Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2012
8. Jahrgangsstufe (VERA-8)
Mathematik – Didaktische Handreichung

Modul C: Testheft I

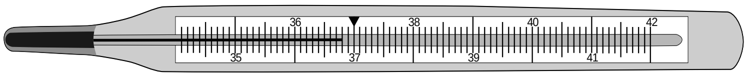
Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1: Fieberthermometer 4
Aufgabe 2: Zahlen gesucht 6
Aufgabe 3: Zahlenmauer 10
Aufgabe 4: Kreise färben 13
Aufgabe 5: Harzwanderung 14
Aufgabe 6: Schulstatistik 17
Aufgabe 7: Temperaturen in Frankfurt am Main 19
Aufgabe 8: Darstellung in Diagrammen 22
Aufgabe 9: Bonbons 24
Aufgabe 10: Chancen 25
Aufgabe 11: Zählung von Fahrzeugen 30
Aufgabe 12: Berechne x 32
Aufgabe 13: Zahl gesucht 33
Aufgabe 14: Kraftfutter 34
Aufgabe 15: Maßstabsrechner 36
Aufgabe 16: Tunnelbohrmaschine 37
Aufgabe 17: Geschichte zur Graphik 39
Aufgabe 18: Lineare Funktionen anwenden 42
Aufgabe 19: Briefmarkenschachteln 45
Aufgabe 20: Verkehrszeichen 47
Aufgabe 21: Quader 51
Aufgabe 22: Geometrische Körper erkennen 54
Aufgabe 23: Schulgrundstück 55

Nr.	Name der Aufgabe	Kompetenz-stufe	Kompetenz						Leitidee					AB
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	L1	L2	L3	L4	L5	
1.1	Fieberthermometer	IA				x			x					I
1.2	Fieberthermometer	IA					x		x					I
2.1	Zahlen gesucht	IB		x					x					I
2.2	Zahlen gesucht	IV		x					x					II
3.1	Zahlenmauer	IA		x					x					I
3.2	Zahlenmauer	II		x			x		x					I
3.3	Zahlenmauer	IB		x			x		x					I
4	Kreise färben	IB				x	x		x					I
5.1	Harzwanderung	IA				x			x					I
5.2	Harzwanderung	II		x		x			x					II
6	Schulstatistik	IA				x							x	I
7.1	Temperaturen in Frankfurt am Main	IA				x							x	I
7.2	Temperaturen in Frankfurt am Main	IA				x							x	I
7.3	Temperaturen in Frankfurt am Main	II				x		x					x	II
8	Darstellung in Diagrammen	IA				x							x	I
9	Bonbons	IB			x								x	I
10.1	Chancen	IB			x	x							x	I
10.2	Chancen	II	x		x	x		x					x	II
11	Zählung von Fahrzeugen	IA				x							x	I
12	Berechne x	IA					x					x		I
13	Zahl gesucht	IA					x					x		I
14	Kraftfutter	IB			x		x	x				x		I
15	Maßstabsrechner	II					x	x				x		I
16.1	Tunnelbohrmaschine	III			x		x	x				x		I
16.2	Tunnelbohrmaschine	III			x		x	x				x		I
17	Geschichte zur Graphik	III			x	x		x				x		II
18	Lineare Funktionen anwenden	II			x			x				x		II
19.1	Briefmarkenschachteln	IB				x					x			II
19.2	Briefmarkenschachteln	II				x					x			II
20.1	Verkehrszeichen	IV				x					x			I
20.2	Verkehrszeichen	IA				x	x				x			I
20.3	Verkehrszeichen	II				x					x			I
20.4	Verkehrszeichen	II				x					x			I
21.1	Quader	II				x	x			x				I
21.2	Quader	III				x	x			x				I
22	Geometrische Körper erkennen	II				x					x			I
23.1	Schulgrundstück	IV				x	x	x		x				I
23.2	Schulgrundstück	IV				x	x	x		x				I

Aufgabe 1: Fieberthermometer

Die Abbildung zeigt ein Fieberthermometer. Die schwarze dicke Linie zeigt die gemessene Körpertemperatur in Grad Celsius an.



Grafik: © IQB

Teilaufgabe 1.1

Gib an, wie viel °C die gemessene Körpertemperatur in der Abbildung beträgt.

Auswertung

RICHTIG	**36,8** °C

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Teilaufgabe 1.2

Zu einem anderen Zeitpunkt beträgt die Körpertemperatur 37,9 °C. Sie steigt dann um 2,3 °C an.

Gib an, wie viel °C die Körpertemperatur nach dem Temperaturanstieg beträgt.

Auswertung

RICHTIG	**40,2** °C

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Hinweise zur Bearbeitung

Beide Teilaufgaben gehören zur Leitidee Zahl (L1). Teilaufgabe 1.1 liegen Vorstellungen von rationalen Zahlen zugrunde und in Teilaufgabe 1.2 wird ein vertrauter Algorithmus genutzt.

In Teilaufgabe 1.1 gehen die Schülerinnen und Schüler mit einer Darstellung um (K4). Sie übertragen die vertraute und geübte Darstellung eines Zahlenstrahls auf den Anwendungskontext Thermometer und lesen die dargestellte Temperatur ab.

In Teilaufgabe 1.2 motiviert der gegebene Kontext zwar die erforderliche Addition, bleibt aber ansonsten praktisch unberücksichtigt. Die Formulierung „steigt um" kann unmittelbar in „addieren" übersetzt werden, um dann die gesuchte Temperatur zu berechnen (K5).

Beide Teilaufgaben erfordern die direkte Anwendung vertrauter Verfahren. Sie werden daher beide dem Anforderungsbereich I zugewiesen.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 1.1:

- Die Temperatur wird ungenau abgelesen [Fehllösung z. B. 36,6 °C] (Defizit bzgl. K4).
- Der Skalierung wird eine Hundertsteleinteilung zugrunde gelegt [Fehllösung 36,08 °C] (Defizit bzgl. K4).
- Der mittige Strich zwischen 36 °C und 37 °C wird missachtet, sodass 36,5 °C mit 36,0 °C verwechselt wird [Fehllösung 36,3 °C] (Defizit bzgl. K4).

Zu 1.2:

- Die Maßzahlen werden subtrahiert. Möglicherweise wird „steigt an“ mit „fällt um“ verwechselt [Fehllösung 35,6 °C] (Defizit bzgl. K5).

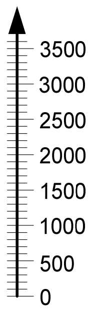
Weiterarbeit und Förderung

Bereitet das Ablesen der Temperatur vom Fieberthermometer Schwierigkeiten, so kann dies an anderen Skalen, die ebenfalls nicht digital sind, geübt werden. Hierzu bieten sich u. a. Tankanzeigen, Küchenwaagen oder Skalen, die Füllstände anzeigen, an. Im Sinne des operativen Durcharbeitens können wechselseitig sowohl Werte von Skalen abgelesen als auch auf diesen eingetragen werden, wobei der Detaillierungsgrad der einzelnen Skalen variiert werden kann. Man vergleiche hierzu etwa auch den didaktischen Kommentar zur Aufgabe „Milchmenge“ aus VERA-8 2010.

Gelingt in Teilaufgabe 1.2 die Deutung der die Temperaturänderung beschreibenden fachsprachlichen Begriffe nicht, so können diese zunächst bewusst gemacht und ihre Bedeutung graphisch am Fieberthermometer veranschaulicht werden. Auch ein Kontrastieren mit verwandten Begriffen, z. B. mit „fällt um“, liegt nahe. Diese Teilaufgabe kann ebenfalls im Sinne des operativen Durcharbeitens variiert werden, indem je zwei der drei Angaben Anfangszustand, Temperaturänderung und Endzustand genannt werden. Die jeweils zugehörigen Rechnungen können dann aufgestellt, im Sachkontext verbalisiert und schließlich rechnerisch und/oder graphisch gelöst werden, wobei sich der Schwierigkeitsgrad durch die Hinzunahme negativer Temperaturen auch erhöhen lässt. Alternativ können auch je zwei dieser drei Angaben am Thermometer visualisiert, passende Situationen daran verbalisiert und in Rechnungen übersetzt werden.

Einige solcher Aufgaben seien nachfolgend exemplarisch genannt:

- Zu einem anderen Zeitpunkt beträgt die Körpertemperatur 37,9 °C. Sie fällt dann um 2,3 °C. Gib an, wie viel °C die Temperatur anschließend beträgt.
- Ein Außenthermometer zeigt morgens 15 °C. Gegen Mittag zeigt es bereits 23 °C
  a) Beschreibe die Temperaturänderung in Worten.
  b) Skizziere ein Thermometer. Trage beide Temperaturen darauf ein und kennzeichne die Temperaturänderung.
- An einem heißen Tag fällt die Temperatur nach einem Gewitter um 11 °C und beträgt anschließend nur noch 18 °C. Ermittle die Temperatur vor dem Gewitter.
- Veranschauliche folgende Situation an der Anzeige des Heizöltanks (s. Abbildung): Im Tank befinden sich noch ungefähr 600 Liter. Beim Betanken werden 2300 Liter eingefüllt. Kennzeichne die Veränderung und markiere zusätzlich den neuen Füllstand.



Als Erweiterung von Teilaufgabe 1.2 kann auch die Aufgabe „Außenthermometer" aus VERA-8 2010 behandelt werden (vgl. auch den didaktischen Kommentar hierzu).

In der folgenden weiteren Teilaufgabe von „Fieberthermometer" wird eine Funktion als Mittel zur Beschreibung eines quantitativen Zusammenhangs genutzt. Sie ist geeignet, die hier gegebene Aufgabe inhaltlich auszuweiten.

> In den USA werden Temperaturen in Grad Fahrenheit (°F) gemessen.
>
> Um Grad Celsius in Fahrenheit umzurechnen, kann man die folgende Formel benutzen:
>
> $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$
>
> F: Temperatur in Grad Fahrenheit
>
> C: Temperatur in Grad Celsius
>
> Gib 40 °C in Grad Fahrenheit an.
>
> ______________________ °F

Die Unterscheidung proportionaler und linearer funktionaler Zusammenhänge kann anhand der jeweiligen Funktionsterme und durch Gegenüberstellung der zugehörigen Funktionsgraphen geschehen, um so die Bedeutung des Absolutglieds und der Steigung der Geraden zu thematisieren. Häufig vernachlässigen Schülerinnen und Schüler den Faktor vor C, was zur Fehllösung 40 °C + 32 °C = 72 °C führt. Oft ergeben sich aber auch Probleme auf technischer Ebene, etwa indem nach dem Einsetzen der gegebenen Temperatur das Malzeichen als Pluszeichen fehlgedeutet wird. Dies führt zu der Fehllösung
$\frac{9}{5}$ °C + 40 °C + 32 °C = 73,8 °C.

Besonders die Auswirkungen des ersten beschriebenen typischen Fehlers (Fehllösung 72 °C) können am Graphen besprochen werden. Würde der Faktor $\frac{9}{5}$ keine Rolle spielen, so würden sich alle in °C angegebenen Temperaturen um 40 °C von den in Fahrenheit umgerechneten Temperaturen unterscheiden. Dass dies nicht so ist, lässt sich schon anhand eines Gegenbeispiels, z. B. für 0 °C, zeigen.

Wird diese Teilaufgabe als inhaltliche Erweiterung hinzugenommen, bieten sich auch Verknüpfungen zur Aufgabe „Lineare Funktionen anwenden" an (vgl. auch den didaktischen Kommentar hierzu).

Aufgabe 2: Zahlen gesucht

Teilaufgabe 2.1

Schreibe **alle** dreistelligen Zahlen auf, die aus den Ziffern 1, 2 und 3 gebildet werden können. In keiner der Zahlen darf eine dieser Ziffern mehrfach vorkommen.

Auswertung

RICHTIG	123; 132; 213; 231; 312; 321 Anm.: Die Reihenfolge der Zahlentupel ist irrelevant.
FALSCH	Alle unvollständigen, fehlerhaften oder falschen Antworten.

