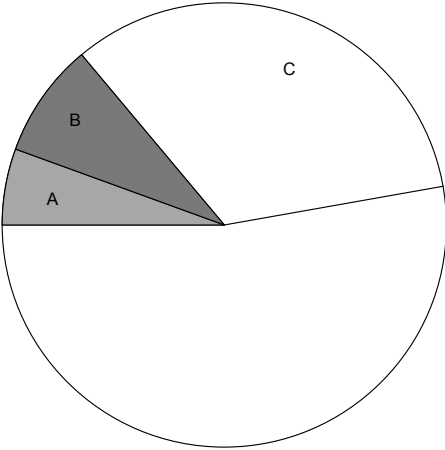
Teilaufgabe 7.1

Gib in der Tabelle die Größe des Winkels für Sektor C an. Zeichne Sektor C in das Kreisdiagramm ein.

Sektor	A	B	C
Winkel	20°	30°	



Auswertung

RICHTIG	Angabe des richtigen Winkels des Sektors C UND dessen Darstellung im Glücksrad. Anmerkungen: • Wird der Sektor C nicht beschriftet, wird dennoch Code 1 vergeben. • Sektor C kann auch neben Sektor A gezeichnet werden. • Sektor C kann auch an anderen Stellen im Kreis eingezeichnet werden <table border="1"><tr><td>Sektor</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr><tr><td>Winkel</td><td>20°</td><td>30°</td><td>120°</td></tr></table> Zeichentoleranz: $\pm 2^\circ$  ODER (Grenzfall) Der Winkel wird korrekt eingezeichnet, es fehlt jedoch das Gradmaß in der Tabelle.	Sektor	A	B	C	Winkel	20°	30°	120°
	Sektor	A	B	C					
	Winkel	20°	30°	120°					
FALSCH	Alle fehlerhaften oder falschen Antworten. z. B. Der Winkel wird korrekt angegeben, jedoch wurde er nicht eingezeichnet.								

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	4

Teilaufgabe 7.2

Das Glücksrad soll durch einen kleinen Eimer mit 540 Losen ersetzt werden. Die Lose sollen ebenfalls mit den Buchstaben A, B, C, D, E und F beschriftet sein. Die Ergebnisse sollen mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten wie beim Glücksrad gezogen werden.

Gib an, wie viele Lose hierzu mit dem Buchstaben C und wie viele Lose mit dem Buchstaben D bedruckt werden müssen.

Anzahl der Lose mit dem Buchstaben C: _____

Anzahl der Lose mit dem Buchstaben D: _____

Auswertung

RICHTIG	Anzahl der Lose mit dem Buchstaben C: 180 (Lose) Anzahl der Lose mit dem Buchstaben D: 90 (Lose)
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	3

Hinweise zur Bearbeitung

Beide Teilaufgaben beinhalten den Umgang mit Wahrscheinlichkeiten und gehören daher zur Leitidee Daten und Zufall (L5).

In beiden Teilaufgaben 7.1 und 7.2 entnehmen die Schülerinnen und Schüler zunächst dem Aufgabentext die Informationen über den Kontext (K6) und überlegen im nächsten Schritt ein geeignetes Vorgehen (K2); dabei können Sie z. B. die Problemlösestrategie „Zerlegen in Teilprobleme“ nutzen.

In Teilaufgabe 7.1 wird dann jene Winkelgröße für Sektor C berechnet (K5), die die angegebene Wahrscheinlichkeit im Kreisdiagramm visualisiert (K4).

Teilaufgabe 7.2 erfordert eine Übertragung des Kontextes „Glücksrad drehen“ in den Kontext „Lose ziehen“, indem die beiden Ganzen (360° bzw. 540 Lose) in Beziehung gesetzt werden. Innerhalb des neuen Kontextes können die Schülerinnen und Schüler das Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit nutzen (K3), um durch proportionales Umrechnen die gesuchten Anzahlen der Lose zu errechnen (K5).

In beiden Teilaufgaben sind Fähigkeiten und Fertigkeiten aus der Bruch- und der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verknüpfen, so dass beide dem Anforderungsbereich II zugeordnet werden können.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 7.1:

- Das Errechnen der Winkelgröße gelingt nicht, u. a. aufgrund von Schwierigkeiten mit dem Bruchrechnen (Defizit bzgl. K5).
- Die Winkelgröße wird korrekt errechnet, jedoch nicht korrekt eingezeichnet (Defizit bzgl. K4).

Zu 7.2:

- Die Übertragung in den anderen Kontext gelingt nicht. Dabei werden die Losanzahlen z. B. mit Bezug zu 360° als Ganzes errechnet [Fehl Lösung: C: 120 Lose, D: 60 Lose] (Defizit bzgl. K3).

Weiterarbeit und Förderung

Ausgehend von dieser Aufgabe können weitere Kontexte überlegt werden, die dem Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit genügen. Alternativ können die Schülerinnen und Schüler begründet entscheiden, ob in anderen gegebenen Kontexten jeweils das Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit zur Anwendung kommen kann. Dazu eignet sich die folgende Aufgabe, die ggfs. auch ohne den Begriff des Laplace-Experiments formuliert werden kann:

Prüfe jeweils, ob die folgenden Zufallsexperimente Laplace-Experimente sind. Begründe deine Antwort.

- Werfen einer Münze
- Ziehung der Lottozahlen
- Torwandschießen mit einem Fußball
- Zweimaliges Werfen einer Münze

Teilaufgabe 7.2 lässt sich derart variieren, dass man erfragt, mit welchen Gesamtanzahlen von Losen sich die angegebenen Wahrscheinlichkeiten überhaupt exakt realisieren lassen. Zusätzlich kann überlegt werden, wie groß eine solche Anzahl mindestens sein muss. Sollte diese Fragestellung zu offen sein, kann man auch folgende Aufgaben stellen:

- a) Kann das Glücksrad auch durch einen Eimer mit 180 Losen (mit 270 Losen) ersetzt werden?
- b) Wie viele Lose müssen mindestens im Eimer sein, damit alle Ergebnisse mit genau den gegebenen Wahrscheinlichkeiten eintreten können?
- c) Welche Eigenschaft müssen die möglichen Gesamtzahlen der Lose erfüllen?

Weitere unterrichtliche Hinweise können den didaktischen Kommentaren zu den Aufgaben „Chancen“ und „Zufallsversuche“ entnommen werden. Zudem vergleiche man auch den didaktischen Kommentar zur Aufgabe „Glücksrad“ aus VERA-8 2011.

Aufgabe 8: Ungleichung erfüllen

Gib drei natürliche Zahlen für z an, so dass die Ungleichung erfüllt ist.

$$7 + z < 13$$

1) $z = \underline{\hspace{2cm}}$

2) $z = \underline{\hspace{2cm}}$

3) $z = \underline{\hspace{2cm}}$

Auswertung

RICHTIG	Angabe von drei der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5.
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) an, da Zahlen gesucht werden, die eine Ungleichung zu einer wahren Aussage machen.

Zur Bearbeitung der Aufgabe kann die Ungleichung so umgeformt werden, dass die Lösungsmenge direkt abgelesen werden kann. Die hierzu nötige Rechnung ist einfach (K5). Das Ergebnis $z < 5$ ist dann bei der Angabe dreier natürlicher Zahlen, welche die Ungleichung erfüllen, zu berücksichtigen. Alternativ können die drei Zahlen auch durch bloßes Probieren ermittelt werden.

Da es sich um rein reproduktive Anforderungen in einem bekannten mathematischen Inhaltsgebiet handelt, wird diese Aufgabe dem Anforderungsbereich I zugeordnet.

Mögliche Schwierigkeiten

- Die Subtraktion von 7 wird nur auf der linken Seite der Ungleichung durchgeführt [Fehl-lösung: $z < 13$; demnach z. B.: $z = 12$, $z = 11$, $z = 10$] (Defizit bzgl. K5).
- Das Relationszeichen wird als „ist größer als“ gedeutet. Als mögliche Zahlen für z werden demnach z. B. 14, 15, 16 angegebenen (Defizit bzgl. K5).
- Das Relationszeichen wird wie bei Gleichungen als Gleichheitszeichen aufgefasst. Somit wird als mögliche Zahl für z nur die Zahl 6 notiert (Defizit bzgl. K5).

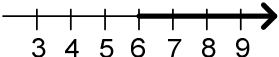
Weiterarbeit und Förderung

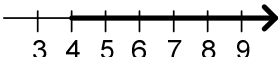
Treten bei der Aufgabe Schwierigkeiten auf, bietet es sich an, den Schülerinnen und Schülern die Ergebnismenge der Ungleichung anhand einer Zahlengeraden zu veranschaulichen. In diesen Zusammenhang können auch Aufgaben integriert werden, welche es erforderlich machen, die zur Darstellung an der Zahlengeraden gehörige Ergebnismenge in formaler Schreibweise anzugeben. Alternativ ist es denkbar, die Schülerinnen und Schüler eine Zuordnung von zeichnerischen Darstellungen, Ungleichungen und formal angegebenen Ergebnismengen vornehmen zu lassen. Auch eine Beschreibung verschiedener Ergebnismengen in natürlicher Sprache kann eingefordert werden.

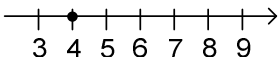
Eine denkbare Aufgabe wäre z. B. die Folgende:

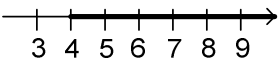
Gegebenen sind die beiden folgenden Ungleichungen: $4x - 12 > 6 + x$ und $2x + 4 \leq 3x$.

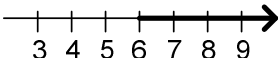
- Ordne den beiden Ungleichungen jeweils das passende Bild zur Lösungsmenge zu. Begründe deine Wahl.

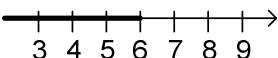












- Gib die Lösungsmenge der beiden Ungleichungen jeweils in formaler Schreibweise an.
- Notiere zu der zweiten Ungleichung ein passendes Zahlenrätsel.

In Ergänzung hierzu ist es naheliegend, den Schülerinnen und Schüler Sachkontexte zu den Ungleichungen anzugeben oder aber zu Sachkontexten die entsprechenden Ungleichungen aufstellen zu lassen.

Zumindest die leistungstärkeren Schüler sollten sich auch mit Ungleichungen beschäftigen, bei denen das Relationszeichen bei bestimmten Umformungsschritten „umgedreht“ werden muss, wie beispielsweise $5 - 3z > 23$.

Aufgabe 9: Tabelle

Die Tabelle zeigt einen Zusammenhang zwischen a und b .

a	2	3	4
b	3	5	7

Welche der folgenden Gleichungen passt zu diesem Zusammenhang?

Kreuze an.

☐

$b = a + 1$

☐

$a = b - 2$

☐

$b = 2a - 1$

☐

$b = \frac{3}{2} \cdot a$

☐

$a = b + 2$

Auswertung

RICHTIG	3. Kästchen wurde angekreuzt
---------	------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da es um Darstellungen einer linearen Funktion geht.

Zunächst muss die Fragestellung erfasst werden, nämlich dass der in der Tabelle gegebene Zusammenhang von a und b mittels einer Gleichung darzustellen ist und eine geeignete Vorgehensweise festzulegen ist (K2). Der Kern der Anforderung ist also das Übersetzen zwischen zwei Darstellungsformen (K4), entweder indem die Tabelle mit einer Gleichung beschrieben wird oder – hier wohl naheliegender – indem überprüft wird, welche der angegebenen Gleichungen passt; hierzu können die einzelnen Wertepaare in die verschiedenen Gleichungen eingesetzt und die Gleichungen auf Richtigkeit überprüft werden (K5).

Aufgrund des Wechsels zwischen der tabellarischen sowie der symbolisch-formalen Darstellungsform gehört diese Aufgabe dem Anforderungsbereich II an.

Mögliche Schwierigkeiten

- Antwortalternativen [01, 02, 04]: Eine dieser Gleichungen wird gewählt, wenn nur das erste bzw. das zweite Wertepaar aus der Tabelle hinsichtlich der Abhängigkeit von a und b betrachtet worden ist. Demnach scheint die Zuordnungs-Vorstellung, nach welcher ein ganzer Bereich zu betrachten ist, noch nicht genügend gefestigt zu sein.
- Antwortalternative [05]: Wird diese Gleichung gewählt, scheint nur die Entwicklung von b analysiert worden zu sein (Defizit bzgl. K2, K4).

Weiterarbeit und Förderung

Treten bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten auf, ist es naheliegend, die Gleichungen in einem Koordinatensystem darstellen zu lassen. Im Folgenden können die Schüler prüfen, auf welcher der Geraden die einzelnen Punkte liegen und hierdurch die passende Gleichung auffindig machen. Gleichzeitig kann der Zusammenhang zwischen a und b farblich veranschaulicht und die Bedeutung von Steigung und y -Achsenabschnitt wiederholt werden.

Alternativ kann ebenso versucht werden, den Zusammenhang von a und b mittels eines Punktemusters zu veranschaulichen.

Dies könnte folgendermaßen aussehen:

(a) 1 2 3 4 ...

(b)  ...

In einem nächsten Schritt können die Schüler aufgefordert werden, das Punktemuster für die 5te, 6te oder 10te Figur fortzusetzen. Dabei sollte ihnen auffallen, wie viele Punkte jeweils zu

ergänzen sind. Hieraus lässt sich nun eine Art Rekursionsformel erstellen, mit deren Hilfe man mittels der Anzahl der Punkte in der (n-1)-ten Figur die Anzahl der Punkte in der n-ten Figur berechnen kann. Anschließend kann versucht werden, eine geschlossene Formel zu erarbeiten, indem der Zusammenhang zwischen a und b analysiert wird. Dabei können Fragen wie „Wie viele Punkte kommen von Muster zu Muster hinzu?“, „Wie viele Zweierpäckchen sind jeweils vorhanden?“ oder „Wie viele Punkte fehlen bis zum nächsten Zweierpäckchen?“ bzw. „Wie kann das erste Muster mit Hilfe eines Zweierpäckchens dargestellt werden?“ zielführend sein.

Aufgabe 10: Joggen

Teilaufgabe 10.1

Die ideale Trainingsbelastung

Rechnen Sie 200 minus Lebensalter. Das ergibt den Maximalpuls. Beim Training sollte man mindestens 65 % vom Maximalpuls erreichen, aber auch nicht mehr als 85 %.

Herr Fuchs ist 35 Jahre alt und trainiert nach dieser Faustregel.

Trage ein, zwischen welchen Werten sich sein Trainingspuls bewegen sollte. Runde auf ganze Zahlen.

Trainingspuls: mindestens: _____ höchstens: _____

Auswertung

RICHTIG	Trainingspuls: mindestens: 108 höchstens: 140 ODER (Grenzfall) Trainingspuls: mindestens: 107 höchstens: 141
FALSCH	Alle anderen Antworten. z. B. nicht gerundete Werte: 107,25; 140,25

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	4

Teilaufgabe 10.2

Für ein beliebiges Lebensalter x lässt sich der für den Trainingspuls empfohlene Bereich mit Hilfe von Termen beschreiben.

Gib einen Term für den unteren Wert des Trainingspulses an.

Auswertung

RICHTIG	Ein Term für die untere Grenze des Trainingspulses wird angegeben (x steht für Lebensalter in Jahren). Anm.: Statt x kann jede beliebige Variable verwendet werden. $0,65 \cdot (200 - x)$ ODER $65/100 \cdot (200 - x)$ ODER $65 \% \cdot (200 - x)$ ODER (Grenzfall) untere Grenze: $200 - x = y$; Puls = $y \cdot 65 : 100$
FALSCH	Alle unvollständigen, fehlerhaften oder falschen Antworten. z. B. $200 - x \cdot 65/100$ ODER $(200 - x) \cdot 65$ und $(200 - x) \cdot 85$ ODER $(200 - 35) \cdot 65/100$ ODER $x \leq 65 \%$

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	5

Teilaufgabe 10.3

Zu einem Lauftreff kommen ganz unterschiedlich alte Menschen. Der Trainer möchte jedem Einzelnen sehr schnell den Bereich für seinen Trainingspuls nennen können. Er will deshalb eine Tabelle erstellen, aus der er für jedes Lebensalter sofort die richtigen Werte für den Trainingspuls ablesen kann. Er verwendet dazu eine Tabellenkalkulation:

	A	B	C	D
1	Pulswerte beim Training			
2				
3	Lebensalter	Maximalpuls		
4	15	185	121	157
5	16			
6	17			
7	18			
8	19			
9	20			
10	21			
11	22			
12	23			
13	24			
14	25			
15	26			
16	27			
17	28			
18	29			
19	30			

Der Wert für die obere Grenze des Trainingspulses in der Zelle D4 wird mit einer Formel berechnet. In dieser Formel wird für das Lebensalter die Zellbezeichnung A4 verwendet.