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1B

Teilaufgabe 2.2

Luisa weiß, dass man aus den vier Ziffern 1, 2, 3 und 4 insgesamt genau 24 verschiedene vierstellige Zahlen bilden kann, in denen keine dieser vier Ziffern mehrfach vorkommt.

Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlen können insgesamt gebildet werden, wenn man ebenso mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 vorgeht?

Gib dein Ergebnis an.

Auswertung

RICHTIG	120 ODER 5! ODER $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ODER $24 \cdot 5$

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	4

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört der Leitidee Zahl (L1) an, da die Schüler kombinatorische Überlegungen durchführen, um die Anzahlen der jeweiligen Möglichkeiten zu ermitteln.

Zur Bearbeitung der Teilaufgabe 2.1 ist es erforderlich, alle Permutationen der Ziffern 1, 2 und 3 zu finden. Hierzu bietet es sich an, die Ziffern von einer anfänglichen Kombination systematisch zu vertauschen. Alternativ kann die gesuchte Anzahl berechnet werden, indem man die für die einzelnen Ziffern zur Verfügung stehenden Anzahlen von Plätzen miteinander multipliziert ($3 \cdot 2 \cdot 1$) (K2).

Bei Teilaufgabe 2.2 ist ein systematisches Notieren aller einzelnen Permutationen aufgrund der hohen Anzahl von 120 verschiedenen Möglichkeiten kaum machbar. Somit ist bei dieser Teilaufgabe der bereits beschriebene rechnerische Ansatz naheliegender ($5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$). Zweckmäßigerweise kann auch die im Text angegebene Anzahl von Permutationen bei vier verschiedenen Ziffern genutzt werden, $24 \cdot 5 = 120$. Die Überlegung ist dabei, dass die Ziffer 5 an jeder der 5 Positionen stehen kann und die anderen 4 Ziffern jeweils beliebig permutieren können (K2).

Aufgrund der einfachen Strategie des Hinschreibens aller Möglichkeiten gehört Teilaufgabe 2.1 noch zu Anforderungsbereich I. Da es die Bearbeitung von Teilaufgabe 2.2 erforderlich macht, eine geeignete heuristische Strategie zu finden, gehört sie Anforderungsbereich II an.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 2.1:

- Es wird nur die Anzahl 6 aller Permutationen notiert. Die Zahlen selbst werden nicht angegeben.

Zu 2.1, 2.2:

- Es werden verschiedene Zahlenkombinationen mit den angegebenen Ziffern notiert, ohne jedoch auf die Einschränkung hinsichtlich der Stellenanzahl oder des Zahlenbereichs zu achten. So wird beispielsweise 12,3 als Zahl angegeben.
- Es werden Permutationen vergessen oder aber doppelt aufgezählt (Defizit bzgl. K2).

Zu 2.2:

- Die Ziffer 5 wird als Anzahl möglicher neuer Zifferkombinationen aufgefasst und somit zu den 24 verschiedenen Zahlen bei vier Ziffern addiert (Fehllösung 29; Defizit bzgl. K2)
- Die Anzahl möglicher Kombinationen wird mit 30 angegeben. Dies kann auf verschiedenen Überlegungen basieren.
    - o Vermutlich verbirgt sich dahinter die Überlegung, dass es pro Ziffer 6 verschiedene Kombinationsmöglichkeiten gibt (24 : 4 = 6). Demzufolge gibt es bei 5 verschiedenen Ziffern insgesamt 30 verschiedene Zahlen, wie die folgende Schülerlösung illustriert (Defizit bzgl. K2).

Teilaufgabe 2: Zahlen gesucht

Luisa weiß, dass man aus den vier Ziffern 1, 2, 3 und 4 insgesamt genau 24 verschiedene vierstellige Zahlen bilden kann, in denen keine dieser vier Ziffern mehrfach vorkommt.

Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlen können insgesamt gebildet werden, wenn man ebenso mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 vorgeht?

Gib dein Ergebnis an.

30

Weil 24 : 4 = 6 eine Zahl kommt 6 mal vor

also 24 + 6 = 30

- Es wird festgestellt, dass sich die Anzahl der Möglichkeiten bei vier statt drei Ziffern vervierfacht. Daraus wird geschlossen, dass es nun bei fünf Ziffern fünfmal so viele sein müssen. Fälschlicherweise wird nun jedoch als Ausgangspunkt die 6 statt der 24 verwendet und $5 \cdot 6 = 30$ gerechnet (Defizit bzgl. K2).

> **Teilaufgabe 2: Zahlen gesucht**
>
> Luisa weiß, dass man aus den vier Ziffern 1, 2, 3 und 4 insgesamt genau 24 verschiedene vierstellige Zahlen bilden kann, in denen keine dieser vier Ziffern mehrfach vorkommt.
>
> Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlen können insgesamt gebildet werden, wenn man ebenso mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 vorgeht?
>
> Gib dein Ergebnis an.
>
> 30
>
> 3=6 24·6=4
>
> 4=24 5·6=30

Weiterarbeit und Förderung

Schwierigkeiten beim Lösen der Aufgabe können sicherlich des Öfteren auf noch zu geringe Erfahrungen beim Lösen mathematischer Probleme zurückgeführt werden. Aus diesem Grund bietet es sich an, die Aufgabe in Kleingruppen bearbeiten zu lassen, so dass sich die Schülerinnen und Schüler gegenseitig helfen können. Dabei können beispielsweise Tippkarten zur Verfügung gestellt werden, um als Lehrkraft Zeit zur Beobachtung und Unterstützung der einzelnen Gruppen nach dem Prinzip der minimalen Intervention zu haben. Auf den Tippkarten könnten beispielsweise folgende Hinweise stehen:

1. Legt euch eine Tabelle nach folgendem Muster an.

1. Position	2. Position	3. Position

2. Notiert verschiedene Zahlenkombinationen. Versucht sie nach einem bestimmten Kriterium zu sortieren. Welche Zahlenkombinationen fehlen euch noch?
3. Übertragt das Problem auf einen anderen Kontext. z. B. das dreimalige Ziehen einer Kugel mit den Ziffern 1, 2, 3 aus einer Urne ohne zurücklegen.

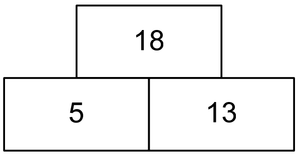
Werden die Arbeitsergebnisse der Kleingruppen anschließend im Plenum vorgestellt, können die verschiedenen Herangehensweisen sowie die genutzten Hilfsmittel herausgearbeitet und zusammengestellt werden. Dabei sollte zunächst das systematische Notieren der verschiedenen Zahlenkombinationen angesprochen werden. Dies kann unter Rückgriff auf eine Tabelle oder auch auf ein Baumdiagramm erfolgen. Im Anschluss an dieses Vorgehen kann leicht überlegt werden, wie viele Plätze für die einzelnen Ziffern zur Verfügung stehen und durch welche Rechnung sich die Anzahl möglicher Zahlen ermitteln lässt. Hierauf aufbauend kann nun betrachtet werden, wie sich die Anzahl an Zahlenkombinationen durch das Hinzufügen einer weiteren Ziffer verändert.

Aufgabe 3: Zahlenmauer

Zahlenmauern sind aus Steinen gebaut.

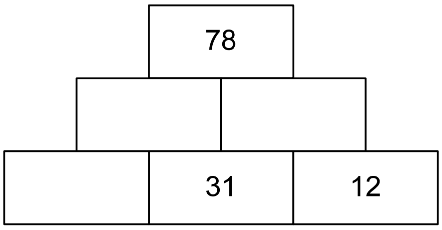
Dabei steht in jedem Stein die **Summe** der beiden darunter liegenden Steine.

Beispiel:

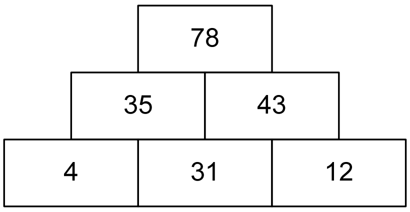


Teilaufgabe 3.1

Ergänze die drei fehlenden Zahlen in der Zahlenmauer.



Auswertung

RICHTIG	
FALSCH	Alle anderen fehlerhaften, unvollständigen oder falschen Antworten. Insbesondere, wenn nur zwei statt drei Steine richtig ausgefüllt wurden.

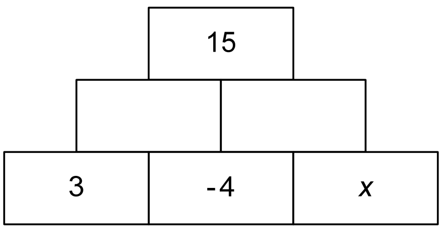
Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Teilaufgabe 3.2

Gib an, welche Zahl man hier für *x* einsetzen muss.

x = ________



Auswertung

RICHTIG	x = **20** Anm.: Die Steine der Zahlenmauer müssen nicht ausgefüllt werden.

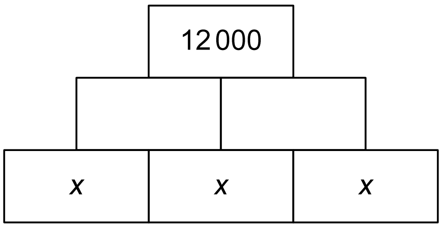
Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Teilaufgabe 3.3

Gib an, welche Zahl man hier für *x* einsetzen muss.

x = ________



Auswertung

RICHTIG	x = **3000** Anm.: Die Steine der Zahlenmauer müssen nicht ausgefüllt werden.

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1B

Hinweise zur Bearbeitung

Die Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da mit Zahlen und Variablen verständnisorientiert umgegangen werden muss.

Zur Bearbeitung der einzelnen Teilaufgaben muss zunächst das Bildungsprinzip solcher Zahlenmauern erfasst werden. Die jeweils gegebenen Zahlenmauern erfordern alle, in Teilen auch rückwärts zu arbeiten (K2) und von einer gegebenen Summe auf einen fehlenden Summanden zu schließen. Die zur Bearbeitung der verschiedenen Teilaufgaben durchzuführenden Rechnungen sind alle elementar. Zudem ist bei den Teilaufgaben 3.2 und 3.3 mit negativen Zahlen und mit einer Variablen umzugehen (K5).

Aufgrund der eher elementaren Anforderungen an das Problemlösen und das Rechnen gehören alle drei Teilaufgaben dem Anforderungsbereich I an.

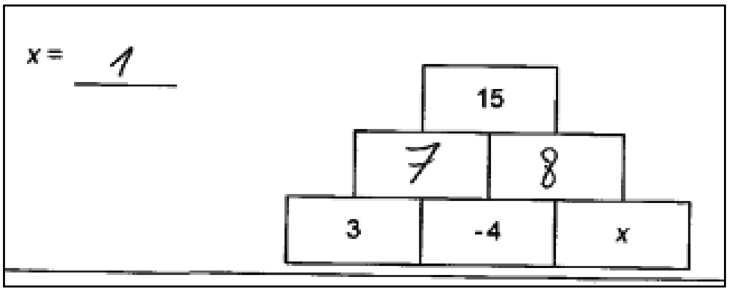
Mögliche Schwierigkeiten

Zu 3.1, 3.2:

- Es werden nur die Steine, deren Zahlen mittels Additionen berechnet werden können, ausgefüllt. Das Aufstellen und Berechnen von Umkehraufgaben im Sinne des Rückwärtsarbeitens gelingt nicht (Defizit bzgl. K2).