Gib eine passende Formel hierfür an.

Auswertung

RICHTIG	Richtige Formel, die die Zelladresse A4 bzw. einen Verweis auf das Lebensalter enthält. Auch Formeln, die direkt in die Tabelle (auch ohne Gleichheitszeichen oder mit einem anderen Mal-Zeichen, z. B. "**") eingetragen sind, werden als richtig gewertet. z. B. $D4: = 0,85 \cdot (200 - A4)$ ODER $D4: = 85/100 \cdot (200 - A4)$ ODER $D4: = 85 \% \cdot (200 - A4)$ ODER (Grenzfall) keine Angabe für D4, aber in der Tabelle stehen in den freien Zellen in Spalte D die richtigen Formeln, also $D5: = 0,85 \cdot (200 - A5)$; $D6: = 0,85 \cdot (200 - A6)$ usw. ODER (Grenzfall) $D4: = 0,85 \cdot (200 - x)$ Anm.: Hier wurde statt der Zelladresse die oft gebräuchliche Variable x notiert. ODER (Grenzfall) $D4: = B4 \cdot 0,85$
FALSCH	Alle anderen Antworten. z. B. Es ist ein falscher Term angegeben. ODER Der Term enthält keine Variablen: $D4: = (200 - 15) \cdot 85 : 100$

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	5

Hinweise zur Bearbeitung

Die Aufgabe gehört der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) an, da Beziehungen zwischen Größen (Lebensalter und Pulsfrequenz) beschrieben werden.

Zur Bearbeitung der Teilaufgaben ist zunächst der Text zu lesen und inhaltlich zu erfassen. Dabei sind vor allem die Begriffe „Maximalpuls“, „mindestens“, „nicht mehr als“ und „höchstens“ im Kontext richtig zu deuten (K6). Anschließend ist unter Rückgriff auf die Operatorvorstellung vom Prozentbegriff das richtige Modell zu wählen, um die untere und obere Grenze des Trainingspulses zu bestimmen (K3). Die hierzu nötigen Rechnungen sind einfach und können direkt oder auch in Form des „Dreisatzes“ durchgeführt werden (K5). In

Teilaufgabe 10.2 ist die untere Grenze des Trainingspulses nun mittels eines Terms zu beschreiben (K3, K5). Die hierzu benötigten Variablen können dabei beliebig bezeichnet werden. In Teilaufgabe 10.3 sind diese Namen durch die Zellenbezeichnungen zu der abgebildeten Tabelle vorgegeben (K4). Anstelle eines Terms ist hier eine Formel zu notieren, welche in einem Tabellenkalkulationsprogramm Verwendung finden kann (K3, K5).

Aufgrund der Anforderungen an das Kommunizieren gehört Teilaufgabe 10.1 dem Anforderungsbereich II an. Bei den Teilaufgaben 10.2 und 10.3 rechtfertigen die Anforderungen an das Modellieren die Einordnung in diesen Anforderungsbereich.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 10.1, 10.2, 10.3:

- Es wird die jeweils falsche Grenze betrachtet (Defizit bzgl. K6).

Zu 10.1:

- Das Lebensalter bleibt unberücksichtigt. Als unterer Wert ergibt sich demnach ein Puls von 130 und als oberer Wert ein Puls von 170 (Defizit bzgl. K3, K6).

Zu 10.1, 10.3:

- Die unterschiedliche Bedeutung der Begriffe „Maximalpuls“ und „untere Grenze“ wird nicht erfasst (Defizit bzgl. K6).

Zu 10.2, 10.3:

- Die Klammern werden vergessen. Als Term wird somit beispielsweise $0,65 \cdot 200 - x$ angegeben (Defizit bzgl. K5).
- Der Prozentsatz von z. B. 65 % kann nicht sinnvoll in den Term integriert werden, was auf einer ungenügend ausgebildeten Operatorvorstellung beruhen könnte. Als Lösungen wird beispielsweise $65 \cdot (200 - x)$ angegeben (Defizit bzgl. K5).
- Es wird kein Term bzw. keine Formel mit Variablen, sondern ein konkretes Rechenbeispiel notiert, wie die folgende Schülerlösung zeigt. Dies lässt vermuten, dass Schwierigkeiten bestehen, den in natürlicher Sprache beschriebenen Zusammenhang formal darzustellen (Defizit bzgl. K6). Zudem zeigt diese Schülerlösung ein verbreitetes Defizit bei der korrekten Verwendung des Gleichheitszeichens.

$$D4: = 200 - 15 = 185 - 185 = 157$$

Weiterarbeit und Förderung

Treten bei der Bearbeitung der Aufgabe Schwierigkeiten auf, können diese häufig auf die angegebene Faustformel für eine ideale Trainingsbelastung zurückgeführt werden. Diese ist aufgrund der verschiedenen – meist unbekannten – Begriffe sicher nicht nur schwer inhaltlich zu erfassen, sondern auch in ein geeignetes mathematisches Modell zu übertragen.

Aus diesem Grund kann es hilfreich sein, den Schülerinnen und Schülern zunächst Aufgaben zu stellen, die sie auffordern, einfache Proportionalitätsüberlegungen in dem gewählten Kontext durchzuführen und sich diesem hierdurch anzunähern. Hierzu kann beispielsweise die folgende Aufgabe verwendet werden.

Herr Fuchs geht dreimal pro Woche joggen. Er läuft jedes Mal eine Strecke von ca. 8 km Länge.

Welche Entfernung legt er insgesamt von Anfang April bis Ende Oktober ungefähr zurück?

Kreuze an.

☐

200 km

☐

400 km

☐

550 km

☐

700 km

☐

1250 km

Im weiteren Verlauf des Unterrichts ist es sicher hilfreich, zunächst die Faustformel inhaltlich zu besprechen und dabei insbesondere die Begriffe „Maximalpuls“ sowie „untere“ und „obere Grenze“ abzuklären.

Anschließend bietet es sich an, die Schülerinnen und Schüler ihren Puls bestimmen und die beiden Grenzwerte für Ihren eigenen Puls berechnen zu lassen. Wird das Vorgehen hierzu von den Schülerinnen und Schülern im Plenum vorgestellt, kann zusätzlich die Kompetenz „mathematisch Kommunizieren“ gefördert werden (siehe auch allgemeines Kapitel VERA-8 2011). Ausgehend von den Ergebnissen kann anschließend das Vorgehen zur Berechnung der Grenzwerte verallgemeinert und mittels Termen und Gleichungen beschrieben werden.