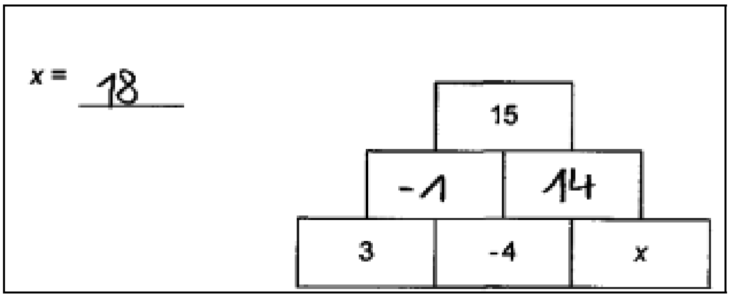
Zu 3.2, 3.3:

- Das Bildungsgesetz wurde nicht richtig erfasst, wie die folgende Schülerlösung zeigt. Zwar ergibt sich die Zahl 15 aus der Summe der beiden darunter stehenden Zahlen, doch passen diese nicht mehr zu den Zahlen der untersten Reihe (Defizit bzgl. L2). Die Schülerlösung legt vielmehr nahe, dass die Zahlen der freien Steine so gewählt wurden, dass die Summe aller Zahlen der Zielzahl entspricht.



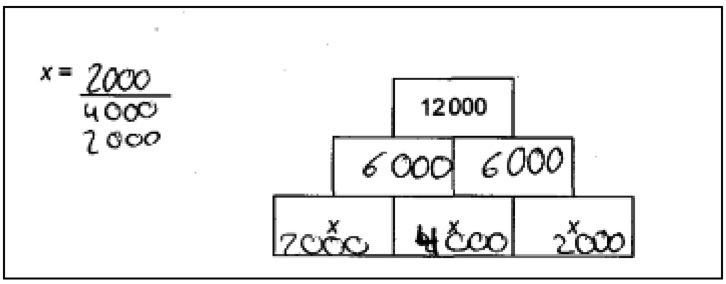
Zu 3.2:

- Der Umgang mit negativen Zahlen bereitet Probleme, so dass es bei deren Addition und Subtraktion zu Fehlern (und dann zu Folgefehlern) kommt (Defizit bzgl. K5). Diese Schwierigkeit wird durch die folgende Schülerlösung veranschaulicht.



Zu 3.3:

- Statt der Gleichung 4x = 12000 wird die Gleichung x^4 = 12000 aufgestellt und gelöst [Fehllösung: 10,466351…] (Defizit bzgl. K2, K5).
- Es ist nicht klar, dass die Variable x stets für dieselbe Zahl stehen muss (Defizit bzgl. K5). So werden unter passender Berücksichtigung des Bildungsprinzips verschiedene Zahlen eingesetzt, wie die folgende Schülerlösung zeigt.



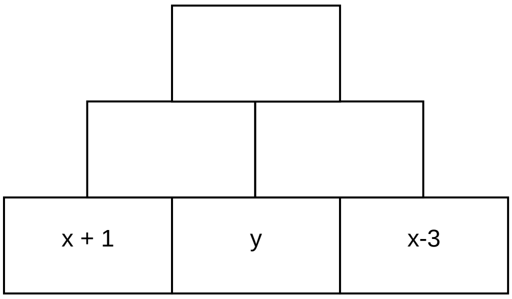
Weiterarbeit und Förderung

Treten bei der Bearbeitung dieser Aufgabe Schwierigkeiten auf, können zunächst Zahlenmauern, bei denen lediglich vorwärts gearbeitet werden muss, behandelt werden. Bei Zahlenmauern, die auch ein rückwärtsgerichtetes Arbeiten erforderlich machen, können den Schülern richtige und falsche Rechenterme an die Hand gegeben werden. Hierdurch können sie selbständig erkennen, dass bei manchen Steinen nur die Umkehraufgabe zum richtigen Ergebnis führt. Weitere Informationen zum Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten können dem allgemeinen Kapitel zur Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ entnommen werden.

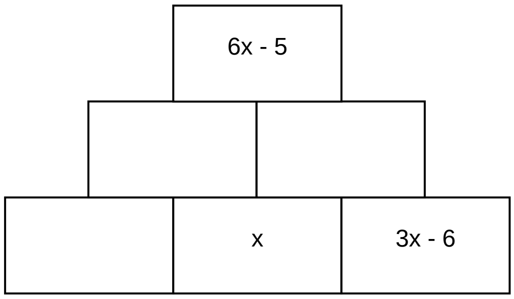
Weiterführend können Zahlenmauern zu anderen Grundrechenarten in den Unterricht eingebunden werden. Dabei ist es denkbar, dass die Schülerinnen und Schüler eigene Zahlenmauern entwickeln und diese dann von einer Mitschülerin oder einem Mitschüler bearbeitet werden. Je nach Altersstufe und Leistungsstand kann dabei auch umfassender mit Variablen bzw. Termen gearbeitet werden. Eine mögliche weiterführende Aufgabe hierzu ist beispielsweise die folgende:

Zahlenmauern sind aus Steinen gebaut. Dabei steht in jedem Stein die **Summe** der darunterliegenden Steine. Fülle jeweils die drei freien Steine mit dem richtigen Term aus.

a)



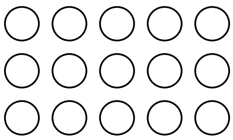
b)



Man vergleiche hierzu auch die didaktischen Kommentare zu den Aufgaben „Zahlen gesucht“, „Zahl gesucht“ und „Berechne x“.

Aufgabe 4: Kreise färben

Färbe 20 % dieser Kreise ein.



Auswertung

RICHTIG	Insgesamt sind 3 ganze Kreise eingefärbt. (Dabei können auch Bruchteile gefärbt werden.)

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1B

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da die Schülerinnen und Schüler Prozentrechnung anwenden.

Die geforderte Anzahl Kreise kann auf verschiedene Weisen ermittelt werden. Je nach Lösungsweg dominiert als Kompetenz eher das symbolisch-technische Arbeiten (K5) oder die Verwendung mathematischer Darstellungen (K4). Beispielsweise kann der gegebene Prozentsatz durch Anwenden der Hundertstel-Vorstellung vom Prozentbegriff als 20/100 gedeutet und in 1/5 umgerechnet werden, um danach eine Anteilsvorstellung zu aktivieren und die gesuchte Anzahl der Kreise zu bestimmen.

Die kognitiven Anforderungen liegen im Anforderungsbereich I, da Routineverfahren auf eine vertraute Darstellung angewendet werden.

Mögliche Schwierigkeiten

- Die Übersetzung des Prozentsatzes 20 % in einen Bruch, z. B. in 20/100, gelingt nicht (Defizit bzgl. K5).
- 20 % wird als $\frac{1}{2}$ gedeutet und die Hälfte der Kreise wird eingefärbt (Defizit bzgl. K5).

Weiterarbeit und Förderung

Diese einfache Darstellung lässt vielfältige Lösungswege zu und erlaubt die Kombination zeichnerischer und konkret handelnder Ansätze.

Vereinfachend könnte zunächst eine Darstellung mit 100 Kreisen gewählt werden (alternativ: ein Hunderterfeld), von denen 20 % zu färben sind. Durch Anwendung der Hundertstel-Vorstellung kann 20 % in 20/100 übersetzt werden, was bedeutet, dass 20 der 100 Kreise zu färben sind.

Gelingt die Übersetzung in einen Hundertstelbruch ohne Schwierigkeiten, kann im nächsten Schritt die Anzahl der gegebenen Kreise variiert und z. B. auf 50 reduziert werden. Nun kann man auch funktional überlegen: „Wie verändert sich (bei gleichbleibendem Prozentsatz) die Anzahl der zu färbenden Kreise, wenn die Grundmenge halbiert wird?“.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, 1/5 als andere Darstellung von 20 % auf die Figur anzuwenden. So kann die gegebene Figur in fünf gleichgroße Teilmengen mit je drei Kreisen unterteilt werden, von denen eine farbig markiert wird. Zumindest gedanklich ließe sich diese Aufgabe auch lösen, indem von jedem Kreis 1/5 gefärbt wird. Oder es kann einfach jeder fünfte Kreis gefärbt werden, wobei zu problematisieren wäre, bei welchen Grundmengen eine solche Strategie tragfähig ist (Mögliche Frage: „Funktioniert diese Strategie auch bei 30 Kreisen, bei 40 Kreisen, bei … Kreisen?“, oder allgemeiner: „Welche Eigenschaft muss die Anzahl der Kreise erfüllen, damit – bei gegebenem Prozentsatz – die gesuchte Anzahl Kreise durch Abzählen ermittelt werden kann?“).

Diese Aufgabe bietet auch die Möglichkeit, Umkehraufgaben zur gegebenen Frage zu behandeln und schließlich alle drei Grundaufgaben der Prozentrechnung mithilfe einer solchen Darstellung zu thematisieren (Grundwert, Prozentsatz oder Prozentwert ist gesucht). Insbesondere kann bei fehlerhaften Lösungen der obigen Aufgabe gefragt werden, welcher Prozentsatz – anstelle des geforderten – dargestellt ist.

Schließlich kann diese Aufgabe auch Anlass geben, grundlegende Fertigkeiten, wie das Umwandeln eines Prozentsatzes in einen Hundertstelbruch, einen gekürzten Bruch und einen Dezimalbruch zu üben.

Aufgabe 5: Harzwanderung

Peter und Markus planen eine Wanderung durch den Harz.

Foto: © IQB

Teilaufgabe 5.1

Die Wanderung soll in Stolberg beginnen und auf einem der eingezeichneten Wanderwege nach Halberstadt führen (s. Skizze).

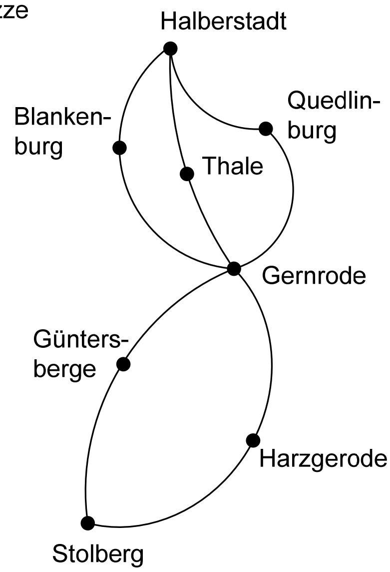
Gib anhand der Skizze **eine** mögliche Wanderroute von Stolberg nach Halberstadt an.

Ergänze die beiden Lücken.

Stolberg → ____________________ → Gernrode

→ ________________________ → Halberstadt

Skizze



Auswertung

RICHTIG	Stolberg → **Harzgerode** → Gernrode → **Thale** → Halberstadt ODER Stolberg → **Harzgerode** → Gernrode → **Quedlinburg** → Halberstadt ODER Stolberg → **Harzgerode** → Gernrode → **Blankenburg** → Halberstadt ODER Stolberg → **Güntersberge** → Gernrode → **Thale** → Halberstadt ODER Stolberg → **Güntersberge** → Gernrode → **Quedlinburg** → Halberstadt ODER Stolberg → **Güntersberge** → Gernrode → **Blankenburg** → Halberstadt

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Teilaufgabe 5.2

Aus wie vielen verschiedenen Wanderrouten (siehe Skizze aus Teilaufgabe 1) können Peter und Markus insgesamt wählen, um von Stolberg über Gernrode nach Halberstadt zu kommen?

Gib das Ergebnis an.

_______ verschiedene Wanderrouten

Auswertung

RICHTIG	**6** verschiedene Wanderrouten

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2

Hinweise zur Bearbeitung

In dieser Aufgabe werden kombinatorische Überlegungen durchgeführt, weshalb sie der Leitidee Zahl (L1) zugeordnet wird.

In Teilaufgabe 5.1 gehen die Schülerinnen und Schüler mit einer mathematischen Darstellung um (K4). Sie führen die hierin und die im Text gegebenen Informationen zusammen, um den Lückentext zu ergänzen.

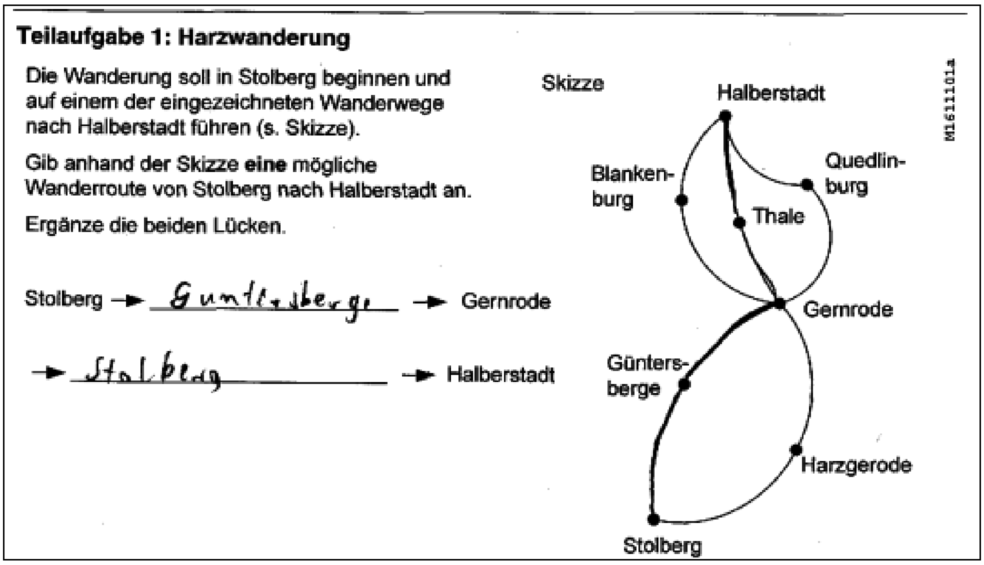
Die Bearbeitung von Teilaufgabe 5.2 erfordert neben dem Umgang mit der vorgegebenen Darstellung (K4) vor allem die Entwicklung einer Strategie zur Ermittlung aller möglichen Wanderrouten (K2). Um deren Anzahl zu bestimmen, kann man die Routen konkret einzeichnen, mithilfe eines Baumdiagramms bestimmen oder systematisch aufschreiben.

In Teilaufgabe 5.1 werden die nötigen Informationen direkt dem Diagramm entnommen, sodass diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich I zugeordnet wird. Die Bearbeitung von Teilaufgabe 5.2 erfordert dagegen die Entwicklung und Ausführung einer mehrschrittigen Strategie und ist daher dem Anforderungsbereich II zuzuordnen.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 5.1:

- Zwar wird eine richtige Route markiert, aber die Übertragung der Ortsnamen in den Lückentext gelingt nicht, wie die folgende Schülerlösung zeigt (Defizit bzgl. K4).



Zu 5.2:

- Schüler und Schülerinnen variieren nur die Anzahl aller Wege vor bzw. nach der Abzweigung [Fehllösungen 2 bzw. 3] (Defizit bzgl. K2).
- Es wird bloß die Anzahl aller Teilstrecken in der Grafik angegeben [Fehllösung 10] (Defizit bzgl. K2).

Weiterarbeit und Förderung

Dieser Aufgabe liegt eine für den Mathematikunterricht eher untypische, aber dennoch zugängliche Darstellung zugrunde.

Bereitet der Umgang mit dieser Darstellung Probleme, kann zunächst die Bedeutung der Verbindungslinien und der Punkte im Kontext thematisiert werden. Anschließend kann man die Schülerinnen und Schülern auffordern, sich mit Teilen dieser Darstellung auseinanderzusetzen. Dazu bietet es sich an, sich ganz konkret in die beschriebene Situation hineinzuversetzen. Dies kann etwa mit folgender Aufforderung geschehen:

„Stell Dir vor du bist in Stolberg. Du willst nach Gernrode laufen. Durch welchen Ort führt der Weg dorthin?“

Oder man fragt:

„Nach einiger Zeit bist Du in Thale angekommen. In welchem Ort warst Du vorher?“

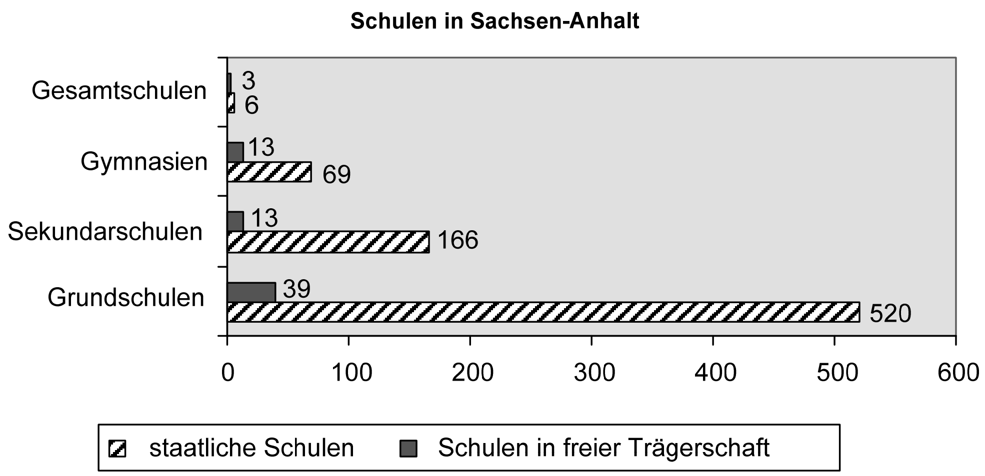
In beide Fragestellungen geht ein, dass Entscheidungen über zu wählende Routen zu treffen sind. Die erste Fragestellung kann dahingehend erweitert werden, dass man nach der Anzahl der Möglichkeiten fragt, nach Gernrode zu gelangen.

Eine vertiefende Auseinandersetzung mit dieser Art Darstellung kann auch von der Bedeutung der verschiedenen Punkte ausgehen. So bietet der Ausgangsort Stolberg zwei Möglichkeiten, den weiteren Weg zu wählen, während andere Orte keine zweite Möglichkeit bieten. Ist dieser Unterschied deutlich, kann man die Schülerinnen und Schüler fragen, was in Gernrode bezüglich der Wanderroute(n) passieren kann.

Alternativ zu dieser bereits deutlich mathematisierten Darstellung kann man auch mit realen Landkarten arbeiten und darin Routen zusammenstellen lassen. Zudem können, als thematische Erweiterung solcher Darstellungen, Streckenpläne von Bussen oder U- bzw. S-Bahnen hinzugenommen werden, die nach einem ähnlichen Prinzip aufgebaut sind. Vor allem das systematische Erfassen mehrerer bzw. aller Möglichkeiten lässt sich an solchen Beispielen üben, um so einen Beitrag zum Aufbau der Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ zu leisten (vgl. hierzu auch das allgemeine Kapitel zur Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“).

Aufgabe 6: Schulstatistik

Im Diagramm ist dargestellt, wie viele Schulen es im Schuljahr 2008/2009 in Sachsen-Anhalt gab. Es werden vier Schulformen unterschieden.



Kreuze an, welche Schulform am häufigsten vertreten ist.

☐ Grundschule ☐ Sekundarschule ☐ Gymnasium ☐ Gesamtschule

Auswertung

RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da es um die Auseinandersetzung mit den Ergebnissen einer statistischen Erhebung geht.

Zur Bearbeitung der Aufgabe ist es nötig, das Balkendiagramm zu lesen und mit Bezug zur Fragestellung die Anzahlen der Schulen miteinander zu vergleichen (K4), was auf einen Blick möglich ist.

Da es sich bei dem Balkendiagramm um eine den Schülerinnen und Schülern vertraute Darstellungsform handelt, gehört diese Aufgabe dem Anforderungsbereich I an.

Weiterarbeit und Förderung

Sollten bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten auftreten, bietet es sich an, die Ergebnisse der statistischen Erhebung in Form zweier Balkendiagramme (Schulen in freier Trägerschaft, staatliche Schulen) darstellen und diese separat auswerten zu lassen. Werden diese beiden Balkendiagramme geeignet auf zwei Folien gezeichnet, kann man die beiden Folien auf dem Overheadprojektor übereinander legen, um so die verschiedenen Darstellungsformen miteinander zu verbinden und während der Besprechung der Ergebnisse auf diese Bezug nehmen zu können. Des Weiteren können die Daten auch mittels einer Tabellenkalkulation erfasst und dargestellt werden, um so den Umgang damit zu üben und die Eignung weiterer Diagrammtypen zu hinterfragen. Die Aufgabe kann auch mit anspruchsvolleren Fragestellungen erweitert werden, etwa mit der folgenden:

Bei welcher Schulform ist der Anteil von Schulen in freier Trägerschaft (bezogen auf alle Schulen dieser Schulform) am größten?

Kreuze an.

☐	☐	☐	☐
Grundschule	Sekundarschule	Gymnasium	Gesamtschule

In Erweiterung dieser Aufgabe können die Schülerinnen und Schüler in Kleingruppen eigene Umfragen durchführen und diese mittels eines geeigneten Diagramms darstellen. Dabei bietet es sich an, mit den Schülern eine Checkliste zum Anfertigen oder zum Lesen von Diagrammen anzufertigen. Eine derartige Liste kann beispielsweise folgende Leitfragen beinhalten:

Graphen lesen

- Worum geht es? Welche Größenbereiche sind einander zugeordnet?
- Wie sind die Säulen, Achsen etc. beschriftet?
- Welche Informationen verbergen sich z. B. hinter den einzelnen Säulen, den Punkten des Graphen? Welche Wertepaare lassen sich ablesen?
- Welche Veränderungen sind im Diagramm dargestellt?

Graphen zeichnen

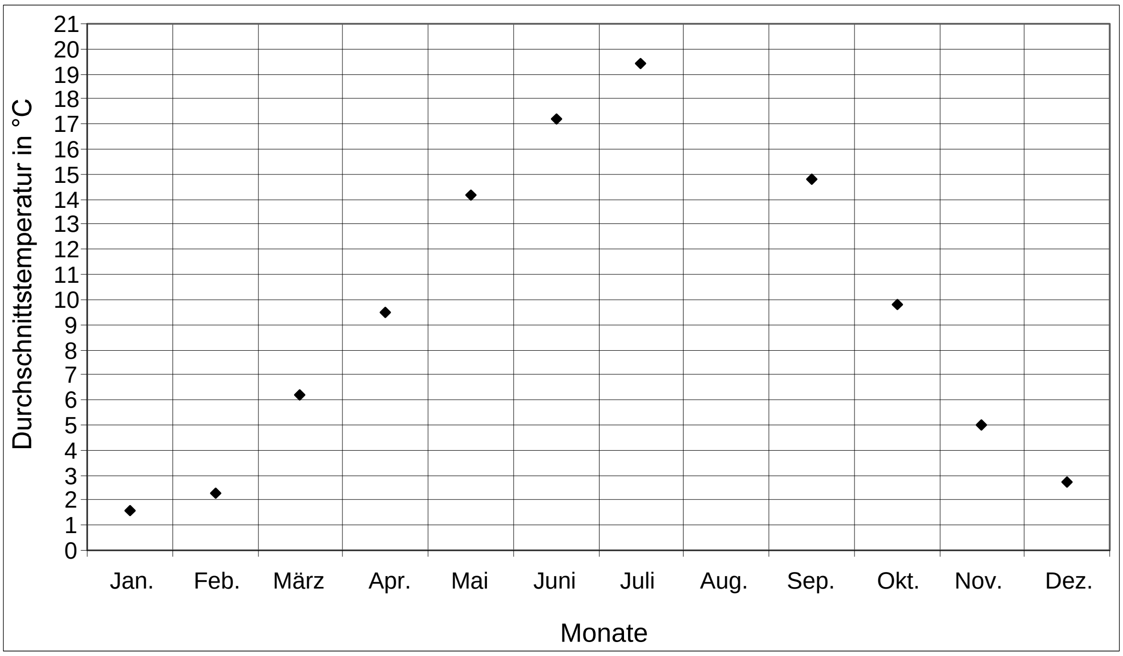
- Was soll dargestellt werden?
- Welche Bereiche sollen berücksichtigt werden?
- Wie sollen die Achsen eingeteilt werden (Maßstab: 1 cm auf der Achse entspricht…)?
- Woran muss ich denken, wenn ich ein Wertepaar eintrage?