Aufgabe 11: Rolltreppe

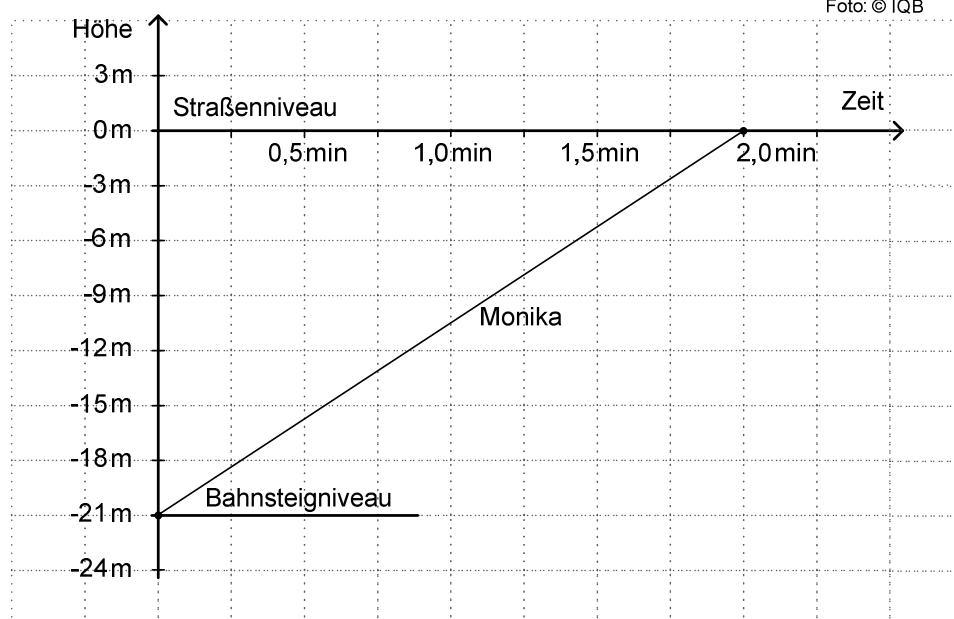
In einer U-Bahn-Station befindet sich einer der Bahnsteige genau 21 m unter Straßenniveau. Nach oben gelangt man mit einer Rolltreppe.

Monika stellt sich unten auf diese Rolltreppe und lässt sich einfach hochfahren.

Das folgende Zeit-Höhen-Diagramm stellt dar, wie tief sie zu jedem Zeitpunkt noch unter der Erde (dem Straßenniveau) ist.



Foto: © IQB



Teilaufgabe 11.1

Fülle die Lücke im Text:

Nach einer Minute Rolltreppenfahrt ist Monika noch _____ m unterhalb des Straßenniveaus.

Auswertung

RICHTIG	Nach einer Minute Rolltreppenfahrt ist Monika noch 10,5 m unterhalb des Straßenniveaus. Anm.: Höhenangaben aus dem Intervall [10;11] sind zu akzeptieren. ODER (Grenzfall) -10,5 m
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Teilaufgabe 11.2

Gib an, wie lange es etwa dauert, bis Monika 15m höher ist als das Bahnsteigniveau.

Auswertung

RICHTIG	1,4 min Akzeptiert werden aus der Graphik abgelesene und berechnete Lösungen im Intervall [1,375 min; 1,5 min]. Anm.: Die entsprechende Angabe der Zeit in anderer Einheit ist zulässig, sofern dann die gewählte Einheit angegeben ist.
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	4

Teilaufgabe 11.3

Monikas Bruder Sven betritt zusammen mit Monika die gleiche Stufe der Rolltreppe. Er ist ein sportlicher Typ und bleibt daher nicht auf derselben Stufe stehen, sondern läuft die Rolltreppe hoch. Auf halber Höhe kommt er allerdings an einem Fahrgast mit Koffer nicht vorbei und muss ab dort auch einfach mit der Rolltreppe mitfahren.

Zeichne in das voranstehende Koordinatensystem einen Graphen ein, der zu Svens „Fahrt“ vom Bahnsteig bis nach oben passt.

Auswertung

RICHTIG	Akzeptiert werden alle Graphen, deren erster Abschnitt bis zur halben Höhe (10,5 m) unter dem Straßenniveau steiler ist als Monikas Graph, da Sven schneller als die Rolltreppe ist und der zweite Abschnitt des Graphen parallel zu Monikas Graphen verläuft. Der erste Abschnitt muss nicht linear sein. z. B.
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	4

Hinweise zur Bearbeitung

Die Aufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da es um zeitabhängige Bewegungsvorgänge geht.

Zunächst ist die Sachsituation zu verstehen und die Abhängigkeit der Höhe (Position unter dem Straßenniveau) von der Zeit zu erfassen (K6). Dieser Zusammenhang wird durch den abgebildeten Graphen konkret gegeben. Teilaufgaben 11.1 und 11.2 erfordern es, dem Graphen Informationen zur Fahrt von Monika mit der Rolltreppe zu entnehmen (K4), und zwar bei 11.1 „vorwärts“ (geg. Zeit, ges. Höhe) und bei 11.2 „rückwärts“ (geg. Höhe, ges. Zeit). Dabei muss jeweils zwischen der Realsituation „Rolltreppenfahrt“ und dem graphisch repräsentierten Modell übersetzt werden (K3).

Zur Bearbeitung von Teilaufgabe 11.3 ist die Bewegung von Sven mit der Rolltreppe graphisch darzustellen. Dabei müssen die Informationen „läuft bis zur Hälfte die Rolltreppe hoch“ und „fährt ab hier mit der Rolltreppe mit“ als bedeutsam erkannt, adäquat interpretiert werden (K6) und sich dann in den entsprechenden Steigungen der Strecken im Graphen (dem Modell zur Sachsituation) widerspiegeln (K3, K4).

Die beiden ersten Teilaufgaben gehören zum Anforderungsbereich I, da lediglich einzelne Werte aus der Graphik abzulesen sind. Teilaufgabe 11.3 hingegen gehört dem Anforderungsbereich II an, da diese einen Wechsel zwischen der graphischen und der verbal beschreibenden Ebene erforderlich macht.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 11.1:

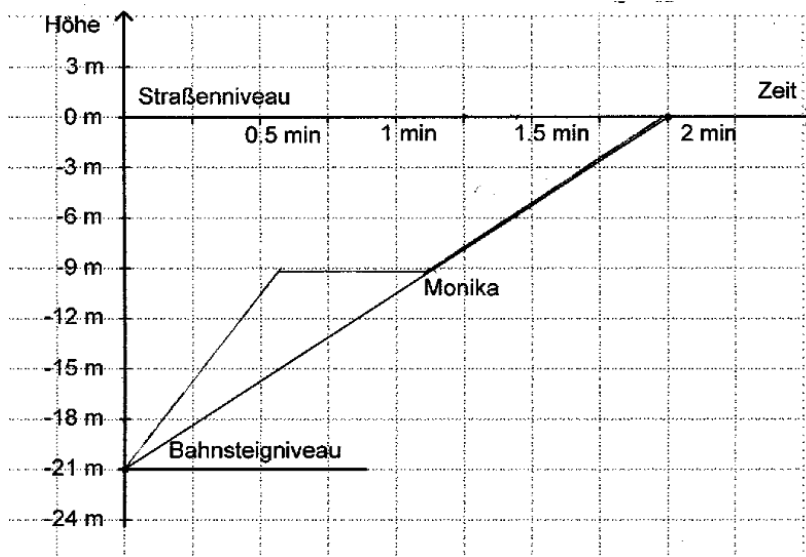
- Die Position Monikas wird mittels einer negativen Zahl (z. B. -10,5) angegeben. Es wird nicht reflektiert, dass das Minuszeichen im „unterhalb“ steckt (Defizit bzgl. K6).

Zu 11.2:

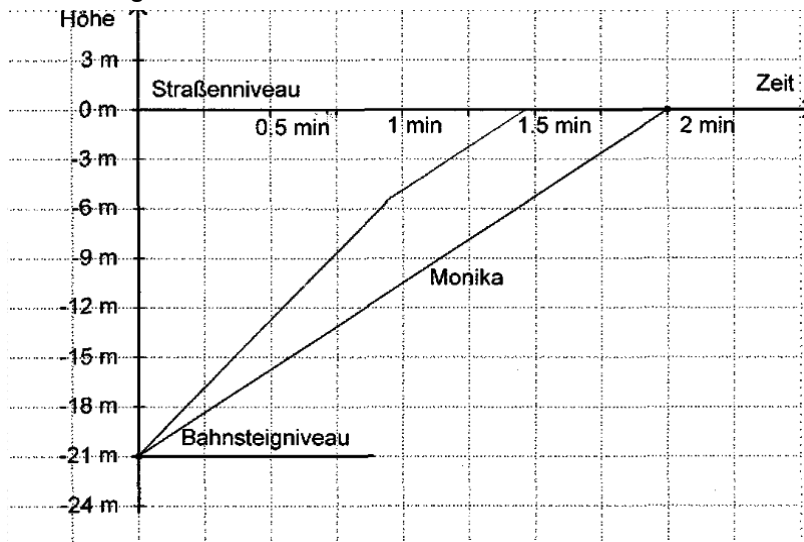
- Es wird nicht darauf geachtet, dass Monika 15 m höher als das Bahnsteigniveau sein soll. Stattdessen wird die Zeit angegeben, welche verstreicht, bis Monika auf einer Höhe von 15 m unterhalb des Straßenniveaus ist (Fehlösung 0,6 min; Defizit bzgl. K6).