Zur weiteren Übung kann auch die Aufgabe „Darstellungen in Diagrammen“ eingesetzt werden (vgl. hierzu auch den didaktischen Kommentar zu dieser Aufgabe aus VERA-8 2012).

Aufgabe 7: Temperaturen in Frankfurt am Main

Die Tabelle und das Diagramm zeigen für Frankfurt am Main die langjährigen Durchschnittstemperaturen der einzelnen Monate in °C.

Monate	Jan.	Feb.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sep.	Okt.	Nov.	Dez.
Durchschnittstemperatur in °C	1,6	2,3	6,2	9,5	14,2	17,2	19,4	19,0	14,8	9,8	____	2,7



Teilaufgabe 7.1

Trage die fehlende Durchschnittstemperatur für den Monat November in die Tabelle ein.

Auswertung

RICHTIG	5 (oder 5,0). Anm.: Wird das Gradzeichen zusätzlich angegeben, ist die Lösung dennoch als richtig zu kodieren.

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Teilaufgabe 7.2

Zeichne die fehlende Durchschnittstemperatur für den Monat August in das Diagramm ein.

Auswertung

RICHTIG	In das Diagramm wurde der fehlende Punkt bei 19,0 °C eingezeichnet. Zeichentoleranz: ± 1 mm

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Teilaufgabe 7.3

Prüfe, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Kreuze jeweils an.

In Frankfurt am Main …	richtig	falsch
… ist der Dezember der Monat mit der tiefsten Durchschnitts-temperatur.	☐	☐
… ist der Anstieg der Durchschnittstemperatur zwischen März und April größer als zwischen April und Mai.	☐	☐
… beträgt der Unterschied zwischen der tiefsten und der höchsten Durchschnittstemperatur 16,8 °C.	☐	☐

Auswertung

RICHTIG	2. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	2. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	2. Kästchen wurde angekreuzt

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2

Hinweise zur Bearbeitung

Alle drei Teilaufgaben werden der Leitidee Daten und Zufall (L5) zugeordnet, da graphische Darstellungen und Tabellen statistischer Erhebungen ausgewertet werden.

In den Teilaufgaben 7.1 und 7.2 gehen die Schülerinnen und Schüler mit vertrauten Darstellungen um und bestimmen jeweils fehlende Werte anhand des Diagramms bzw. der Tabelle (K4).

In Teilaufgabe 7.3 wird die Richtigkeit verschiedener Aussagen überprüft, wobei zunächst die mathematikhaltigen Begriffe „tiefsten“, „höchsten“, „Anstieg“ sowie „Unterschied“ zu identifizieren sind (K6). Diese müssen dann im Diagramm gedeutet werden, um die Aussagen auf ihre Richtigkeit zu prüfen (K4).

Die ersten beiden Teilaufgaben können dem Anforderungsbereich I zugeordnet werden, da zu ihrer Bearbeitung die direkte Anwendung von Verfahren genügt. Teilaufgabe 7.3 lässt sich wegen der Anforderungen in Bezug auf die Interpretation und Überprüfung der gegebenen Aussagen (insbesondere der dritten) bereits dem Anforderungsbereich II zuordnen.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 7.1:

- Die Durchschnittstemperatur im Monat November wird falsch abgelesen [Fehllösungen 4 °C bzw. 6 °C] (Defizit bzgl. K4).

Zu 7.2:

- Die Durchschnittstemperatur im Monat August wird an der falschen Stelle eingetragen (Defizit bzgl. K4).
- Die Durchschnittstemperatur im Monat August wird durch graphische Interpolation der Temperaturen im Juli und September ermittelt, und der in der Tabelle gegebene Wert wird außer Acht gelassen (Defizit bzgl. K4).

Zu 7.3:

- Die kombinierte Deutung der mathematikhaltigen Begriffe „Unterschied“, „tiefsten“ und „höchsten“ in der dritten Aussage bereitet Probleme (Defizit bzgl. K6).

Weiterarbeit und Förderung

Bereitet der Umgang mit den fachsprachlichen Begriffen Probleme, kann man die Schülerinnen und Schüler dazu auffordern, weitere Aussagen zu diesem Graphen zu formulieren. Weiterhin kann man sie auffordern, Fragen zu stellen, die man anhand der gegebenen Daten beantworten kann oder auch nicht beantworten kann und lässt dies auch begründen.

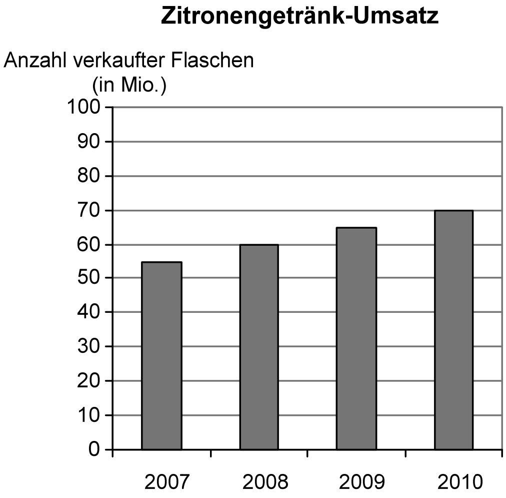
Die folgenden Aufforderungen bieten sich hier an:

- Formuliere weitere Aussagen, die zu diesem Diagramm passen.
- Formuliere eine Aufgabe, die man mithilfe dieses Diagramms (mithilfe der Tabelle) beantworten kann.
- Formuliere eine Aufgabe, die man mithilfe dieses Diagramms (mithilfe der Tabelle) **nicht** beantworten kann. Gib dabei an, welche Information fehlt.

Dieser Kontext bietet auch die Gelegenheit, die Bedeutung von „Durchschnittstemperaturen“ zu thematisieren, die in der vorliegenden Aufgabe faktisch keine Rolle spielen. Insbesondere Fehllösungen zu Teilaufgabe 7.2 können hierfür als Anlass genommen werden, da man allein aus der Darstellung der diskreten Punkte nicht schlussfolgern kann, wie sich die Temperatur zwischen zwei Monaten (gedacht als Zeitpunkte) verhält. Dies kann auch zum Anlass genommen werden zu überlegen, unter welchen Voraussetzungen man einen Graphen überhaupt „durchzeichnen“ darf.

Aufgabe 8: Darstellung in Diagrammen

Die Firma Fruktia stellt die Umsätze ihres neuen Zitronengetränks in einem Diagramm dar.



In welchem Jahr sind 65 Millionen Flaschen verkauft worden?

Vervollständige den Satz.

Im Jahr ____________ sind 65 Millionen Flaschen verkauft worden.

Auswertung

RICHTIG	Im Jahr **2009** sind 65 Millionen Flaschen verkauft worden.

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Hinweise zur Bearbeitung

Beschreibende Statistik bildet den Inhalt dieser Aufgabe, die daher zur Leitidee Daten und Zufall (L5) gehört.

Zunächst ist die gegebene Anzahl der Flaschen auf der zweiten Achse zu finden. Davon ausgehend kann dann die entsprechende Säule bzw. das zugehörige Jahr identifiziert werden (K4).

Diese Aufgabe gehört dem Anforderungsbereich I an, da einfaches Ablesen aus einer vertrauten Darstellung erforderlich ist.

Mögliche Schwierigkeiten

- Die angegebene Flaschenzahl wird verkehrt auf der zweiten Achse abgelesen und demzufolge wird ein falsches Jahr angegeben (Defizit bzgl. K4).

Weiterarbeit und Förderung

Diese Aufgabe bietet die Gelegenheit, neben dem Ablesen aus Diagrammen besonders deren zielgerichtetes Erstellen zu üben oder auch Manipulationen an ihnen zu thematisieren. Mit diesen Tätigkeiten lässt sich ein Beitrag zu einem verständigen Umgang mit Diagrammen bzw. zu deren Interpretation leisten.

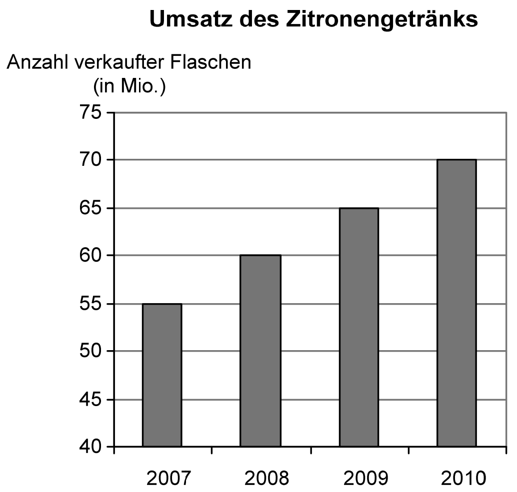
Bereitet das Ablesen aus Diagrammen noch Schwierigkeiten, so kann dies anhand verschiedener vorgegebener Diagramme zu inner- und außermathematischen Kontexten wiederholt werden. Entsprechende grundlegende Ableseübungen können von der ersten und von der zweiten Achse eines Diagramms ausgehen. Ergänzend lassen sich mathematikhaltige Fragen formulieren, um dann zu prüfen und zu begründen, ob sich diese mithilfe des Diagramms beantworten lassen.

Ein stärkerer Fokus auf das Erstellen von Diagrammen sensibilisiert nochmals für geeignete Achseneinteilungen. Geht man von einem festen Datensatz aus und verwendet ein Tabellenkalkulationsprogramm, so lassen sich auf einfache Weise mehrere Säulendiagramme mit unterschiedlichen Achseneinteilungen (z. B. in 10er, 50er, 10er, 1000-Schritten) erstellen. Steht kein solches Programm zur Verfügung, kann man mehrere Diagramme zum selben Datensatz vorbereiten und den Schülerinnen und Schülern als Kopie geben. Anschließend lassen sich die verschiedenen Diagramme bzgl. ihrer Ableseeigenschaften vergleichen.

Ein solcher Vergleich ergibt sich häufig sogar in natürlicher Weise, wenn die Daten zuvor selbst gesammelt und dann arbeitsteilig ausgewertet werden. Insbesondere das Beschreiben von Diagrammen trainiert auch die Kompetenz „Kommunizieren“, da hierfür sprachliche Mittel und fachsprachliche Begriffe benötigt werden.

Auch Manipulationen von Diagrammen lassen sich am Beispiel der folgenden weiterführenden Teilaufgabe behandeln, deren Bearbeitung die reflektierende Bewertung eines Diagramms erfordert:

Die Werbeabteilung der Firma hat das Diagramm zum Umsatz des Zitronengetränks verändert.



Beschreibe, welchen Eindruck die Werbeabteilung mit dem veränderten Diagramm erwecken möchte.

Erläutere, wodurch sie dies erreicht.

In dieser weiterführenden Teilaufgabe vergleichen die Schülerinnen und Schüler zwei verschiedene Diagramme zum selben Sachverhalt miteinander. Anschließend ist eine mathematikhaltige Erläuterung jener Gründe zu geben, die eine Wahl des zweiten Diagramms nahelegen. Dies kann für die manipulative Wirkung verkürzter Achsen sensibilisieren, denn bekanntlich lassen sich so – wie hier – zum Beispiel Zuwächse optisch größer darstellen.

Vielfach bietet auch die Lektüre von Zeitungen oder von Werbeunterlagen Gelegenheit, solche interessensgeleitet erstellte – oder gar manipulierte – Diagramme zu analysieren. Alternativ kann man Schülerinnen und Schüler dazu auffordern, selbst Diagramme in eine gewisse Richtung zu manipulieren, z. B. so, dass Anstiege besonders deutlich betont werden oder negative Entwicklungen weniger dramatisch erscheinen.

Man vergleiche hierzu auch die Didaktischen Kommentare zu den Aufgaben „Schulstatistik“ und „Temperaturen in Frankfurt am Main“, aber auch jene zu den Aufgaben „Schulkleidung“ und „Tarifvergleich“ aus VERA-8 2011.

Aufgabe 9: Bonbons

In einer Tüte sind zwei grüne, ein gelbes, zwei weiße, ein orangefarbenes und vier rote Bonbons. Jan greift ohne hinzusehen ein Bonbon aus der Tüte.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es rot?

Kreuze an.

☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{6}$

Auswertung

RICHTIG	3. Kästchen wurde angekreuzt

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1B

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da ein einfacher Zufallsversuch das Thema ist.

Zur Bearbeitung der Aufgabe ist es erforderlich, die Elementanzahl des Ergebnisraums zu bestimmen. Anschließend kann unter Rückgriff auf die Grundvorstellung zur Laplace-Wahrscheinlichkeit die gesuchte Wahrscheinlichkeit angegeben werden (K3).

Da die Anforderungen der Aufgabe rein reproduktiv sind und sich auf ein den Schülerinnen und Schülern bekanntes Inhaltsgebiet beziehen, gehört diese Aufgabe dem Anforderungsbereich I an.

Mögliche Schwierigkeiten

- 1. Antwortalternative (Fehllösung $\frac{1}{10}$): Dies ist die Wahrscheinlichkeit, wenn eins von zehn Bonbons gezogen wird. Demnach scheint nicht erfasst worden zu sein, dass es mehr als ein rotes Bonbon gibt (Defizit bzgl. K3).
- 2. Antwortalternative (Fehllösung $\frac{1}{5}$): Die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, ein grünes bzw. ein weißes Bonbon zu ziehen. Die Wahl dieser Antwortalternative könnte entweder auf unaufmerksames Lesen (Defizit bzgl. K6) oder auf falsches Rechnen hinweisen (Defizit bzgl. K5).
- 4. Antwortalternative (Fehllösung $\frac{1}{2}$): Die Wahl dieser Antwortalternativen, könnte auf ungenügend ausgebildeten Vorstellungen zur Laplace-Wahrscheinlichkeit beruhen. Zugrunde liegen könnte die Fehlvorstellung, dass es um die gleichberechtigte Alternative „rot oder nicht-rot“ geht (Defizit bzgl. K3).
- 5. Antwortalternative (Fehllösung $\frac{4}{6}$): Hinter dieser Antwortalternative verbirgt sich die Überlegung, dass es vier rote und sechs andersfarbige Bonbons in der Tüte gibt. Es wird demnach das Chancenverhältnis 4 zu 6 abgeleitet und mit der gesuchten Wahrscheinlichkeit verwechselt (Defizit bzgl. K3).

Weiterarbeit und Förderung

Treten bei der Aufgabe Schwierigkeiten auf, kann die Sachsituation im Unterricht leicht simuliert bzw. auf ein Urnenmodell übertragen werden. In diesem Zusammenhang ist es durchaus denkbar, zunächst absolute und anschließend relative Häufigkeiten bestimmen zu lassen, bevor Fragen zur Wahrscheinlichkeit thematisiert werden. Diesbezüglich können weitere Fragen, wie „Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das gezogene Bonbon grün?“ ergänzt werden. Weiterführend können die Fälle „mit zurücklegen“ und „ohne Zurücklegen“ unter-schieden und die Veränderungen bei den Wahrscheinlichkeiten analysiert werden. Denkbar ist auch, den Zufallsversuch zu einem zweistufigen Zufallsversuch zu erweitern, indem nacheinander zwei Bonbons gezogen werden.

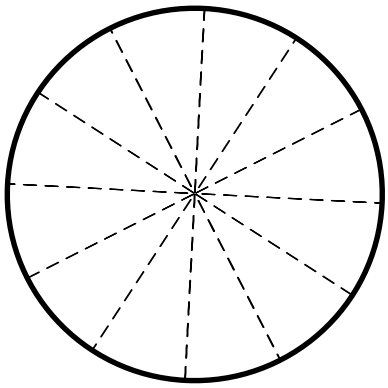
Im Sinne des operativen Durcharbeitens können die Schülerinnen und Schüler anschließend aufgefordert werden, die Anzahl der Bonbons in der Tüte so zu verändern, dass eine vorgegebene Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines gelben Bonbons erfüllt ist.

Aufgabe 10: Chancen

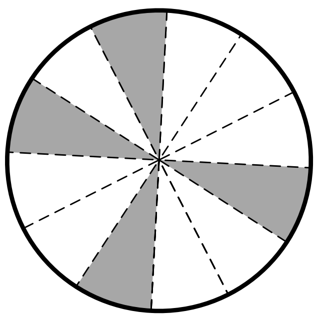
Für ein Schulfest baut eine Klasse Glücksräder. Die Besucher gewinnen beim Drehen der Glücksräder, wenn der Zeiger auf ein graues Feld zeigt.

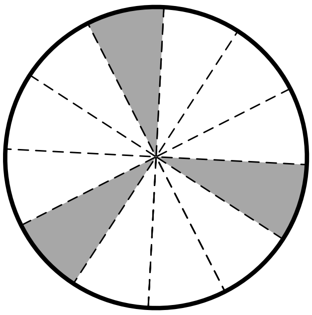
Teilaufgabe 10.1

Färbe das Glücksrad so, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ beträgt.



Auswertung

RICHTIG	Genau 4 Kreissektoren werden ausgemalt. Die Auswahl der Kreissektoren ist beliebig. z. B.  Anm.: Die Kreissektoren müssen nicht vollständig gefärbt sein. Sie können auch mittels Kreuzen markiert werden.

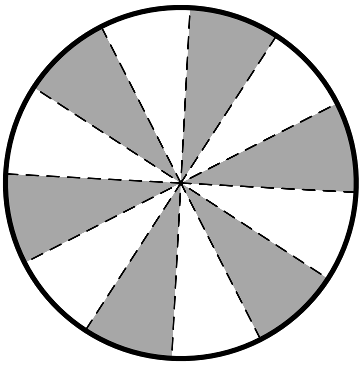
FALSCH	Alle Antworten bei denen nicht genau 4 Kreissektoren ausgemalt/gekennzeichnet werden. z. B. 

Teilaufgabenmerkmale

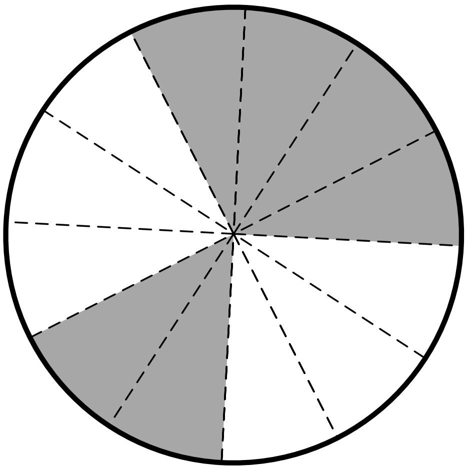
Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1B

Teilaufgabe 10.2

Michael und Julia haben bereits ihre Glücksräder gebastelt.



Michaels Glücksrad



Julias Glücksrad

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

Kreuze an.

☐ Bei Michaels Glücksrad ist die Gewinnwahrscheinlichkeit am größten.

☐ Bei Julias Glücksrad ist die Gewinnwahrscheinlichkeit am größten.

☐ Bei Michaels Glücksrad und bei Julias Glücksrad ist die Gewinnwahrscheinlichkeit gleich.

Begründe deine Antwort.

Auswertung

RICHTIG	Richtige Antwort Kreuz bei "Bei Michaels Glücksrad und bei Julias Glücksrad ist die Gewinnwahrscheinlichkeit gleich." **UND** richtige Begründung, in welcher entweder auf die Wahrscheinlichkeiten verwiesen, auf die gefärbten Flächenanteile oder die Zahl der gefärbten Felder eingegangen wird. z. B. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt bei beiden Glücksrädern $\frac{1}{2}$. ODER Sowohl bei Michael als auch bei Julia sind 6 von 12 Feldern eingefärbt. Die Gewinnwahrscheinlichkeiten sind also gleich. ODER (Grenzfall) Beide Glücksräder sind gleich gefärbt. ODER (Grenzfall) $\frac{6}{12} = \frac{6}{12}$
FALSCH	Alle anderen fehlerhaften, unvollständigen oder falschen Antworten. z. B. Bei Michael ist die Gewinnwahrscheinlichkeit größer, weil immer abwechselnd die Felder eingefärbt sind. ODER Bei Julia ist die Gewinnwahrscheinlichkeit größer, weil sie das größere Glücksrad gebastelt hat. ODER Bei beiden ist die Gewinnwahrscheinlichkeit gleich groß, weil beide 12 Felder in ihr Glücksrad gezeichnet haben.

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch modellieren (K3) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da die Auseinandersetzung mit einem Zufallsgerät im Mittelpunkt steht.

In Teilaufgabe 10.1 muss die Sachsituation an das vorgegebene Modell angepasst werden, d. h. das Glücksrad ist so zu färben, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit ein Drittel beträgt (K3, K4).

Zur Bearbeitung von Teilaufgabe 10.2 werden die beiden abgebildeten Glücksräder hinsichtlich ihrer Gewinnwahrscheinlichkeit verglichen, indem (unter Rückgriff auf die Laplace-Vorstellung vom Wahrscheinlichkeitsbegriff) der Quotient aus der Anzahl der günstigen und der möglichen Felder gebildet wird (K3, K4). Auf dieser Grundlage ist die richtige der verschiedenen Aussagen zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten auszuwählen und die Wahl zu begründen. Alternativ kann auch nur die absolute Anzahl der gefärbten Felder der Glücksräder miteinander verglichen werden, da beide Glücksräder gleich viele Felder aufweisen. In einer angemessenen Begründung muss abschließend auf einen dieser Aspekte eingegangen werden (K1, K6).

Teilaufgabe 10.1 gehört dem Anforderungsbereich I an, da einfache Kenntnisse und Verfahren zu reproduzieren sind. Teilaufgabe 10.2 gehört hingegen bereits zum Anforderungsbereich II, da eine überschaubare mehrschrittige Argumentation zu entwickeln ist und dabei auch eigene Überlegungen bzw. Lösungswege verständlich darzulegen sind.

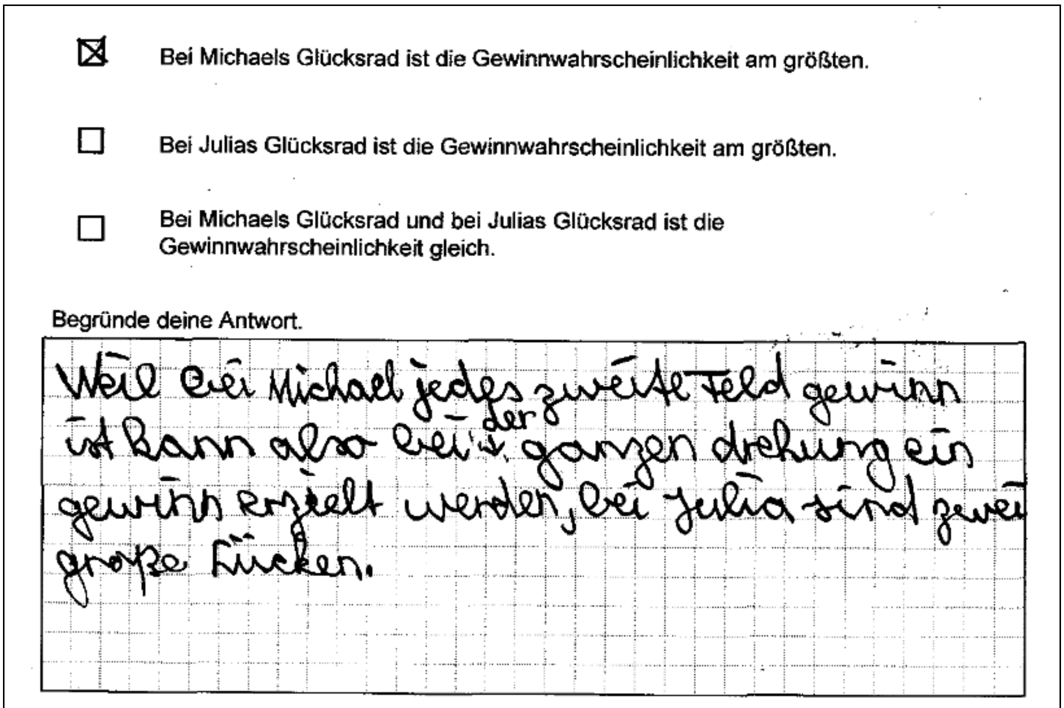
Mögliche Schwierigkeiten

Zu 10.1:

- Es wird mit dem Gegenereignis gearbeitet, so dass acht Felder statt vier Felder eingefärbt werden (Defizit bzgl. K3).
- Es werden wegen „$\frac{1}{3}$“ nur 3 Felder gefärbt (Defizit bzgl. K3).