Zu 11.3:

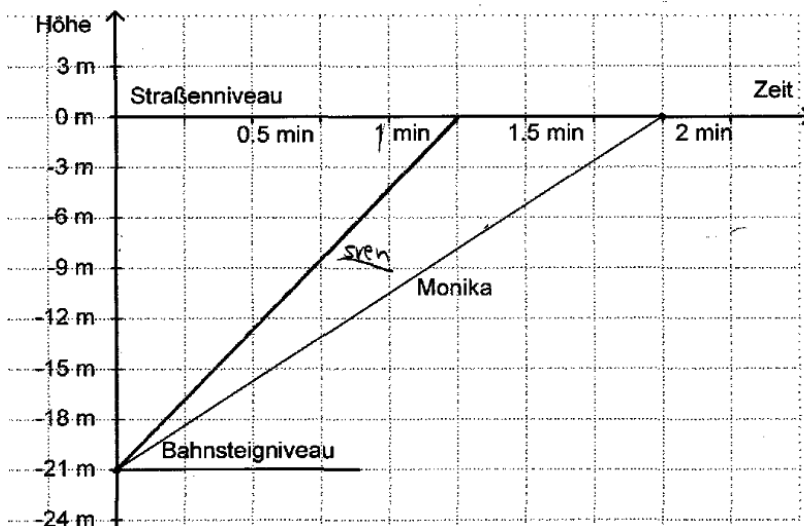
- Der erste Abschnitt des Graphen zu Svens Bewegung verläuft nicht steiler als der Graph zu Monikas Fahrt mit der Rolltreppe. D. h. das Mitlaufen von Sven auf der Rolltreppe wurde hinsichtlich der Geschwindigkeit nicht richtig dargestellt (Defizit bzgl. K3, K4).
- Die Bewegung der Rolltreppe wird vernachlässigt. So wird die Phase, in der sich Sven nicht mehr aktiv fortbewegt, sondern nur mit der Rolltreppe mitfährt, teilweise durch einen waagrechten Abschnitt im Graphen veranschaulicht (Defizit bzgl. K3, K4). Dies zeigt die folgende Schülerlösung.



- Svens Bewegung ändert sich nicht nach der Hälfte der Strecke, sondern etwa nach der Hälfte der Zeit. Demnach ist der erste Abschnitt des Graphen, in welchem Sven schneller als Monika unterwegs ist, zu lang (Defizit bzgl. K4, K6). Dies veranschaulicht die folgende Schülerlösung.



- Es wird vernachlässigt, dass Sven ab der Hälfte der Strecke nur mit der Rolltreppe mitfährt. Demzufolge ändert sich die Steigung des Graphen zu Svens Bewegungsablauf nicht (Defizit bzgl. K3). Dies illustriert die folgende Schülerlösung.



Weiterarbeit und Förderung

Treten bei der Bearbeitung der Aufgabe Schwierigkeiten auf, wird dies wahrscheinlich primär bei Teilaufgabe 11.3 der Fall sein. So bietet es sich an, diese Teilaufgabe im Unterricht aufzugreifen und in diesem Rahmen auch Fehler, die bei den anderen beiden Teilaufgaben gemacht wurden, anzusprechen. Hierzu können die Schülerinnen und Schüler beispielsweise mit fehlerhaften Graphen konfrontiert und aufgefordert werden, diese zu berichtigen. Zur Übung kann auch eine Parallel-Aufgabe zur Fortbewegung mit einem unterirdischen Fahrstuhl konstruiert werden. Diese könnte beispielsweise folgendermaßen aussehen.

In einer U-Bahnstation befindet sich einer der Bahnsteige genau 21 m unter dem Straßenniveau. Neben der Rolltreppe kann man auch einen Fahrstuhl nutzen, um nach oben zu kommen. Stefan entscheidet sich für den Fahrstuhl und lässt sich nach oben fahren. Nach 6 m hält der Fahrstuhl auf Höhe eines anderen Bahngleises und zwei weitere Personen steigen ein. Nach einem Aufenthalt von 1 Minute fährt der Fahrstuhl bis auf Straßenniveau.

Zeichne Stefans Fahrt mit dem Fahrstuhl in den abgebildeten Graphen ein.

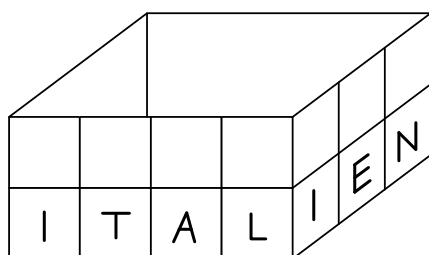
Auch weitere Aufgaben mit Graphen von Bewegungsvorgängen tragen zu einem tieferen Verständnis bei, z. B. das Hissen einer Fahne oder ein Sprung vom 3-m-Brett im Schwimmbad. Dabei kann auch der bekannte Fehler thematisiert werden (der auch bei der Rolltreppenaufgabe nahelegt), nämlich dass der Graph mit der realen Situation verwechselt wird.

Umgekehrt können den Schülerinnen und Schülern Graphen ausgehändigt werden, zu denen Bewegungsgeschichten zu erstellen sind. Hierzu eignen sich beispielsweise die Kontexte „Schulweg“, „Autofahrt“ oder „Fahrradtour“.

Zur weiteren Übung eignet sich auch die Aufgabe „Geschichte zur Graphik“ (vgl. hierzu den entsprechenden didaktischen Kommentar aus VERA-8 2012).

Aufgabe 12: Briefmarkenschachteln

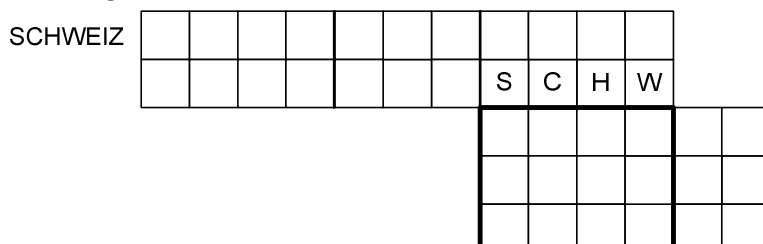
Martin sammelt neuerdings Briefmarken. Er will sie vorläufig in kleinen, selbst gebastelten Schachteln aufbewahren.



Hier sind Netze für weitere Schachteln. Vor dem Zusammenkleben beschriftet sie Martin.

Vervollständige die Beschriftung.

Teilaufgabe 12.1



Auswertung

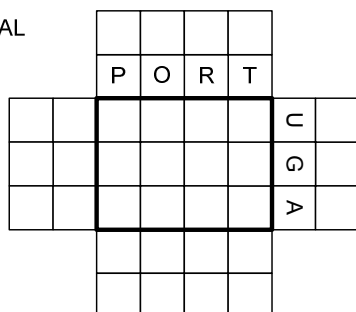
RICHTIG																			S	C	H	W			
																							E		
																							I		
																							N		
											ODER														
																			S	C	H	W			
											S	C	H	W	E	I	Z	S	C	H	W				
																							E		
																							I		
																							N		

Teilaufgabenmerkmale

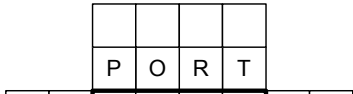
Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	1B

Teilaufgabe 12.2

PORTUGAL



Auswertung

RICHTIG	 A crossword grid with the following letters: - Across: P O R T (4 letters) - Down: U G A L (4 letters) The grid is 6 columns wide and 6 rows high. The letters are positioned as follows: - Row 1: P, O, R, T, (empty), (empty) - Row 2: (empty), (empty), (empty), (empty), U, (empty) - Row 3: (empty), (empty), (empty), (empty), G, (empty) - Row 4: (empty), (empty), (empty), (empty), A, (empty) - Row 5: (empty), (empty), (empty), L, (empty), (empty) - Row 6: (empty), (empty), (empty), (empty), (empty), (empty)
FALSCH	Alle anderen Lösungen (Insbesondere Buchstaben in falscher Ausrichtung).