Zu 10.2:

- In der Begründung wird auf die Lage der gefärbten Felder verwiesen, welche als wichtig für die Gewinnwahrscheinlichkeit ausgewiesen wird. Auf die Anzahl der gefärbten Felder bzw. die jeweilige Gewinnwahrscheinlichkeit wird nicht eingegangen, wie die abgebildete Schülerlösung zeigt (Defizit bzgl. K3).



- [x] Bei Michaels Glücksrad ist die Gewinnwahrscheinlichkeit am größten.
- [ ] Bei Julias Glücksrad ist die Gewinnwahrscheinlichkeit am größten.
- [ ] Bei Michaels Glücksrad und bei Julias Glücksrad ist die Gewinnwahrscheinlichkeit gleich.

Begründe deine Antwort.

Weil bei Michael jedes zweite Feld gewinn ist kann also bei der ganzen drehung ein gewinn erzielt werden, bei Julia sind zwei große Lücken.

- In der Begründung wird darauf verwiesen, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit bei Julias Glücksrad größer ist, da ihr Glücksrad größer als Michaels ist. Den Schülerinnen und Schülern scheint nicht bewusst zu sein, dass die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen in diesem Fall nur von der Anzahl der gefärbten Felder abhängig ist (Defizit bzgl. K3).
- Die Begründung ist oberflächlich, so dass sie sich nur schwer nachvollziehen lässt, wie die folgende Schülerlösung verdeutlicht (Defizit bzgl. K6). Wenn sich „Striche“ nur auf die Unterteilung in Sektoren beziehen, ist die Begründung lückenhaft; beziehen sich „Striche“ hingegen auf die gefärbten Felder, ist sie stichhaltig.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

Kreuze an.

☐ Bei Michaels Glücksrad ist die Gewinnwahrscheinlichkeit am größten.

☐ Bei Julias Glücksrad ist die Gewinnwahrscheinlichkeit am größten.

☒ Bei Michaels Glücksrad und bei Julias Glücksrad ist die Gewinnwahrscheinlichkeit gleich.

Begründe deine Antwort.

Weil da gleich soviele Striche
im Kreis sind.

Weiterarbeit und Förderung

Teilaufgabe 10.1 ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern, das – oft eher im Hintergrund stehende – Rückwärtsarbeiten zu üben. Dies intensiviert die Auseinandersetzung mit der Sachsituation und lässt Zusammenhänge deutlicher hervortreten. Häufig sind diese Aufgaben so angelegt, dass die Schülerinnen und Schüler durch ein erneutes Vorwärtsarbeiten ihre Lösung selbstständig überprüfen können.

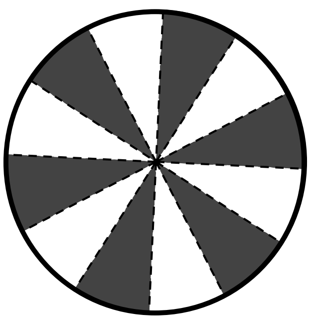
Weitere Anregungen zu Aufgaben dieser Art können dem Didaktischen Kurzkommentar zur Aufgabe „Glücksrad“ aus VERA-8 2011 sowie der Aufgabe „Glücksrad drehen“ aus VERA-8 2012 entnommen werden.

Treten bei der Teilaufgabe 10.2 Schwierigkeiten auf, kann die Sachsituation auf ein Urnenmodell übertragen werden. Dieses ermöglicht es, die Unabhängigkeit der Gewinnwahrscheinlichkeit von der Lage der Felder/ Kugeln, deren Größe bzw. dem Ziehen/ Drehen selbst zu verdeutlichen. Der Transfer kann von den Schülerinnen und Schülern gegebenenfalls auch selbst vorgenommen werden.
Weiterführend kann im Unterricht folgende Sachsituation als Ausgangspunkt für weitergehende Fragestellungen verwendet werden:

Michael und Julia haben über Michaels Glücksrad ein Schild mit einer Aufschrift angebracht:

Einsatz 1 €.

2 € zurück, wenn du auf Grau kommst!



Von diesem Impuls ausgehend kann man überlegen, was beim Spielen mit diesem Glücksrad auf lange Sicht passiert, ob man also auf lange Sicht Geld gewinnt oder verliert. Um diese Frage zu beantworten, sind die Höhen der Einnahmen und Ausgaben beim Spiel mit dem abgebildeten Glücksrad geeignet in Beziehung zu setzen. Es genügt hierbei, die relevanten Wahrscheinlichkeiten auf inhaltlicher Ebene zu vergleichen, um zu zeigen, dass sich Gewinn und Verlust ausgleichen. Der Begriff des Erwartungswerts ist hierfür nicht nötig. Auch bietet es sich an, diese Situation spielerisch mit den Schülerinnen und Schülern zu erkunden und zu simulieren. Dies hilft zu erkennen, dass es nicht ausreicht, die Gewinnwahrscheinlichkeiten miteinander zu vergleichen, sondern dass auch der Einsatz und der Gewinn beachtet werden müssen. Dreht man das Glücksrad gedanklich z. B. 100-mal, kann man die Höhe des Einsatzes mit dem zu erwartenden Gewinn vergleichen. Dabei ist die Gewinnwahrscheinlichkeit so zu deuten, dass man in jedem zweiten Spiel 2 € gewinnt. Dies gleicht sich dann mit dem Einsatz von 1 €, welcher bei jedem Spiel zu entrichten ist, aus.

Vertiefend bietet es sich an, die Schülerinnen und Schüler die Situation nach bestimmten Gesichtspunkten selbst verändern zu lassen. Beispielsweise können sie die Sachsituation so verändern, dass man im Mittel einen Gewinn von 1 € erzielt. Hierzu können die Höhe des Einsatzes und/ oder des Gewinns abgeändert werden.

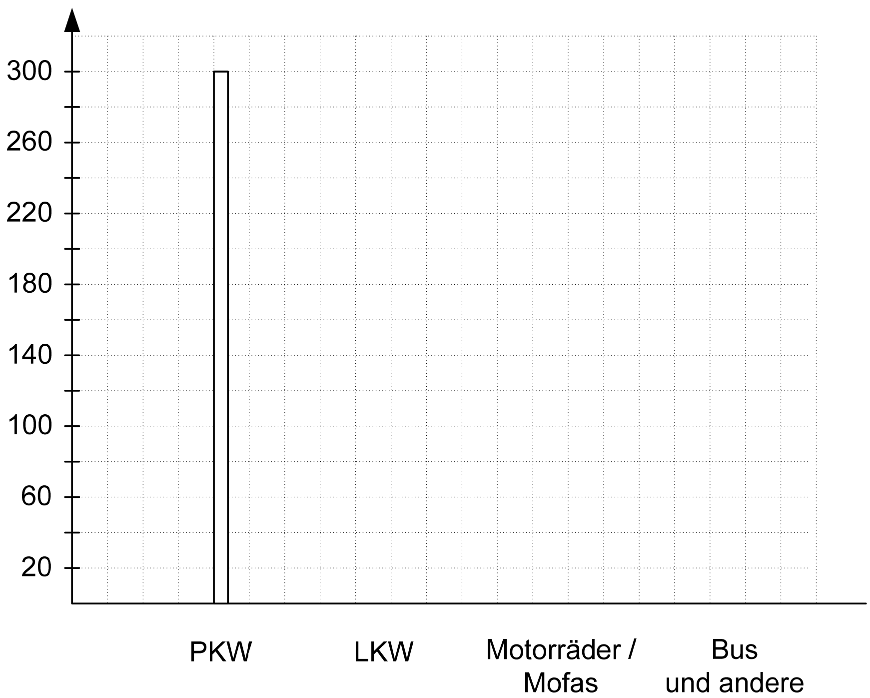
Derartige Aufgaben ermöglichen es, neben den bereits erforderlichen Kompetenzen vor allem auch die Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ zu aktivieren und das Denken in Zusammenhängen zu trainieren.

Aufgabe 11: Zählung von Fahrzeugen

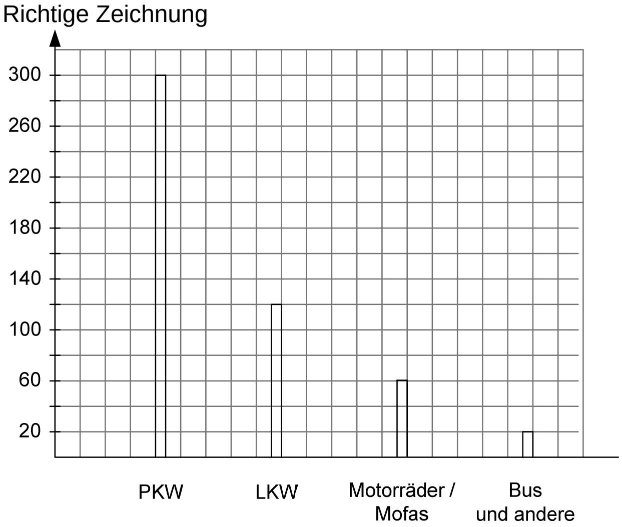
Eine Schülergruppe hat 500 Fahrzeuge beobachtet und gezählt. Ihre Ergebnisse haben die Schülerinnen und Schüler in folgender Tabelle dargestellt:

Fahrzeugart	PKW	LKW	Motorräder/Mofas	Bus und andere
Anzahl	300	120	60	20

Vervollständige das unten stehende Stabdiagramm, indem du an den passenden Stellen die Anzahlen der gezählten Fahrzeuge einzeichnest.



Auswertung

RICHTIG	Richtige Zeichnung  Anm.: • Zulässige Abweichung der Höhen der Säulen: ±1 mm. • Die Säulen dürfen unterschiedlich breit sein. • Die Säulen dürfen durch Striche dargestellt werden.
FALSCH	Alle anderen Antworten, z. B. wenn eine Säule zu ungenau gezeichnet wurde oder vollständig fehlt.

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Hinweise zur Bearbeitung

Die Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da eine statistische Erhebung auszuwerten ist.

Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe sind der Tabelle die Anzahlen für die verschiedenen Fahrzeugarten zu entnehmen und in das Diagramm zu übertragen (K4).

Diese Aufgabe kann trotz des Wechsels zwischen zwei Darstellungen noch dem Anforderungsbereich I zugeordnet werden, da das Einzeichnen von Säulen in ein Diagramm ein direkt ausführbares Verfahren ist.

Mögliche Schwierigkeiten

- Die 20er-Einteilung der zweiten Achse wird missachtet. Demzufolge wird beispielsweise die Säule für LKW 12 Kästchenlängen hoch eingezeichnet [bzw. Motorräder/Mofas: 6 Kästchenlängen, Bus und andere: 2 Kästchenlängen] (Defizit bzgl. K4).

Weiterarbeit und Förderung

Die den Schülerinnen und Schülern prinzipiell wohlvertraute Übertragung von tabellarisch gegebenen Daten in ein Diagramm kann Schwierigkeiten bereiten, wenn die Einteilung der zweiten Achse nicht beachtet wird. Um dieser Schwierigkeit entgegenzuwirken, bietet sich die regelmäßige Variation von Achseneinteilungen an. Des Weiteren können vor dem Eintragen der Säulen Ableseübungen durchgeführt werden.

Man vergleiche hierzu auch die didaktischen Kommentare zu den Aufgaben „Temperaturen in Frankfurt am Main“ und „Darstellung in Diagrammen“.

Aufgabe 12: Berechne x

Gegeben ist die Gleichung $8x = 72$.