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört der Leitidee Raum und Form (L3) an, da mit einem noch oben offenen Quader und zwei seiner möglichen Netze gearbeitet werden muss.

Bei beiden Teilaufgaben ist es notwendig, zwischen dem Schrägbild des Quaders und seinem Netz zu wechseln, um die im Schrägbild (mental) vorgegebene Beschriftung im Netz richtig zu ergänzen (K4).

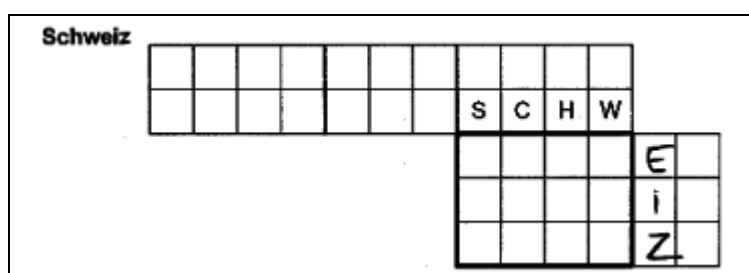
Dieser Wechsel zwischen zwei bekannten mathematischen Darstellungen und die nötigen mentalen Operationen (Wie sind die Buchstaben jeweils ausgerichtet?) rechtfertigen die Einordnung beider Teilaufgaben in den Anforderungsbereich II.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 12.1, 12.2:

Die folgenden Schwierigkeiten und Fehler sind wahrscheinlich alle auf ein noch nicht ausreichend gut entwickeltes räumliches Vorstellungsvermögen zurückzuführen.

- Es wird nicht erkannt, dass es sich bei der fett umrandeten Fläche um die Bodenfläche handelt. Diese wird demzufolge ebenfalls beschriftet.
- Es werden die falschen Seitenflächen beschriftet.
- Die richtige Seitenfläche wird in der falschen Richtung beschriftet, was die folgende Schülerlösung exemplarisch veranschaulicht.



Weiterarbeit und Förderung

Um das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler zu fördern, können die Briefmarkenschachteln im Unterricht leicht aus den gegebenen Netzen nachgebaut und dann richtig beschriftet werden. Vertiefend ist es denkbar, weitere Beschriftungen einzufordern oder aber diesen Aufgabentyp auf andere Körper (z. B. Pyramide) zu übertragen.

Weiterführend können Aufgaben zum Würfel oder Quader behandelt werden, in welchen nach allen möglichen Netzen gefragt wird. Sie erfordern neben der Arbeit mit mathematischen Darstellungen (K4) auch das Lösen mathematischer Probleme (K2) und das Begründen der gefundenen Anzahl an Netzen (K1), so dass weitere Kompetenzen gefördert werden können. Derartige Aufgaben bieten sich hierzu besonders an, da sie auf handelnder und auf zeichnerischer Ebene gelöst werden können und demnach vielen Schülerinnen und Schülern einen Zugang ermöglichen. Dabei bietet sich neben der Arbeit mit Pappe oder Papier auch der Einsatz von Klickis an, aus denen verschiedene Netze nachgebaut werden können.

Diese Aufgabe bietet auch die Möglichkeit, Umkehraufgaben zur gegebenen Frage zu behandeln und schließlich alle drei Grundaufgaben der Prozentrechnung mithilfe einer solchen Darstellung zu thematisieren (Grundwert, Prozentsatz oder Prozentwert ist gesucht). Insbesondere kann bei fehlerhaften Lösungen der obigen Aufgabe gefragt werden, welcher Prozentsatz – anstelle des geforderten – dargestellt ist.

Schließlich kann diese Aufgabe auch Anlass geben, grundlegende Fertigkeiten, wie das Umwandeln eines Prozentsatzes in einen Hundertstelbruch, einen gekürzten Bruch und einen Dezimalbruch zu üben.

Aufgabe 13: Verkehrszeichen

Teilaufgabe 13.1

Ist das Bild des Verkehrszeichens achsensymmetrisch?

Kreuze jeweils an.

	ja	nein
	☐	☐
	☐	☐
	☐	☐
	☐	☐
	☐	☐

Auswertung

RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	2. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt

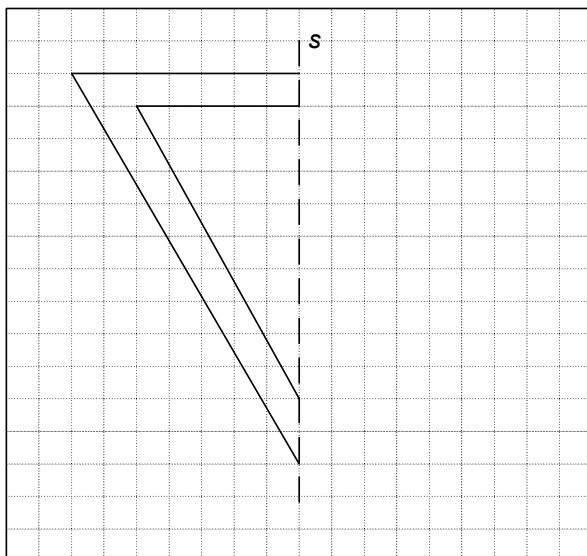
Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	4

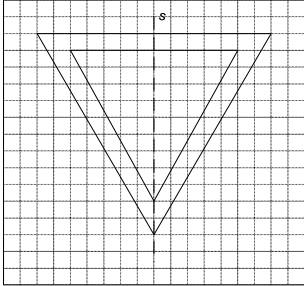
Teilaufgabe 13.2

Spiegle die Figur an der Spiegelachse s.

Zeichne mit Geodreieck oder Lineal.



Auswertung

RICHTIG	 Anm.: Die gespiegelten Eckpunkte müssen auf den Schnittpunkten des Rasters liegen. Zeichentoleranz diesbezüglich ± 1 mm.
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

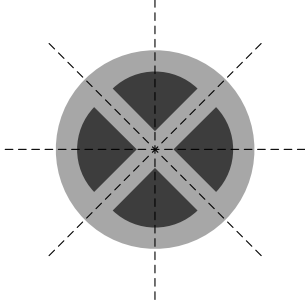
Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Teilaufgabe 13.3

Zeichne alle Spiegelachsen in diese Figur ein.



Auswertung

RICHTIG	 Anm.: Es müssen alle Spiegelachsen eingezeichnet sein. Die einzelnen Achsen dürfen um 1 mm bzw. 3° von ihrer ursprünglichen Lage abweichen.
---------	--

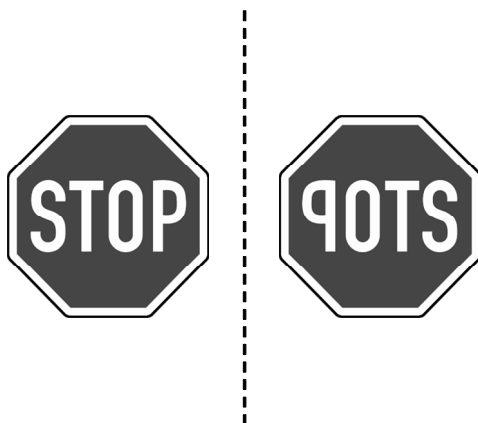
Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

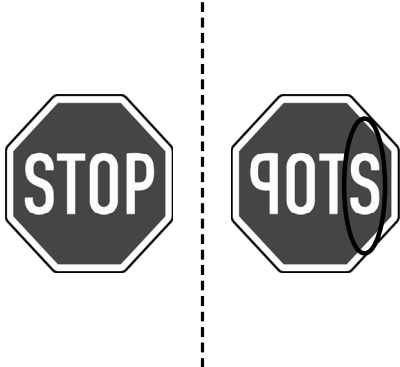
Teilaufgabe 13.4

Beim Spiegeln dieses Verkehrszeichens ist ein Fehler unterlaufen.

Kreise den Fehler ein.



Auswertung

RICHTIG	 Anm.: Der Fehler kann auch mittels eines anderen Zeichens (z. B. Kreuz) gekennzeichnet werden. Es kann auch das "S" im linken Bild markiert werden.
---------	--

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Raum und Form (L3), da mit ebenen Symmetrien und Abbildungen verständnisorientiert umgegangen werden muss.

Da zur Bearbeitung aller Teilaufgaben nur einfache Kenntnisse und Fertigkeiten zu Achsenspiegelungen und Achsensymmetrien zu reproduzieren sind, gehören diese Teilaufgaben zum Anforderungsbereich I.

Zu 13.1:

- Wird die zweite Antwortalternative als richtig bewertet, liegt vermutlich eine Verwechslung von Achsen- und Punktsymmetrie vor. Außerdem wurden die Graustufen nicht berücksichtigt (Defizit bzgl. K4).

Sollten bei der Bearbeitung dieser Teilaufgaben Schwierigkeiten auftreten, bietet es sich an, die Schülerinnen und Schüler diese im Unterricht mittels eines realen Spiegels bearbeiten zu lassen. Dies hilft ihnen, adäquate Vorstellungen von den Eigenschaften einer Achsenspiegelung zu entwickeln. Mit Blick auf die zweite Teilaufgabe kann dies auch mit Hilfe eines dynamischen Geometrieprogramms vertieft werden. Dabei ermöglicht es der Zugmodus des Programms, die Ausgangsfigur zu variieren und die Auswirkungen auf die Bildfigur sowie die Lage zur Spiegelachse zu analysieren. Anschließend können die Eigenschaften einer Achsenspiegelung gesammelt und mit denen anderer Abbildungen verglichen werden, wie dies auch in der folgenden ergänzenden Aufgabe eingefordert wird:

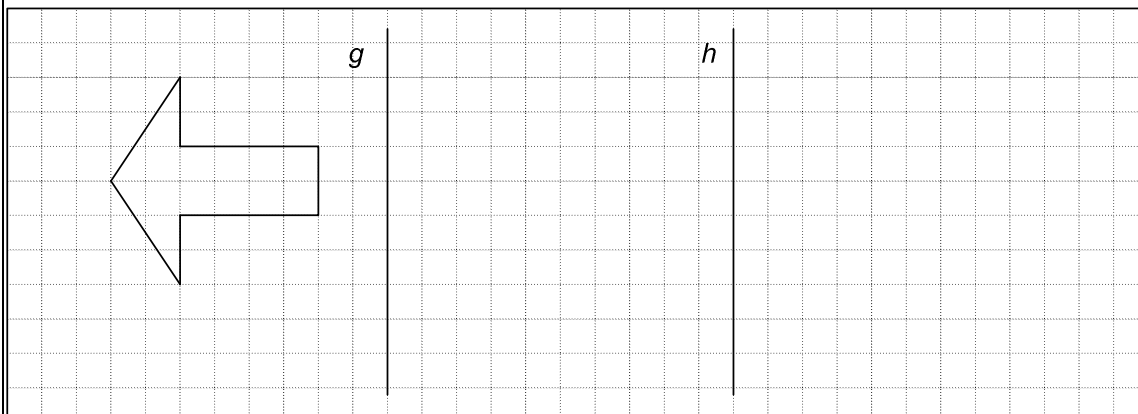
Nimm zu Peters Aussage Stellung.

42

verschiedener Beispiele leicht erkennen, dass die beiden Abbildungen nur in Spezialfällen zum selben Ergebnis führen. Hieraus können die Schülerinnen und Schüler auch folgern, dass sie eine Fallunterscheidung durchführen müssen.

Weiterführend können im Unterricht auch Verkettungen von Abbildungen untersucht werden. Diesbezüglich bieten sich beispielsweise die Verkettung zweier Spiegelungen an zueinander parallelen Geraden an, welche durch eine Verschiebung ersetzt werden kann. Die folgende Aufgabenstellung könnte hierzu genutzt werden:

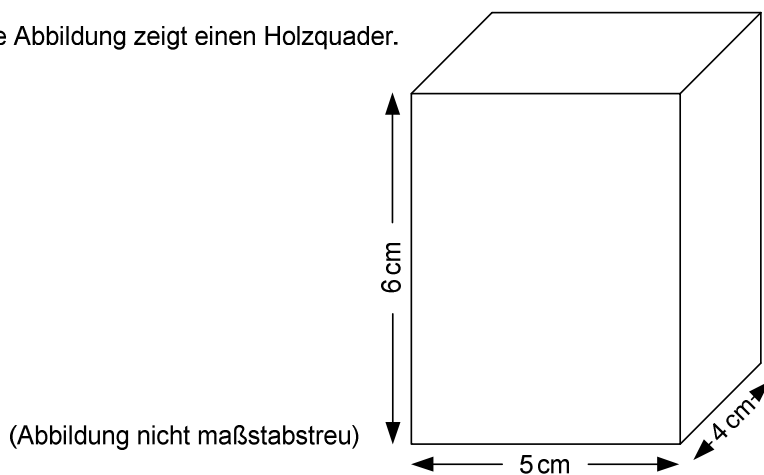
Übertrage den Pfeil in dein Heft. Spiegle ihn an der Achse g . Spiegle das Spiegelbild des Pfeils anschließend an der Achse h .



- Vergleiche die einzelnen Figuren. Beschreibe, was dir auffällt.
- Überlege, welche Abbildung zu demselben Ergebnis führt wie die Spiegelung an zwei zueinander parallelen Geraden. Beschreibe die Abbildung möglichst genau.

Aufgabe 14: Quader

Die Abbildung zeigt einen Holzquader.



Teilaufgabe 14.1

Berechne das Volumen dieses Quaders.

$V =$ _____ cm^3

Auswertung

RICHTIG	$V = 120 \text{ cm}^3$
---------	------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Teilaufgabe 14.2

Alle Seiten des Quaders sollen mit Papier beklebt werden.

Wie viel Papier wird (mindestens) benötigt?

Kreuze an.

☐

45 cm²

☐

74 cm²

☐

120 cm²

☐

148 cm²

Auswertung

RICHTIG	4. Kästchen wurde angekreuzt
---------	------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	3

Hinweise zur Bearbeitung

Die beiden Teilaufgaben 14.1 und 14.2 gehören zur Leitidee Messen (L2), da Volumen bzw. Oberflächeninhalt eines Quaders zu berechnen sind (K5). Die hierzu benötigten Maße sind der Abbildung zu entnehmen (K4).

Da es sich bei der Abbildung um ein Schrägbild eines bekannten mathematischen Körpers handelt und die notwendigen Rechnungen einfach sind, gehören beide Teilaufgaben dem Anforderungsbereich I an.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 14.1:

- Die angegebenen Längen der einzelnen Kanten werden addiert [Fehlösung: 15 cm³] (Defizit bzgl. K5).
- Es wird der Oberflächeninhalt und nicht das Volumen berechnet [Fehlösung: 148 cm²] (Defizit bzgl. K5)

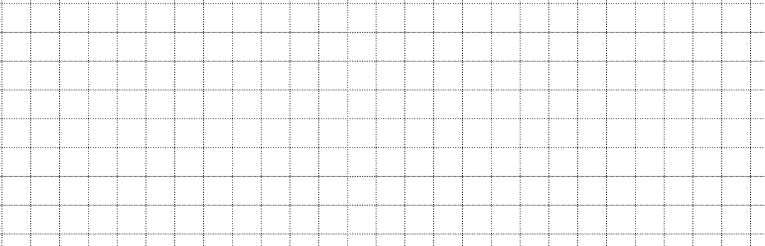
Zu 14.2:

- 1. Antwortalternative (Fehlösung: 45 cm²): Die Längen der sechs sichtbaren Kanten wurden addiert (Defizit bzgl. K5).
- 2. Antwortalternative (Fehlösung: 74 cm²): Dies ist die Summe der Flächeninhalte der drei abgebildeten Seitenflächen des Würfels (Defizit bzgl. K4).
- 3. Antwortalternative (Fehlösung: 120 cm²): Dies ist die Summe der Flächeninhalte der Vorder- und der Rückseite (Defizit bzgl. K4).

Treten bei der Bearbeitung der Teilaufgaben Schwierigkeiten auf, bietet es sich an, das Volumen und die Oberfläche handelsüblicher Verpackungen berechnen zu lassen. Die Verpackungen können bei Bedarf leicht in ihre Netze auseinander gefaltet werden, so dass die Zusammensetzung der Netze aus einzelnen rechteckigen Teilflächen veranschaulicht und die Formel zur Berechnung des Oberflächeninhalts erneut hergeleitet werden kann.

Weiterführend kann man im Unterricht leicht z. B. auch den Zusammenhang zwischen dem Volumen eines Quaders und dem einer Pyramide bei gleich großer Grundfläche und Höhe thematisieren. Anhand konkreter Beispiele können die Schülerinnen und Schüler selbstständig entdecken, dass bei gleich großer Grundfläche und Höhe das Volumen eines Quaders dreimal so groß ist wie das Volumen einer Pyramide. In diesem Zusammenhang bietet es sich nun an, die Situation operativ durchzuarbeiten und z. B. nach dem Verhältnis der Höhe einer Pyramide und eines Quaders bei gleich großer Grundflächen und Volumina zu fragen. Dies ermöglicht beispielsweise die folgende Aufgabe:

Begründe deine Antwort.



A large grid of graph paper for calculations, consisting of 20 columns and 15 rows of squares.

Das _____ einer Pyramide und eines Quaders ist nur von der Größe der Grundfläche und der _____ abhängig. Bei gleicher Höhe und gleich großer _____ ist das Volumen eines Quaders _____ so groß wie das Volumen einer _____. Da das Volumen und die Grundfläche beider Körper in der Aufgabe gleich groß sind, muss

45

Aufgabe 15: Geometrische Körper erkennen



In der nachfolgenden Tabelle sind Körper benannt.

Prüfe, ob diese in der Abbildung zu sehen sind.

Kreuze jeweils an.

	ja	nein
Zylinder	☐	☐
Quader	☐	☐
Pyramide	☐	☐
Kegel	☐	☐
Kugel	☐	☐

Auswertung

RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	2. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	2. Kästchen wurde angekreuzt

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Raum und Form (L3), da geometrische Körper identifiziert werden müssen.

Zur Lösung müssen die Bezeichnungen dieser Körper mit den gegebenen Figuren abgeglichen werden (K4).

Da es sich dabei um bekannte Körper handelt, gehört diese Aufgabe dem Anforderungsbereich I an.

Weiterarbeit und Förderung

Treten bei der Aufgabe Schwierigkeiten auf, können die Schüler im Unterricht aufgefordert werden, je einen „Steckbrief“ zu einem Körper zu erstellen, um deren charakteristische Merkmale herauszuarbeiten und die einzelnen Körper voneinander abzugrenzen. Dabei bietet es sich an, die verschiedenen Körper z. B. mittels Knete und Zahnstochern, Pappe oder Klickis nachzubauen oder nach passenden Alltagsgegenständen suchen zu lassen.

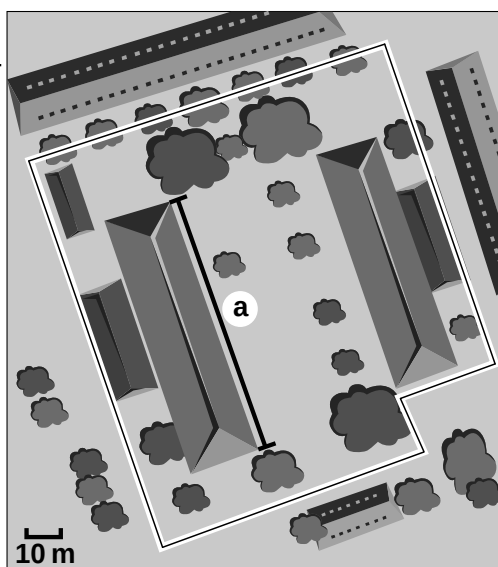
Mögliche Inhalte eines solchen Steckbriefs könnten sein:

- Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten
- Darstellung eines Schrägbildes und eines Netzes
- Angabe des Volumens sowie der Formel zu dessen Berechnung
- Angabe des Oberflächeninhalts sowie der Formel zu dessen Berechnung
- Besonderheiten, z. B. Lagebeziehungen von Begrenzungsflächen
- Unterschiede zu Körpern, mit denen sie leicht verwechselt werden können

Die erstellten Steckbriefe können ggf. in Form einer kleinen Ausstellung allen Schülerinnen und Schülern zugänglich gemacht werden. Werden die Ergebnisse dabei in Form einer Übersicht zusammengetragen, kann diese im folgenden Unterricht wie eine Art Formelsammlung genutzt werden.

Aufgabe 16: Schulgrundstück

Die Abbildung zeigt das Luftbild einer Schule. Darauf sind das Schulgrundstück (schwarz umrandet) und die Schulgebäude zu sehen.



Grafik: © IQB

Teilaufgabe 16.1

Die zwei größten Gebäude auf dem Grundstück sind die Schulgebäude.

Bestimme mit Hilfe der Angaben im Bild die Länge a .

Auswertung

RICHTIG	Länge a dieses Schulgebäudes aus dem Intervall $[64; 100]$ m.
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	4

Teilaufgabe 16.2

Auf dem Schulhof werden 100-m-Sprints gelaufen. Sebastian will eine 100-m-Laufbahn als Strecke in das Foto einzeichnen.

Wie lang ist die Strecke, die er zeichnen müsste?

Auswertung

RICHTIG	Länge der Strecke aus dem Intervall [4; 7] cm.
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	4

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da verschiedene Längen zu bestimmen sind.

Bei beiden Teilaufgaben sind zunächst die gesuchten Größen aus dem Text zu entnehmen (K6). Zur Bearbeitung der Teilaufgabe 16.1 ist zunächst die Länge der Strecke a des Schulgebäudes im Bild zu messen (K4). Mit Hilfe des angegebenen Maßstabs muss anschließend die wirkliche Länge des Schulgebäudes berechnet werden (K5).

Bei Teilaufgabe 16.2 muss umgekehrt zu einer vorgegebenen wirklichen Länge die entsprechende Länge maßstabsgerecht in die Abbildung eingezeichnet werden. Um die Länge der einzuzeichnenden Laufbahn zu berechnen, wird erneut der gegebene Maßstab verwendet (K4) und umgerechnet (K5).

Da zur Lösung beider Teilaufgaben nur elementare Fertigkeiten und Fähigkeiten erforderlich sind, gehören beide – trotz ihrer Mehrschrittigkeit – noch dem Anforderungsbereich I an.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 16.1:

- Es wird nur der im Bild gemessene Wert angegeben. Die wirkliche Länge wird nicht berechnet, d. h. der Maßstab kann entweder nicht abgelesen oder aber nicht eingesetzt werden (Defizit bzgl. K6 oder K4).

Zu 16.1, 16.2:

- Es wird davon ausgegangen, dass 1 cm im Bild in Wirklichkeit 10 m sind. Dies könnte dadurch zustande gekommen sein, dass die Abbildung nur oberflächlich betrachtet und der gegebenen Strecke einfach eine Länge von 1 cm zugewiesen wurde, weil dies eine häufig im Unterricht verwendete Angabe ist [Fehlösungen: 45 m bzw. 10 cm] (Defizit bzgl. K4).
- Es kommt zu Umrechnungsfehlern zwischen den Einheiten Millimeter und Zentimeter, welche sich auf den verwendeten Maßstab auswirken. So wird z. B. angenommen, dass $10\text{ m} = 10\,000\text{ mm}$ seien, woraus sich ein Maßstab von $5 : 10\,000$ ergibt (Defizit bzgl. K5).

Weiterarbeit und Förderung

Unterrichtliche Hinweise zur Arbeit mit dem Maßstabsbegriff können dem Didaktischen Kommentar zur Aufgabe „Maßstabsrechner“ entnommen werden, welche auch als Vorbereitung auf die Aufgabe „Schulgrundstück“ genutzt werden kann.