Berechne x.

$x =$ ____________

Auswertung

RICHTIG	x = **9**

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Hinweise zur Bearbeitung

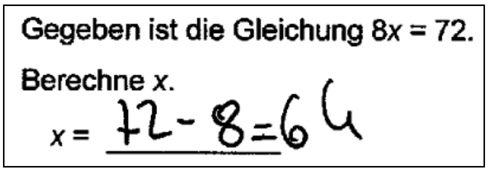
Die Aufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da eine Gleichung zu lösen ist.

Die Bearbeitung dieser Aufgabe erfordert lediglich die Kompetenz technisches Arbeiten (K5). Die Lösung kann nicht nur rein kalkülmäßig erfolgen, sondern auch durch inhaltliches Vorgehen, indem überlegt wird, von welcher Zahl das Achtfache 72 ergibt.

Die direkte Anwendung von Verfahren in einem wiederholenden Zusammenhang begründet eine Einordnung dieser Aufgabe in den Anforderungsbereich I.

Mögliche Schwierigkeiten

- Die multiplikative Struktur von 8x wird nicht erkannt, und es wird 8 subtrahiert, um x zu isolieren, wie die folgende Schülerlösung illustriert [Fehllösung x=64] (Defizit bzgl. K5).

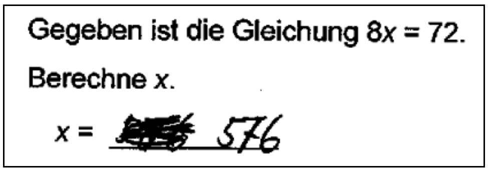


Gegeben ist die Gleichung $8x = 72$.

Berechne x.

$x =$ 72 - 8 = 64

- Die Struktur der Gleichung wird fehlgedeutet, indem angenommen wird, dass das Produkt aus 8 und 72 gesucht ist. Dies zeigt die nächste Schülerlösung [Fehllösung x=576] (Defizit bzgl. K5).



Gegeben ist die Gleichung $8x = 72$.

Berechne x.

$x =$ 576

Weiterarbeit und Förderung

Fehler beim Lösen solch syntaktisch einfacher Gleichungen haben häufig ihre Ursache im gedankenlosen Operieren mit deren Zahlen bzw. Variablen. Diese Gleichung ist besonders geeignet, das systematische Probieren als gleichberechtigte Herangehensweise beim Lösen von Gleichungen zu betonen. Dies betont die Bedeutung von x als Platzhalter, und es kann zunächst begründet überlegt werden, dass die gesuchte Zahl kleiner als 10 und größer als 5 sein muss. Alternativ kann diese Gleichung inhaltlich gelöst werden, indem überlegt wird, dass die gesuchte Zahl ja der achte Teil von 72 ist.

Bei klassischen Umformungsfehlern wie den zuvor beschriebenen können die Schülerinnen und Schüler zudem eine Gleichung aufstellen, zu der eine gezeigte falsche Lösung passt (Prinzip: Jede falsche Lösung einer Mathematikaufgabe ist richtige Lösung einer anderen, verwandten Aufgabe).

Man vergleiche hierzu auch die didaktischen Kommentare zu den Aufgaben „Zahlen gesucht“ und „Zahl gesucht“.

Aufgabe 13: Zahl gesucht

Wenn $9x = 6{,}3$; dann ist $x = ?$

Kreuze an.

☐	☐	☐	☐
7	0,07	0,7	70

Auswertung

RICHTIG	3. Kästchen wurde angekreuzt

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Hinweise zur Bearbeitung

Die Aufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da eine Gleichung zu lösen ist.

Die Bearbeitung dieser Aufgabe erfordert lediglich die Kompetenz technisches Arbeiten (K5). Die Lösung kann dabei nicht nur rein kalkülmäßig erfolgen, sondern auch auf inhaltlichem Weg, indem überlegt wird, von welcher Zahl das Neunfache 6,3 ergibt. Alternativ können die gegebenen Antwortalternativen eingesetzt werden, um dann zu prüfen – hier genügt ein Überschlag –, welche Lösung richtig ist.

Die direkte Anwendung von Verfahren in einem wiederholenden Zusammenhang begründet eine Einordnung dieser Aufgabe in den Anforderungsbereich I.

Mögliche Schwierigkeiten

- 1. Antwortalternative (Fehllösung: 7): Vermutlich wird zunächst vereinfachend im Kopf 63 durch 9 dividiert, und es wird anschließend vergessen, im Quotient das Komma zu setzen (Defizit bzgl. K5).
- 2. Antwortalternative (Fehllösung: 0,07): Nach der Division unterläuft ein Stellenwertfehler, und das Komma wird im Ergebnis fälschlich „nach links“ verschoben (Defizit bzgl. K5).
- 4. Antwortalternative (Fehllösung: 70): Nach der Division unterläuft ein Stellenwertfehler, und das Komma wird im Ergebnis fälschlich „nach rechts“ verschoben (Defizit bzgl. K5).

Weiterarbeit und Förderung

Diese einfache Aufgabe bietet eine gute Gelegenheit, bereits vor ihrer exakten Lösung Überlegungen zur Größenordnung des Ergebnisses anzustellen und zusätzlich, nach der Rechnung, Proben bzw. Umkehrrechnungen zu thematisieren.

So kann überlegt werden, dass eine unbekannte und mit 9 multiplizierte Zahl selbst kleiner als 1 sein muss, wenn das Produkt 6,3 beträgt. Diese Überlegung kann helfen, die Lösungen 7 und 70 als fehlerhaft zu identifizieren. Andererseits hilft eine (auch überschlägige) Rechnung, das Ergebnis 0,07 als fehlerhaft zu identifizieren.

Man vergleiche hierzu auch die didaktischen Kommentare zu den Aufgaben „Zahlen gesucht" und „Berechne x".

Aufgabe 14: Kraftfutter

Im Zoo bekommen die Nashörner Kraftfutter. Der Kraftfuttervorrat reicht für fünf Nashörner sechs Wochen.

Gib an, wie lange die gleiche Menge Kraftfutter für 10 Nashörner reicht.

Das Kraftfutter reicht ________ Tage.

Auswertung

RICHTIG	Das Kraftfutter reicht **21** Tage. Anm.: Auch die Antwort 3 Wochen wird akzeptiert.

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1B

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) an, da mit einer antiproportionalen Zuordnung verständnisorientiert umgegangen werden muss.

Zur Bearbeitung sind dem Aufgabentext zunächst die wichtigen Informationen zur Anzahl der Nashörner sowie dem Kraftfuttervorrat zu entnehmen (K6). Anschließend ist ein passendes (antiproportionales) Modell auszuwählen (K3). Die anschließenden nötigen Rechnungen („Dreisatz", etwa mittels Vervielfachung mit Faktor ½ oder über die Gesamtgröße 30 Nashornwochen, sowie Umrechnung in Tage) sind einfach (K5).

Aufgrund der rein reproduzierenden Anforderungen in einem bekannten Inhaltsbereich gehört diese Aufgabe dem Anforderungsbereich I an.

Mögliche Schwierigkeiten

- Es wird nicht erkannt, dass es sich um eine antiproportionale Zuordnung handelt. Stattdessen wird mit einer proportionalen Zuordnung gearbeitet [Fehllösung 12 Wochen] (Defizit bzgl. K3).
- Das Ergebnis wird nicht in der Einheit Tage, sondern in Wochen angegeben [Fehllösung: 3 Wochen] (Defizit bzgl. K6).
- Die Angaben des Textes werden falsch miteinander in Beziehung gesetzt. So wird beispielsweise $10 \cdot 6 = 60$ gerechnet und das Ergebnis als Reichweite des Kraftfuttervorrats interpretiert (Defizit bzgl. K3, K6). Dies zeigt die folgende Schülerlösung:

Kraftfutter

Im Zoo bekommen die Nashörner Kraftfutter. Der Kraftfuttervorrat reicht für fünf Nashörner sechs Wochen.

Gib an, wie lange die gleiche Menge Kraftfutter für 10 Nashörner reicht.

Das Kraftfutter reicht 60 Tage.

1

6

Weiterarbeit und Förderung

Treten bei der Bearbeitung der Aufgabe Schwierigkeiten auf, können die verschiedenen Zuordnungstypen noch einmal aufgegriffen und deutlich voneinander abgegrenzt werden. Hierzu bietet es sich an, die Schülerinnen und Schüler in Kleingruppen eine Aufgabe zu proportionalen, eine zu antiproportionalen oder eine zu sonstigen Zuordnungen bearbeiten zu lassen. Die Ergebnisse der Kleingruppenarbeit können im Plenum präsentiert und diskutiert werden, wodurch die Kompetenz Kommunizieren an Bedeutung gewinnt. In diesem Zusammenhang bietet es sich an, die Schülerinnen und Schüler anhand ihrer Aufgabe bzw. deren Lösung die Eigenschaften der jeweiligen Zuordnung herausarbeiten und veranschaulichen zu lassen. Dabei können auch der Graph gezeichnet, die Rechenvorschrift der jeweiligen Aufgabe angegeben oder weitere passende Beispiele beschrieben werden. Die Merkmale des jeweiligen Zuordnungstyps können beispielsweise mittels eines Lückentextes für die Schülerhefte festgehalten werden. Ein solcher Lückentext zu proportionalen Zuordnungen könnte folgendermaßen aussehen:

Proportionale Zuordnungen

Eine Zuordnung, für die die folgenden Eigenschaften gelten, ist eine **proportionale Zuordnung**.

1. Verdoppelt (verdreifacht,...) sich die Ausgangsgröße, so ________________ (verdreifacht,...) sich auch die zugeordnete Größe.

2. _________________ (drittelt,...) sich die Ausgangsgröße, so halbiert (drittelt,...) sich auch die zugeordnete Größe.

3. Werden zwei Ausgangsgrößen ___________________, müssen auch die diesen zugeordneten Größen addiert werden.

4. Werden zwei Ausgangsgrößen _____________________, müssen auch die diesen zugeordneten Größen subtrahiert werden.

5. Der Graph einer proportionalen Zuordnung ist eine ___________________________. Sie beginnt im _______________________.

6. Dividiert man die Ausgangsgröße durch die _____________________________, ergibt sich immer derselbe Wert. Dieser Wert ist der _________________________. Mit Hilfe dieses Wertes kann zu jeder Ausgangsgröße (z.B. Stückzahl) die zugehörige Größe ________________ werden.

Halbgerade; verdoppelt; Halbiert; Koordinatenursprung; berechnet; Proportionalitätsfaktor; zugeordnete Größe; addiert; subtrahiert

Nachdem die Eigenschaften der verschiedenen Zuordnungstypen herausgearbeitet worden sind, bietet es sich an, Entscheidungsaufgaben zu behandeln, d. h. die Schülerinnen und

Schüler müssen bei gegebener Zuordnung entscheiden, um welchen Zuordnungstyp es sich handelt und dies begründen. Dies ermöglicht es, zu überprüfen, inwiefern die Eigenschaften wirklich verstanden wurden, und die Kompetenz mathematisch Argumentieren in den Unterricht einzubinden. Um auf die verschiedenen Eigenschaften zu sprechen zu kommen, können die Zuordnungen in verbaler Form, mittels einer Tabelle oder auch eines Graphen vorgegeben werden.

Aufgabe 15: Maßstabsrechner

Ein Maßstab gibt das Größenverhältnis von Bild zu Original an. Solche Maßstäbe findet man z. B. auf Landkarten und in Modellzeichnungen.

Eine Landkarte ist im Maßstab 1 : 300 000 gezeichnet. Zwei Orte sind auf der Karte etwa 15 cm voneinander entfernt.

Kreuze an, wie weit diese Orte in der Wirklichkeit voneinander entfernt sind.

☐	☐	☐	☐
3 km	15 km	20 km	45 km

Auswertung

RICHTIG	4. Kästchen wurde angekreuzt

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) an, da mit einem Maßstab verständnisorientiert zu arbeiten ist.

Zur Lösung der Aufgabe ist zunächst der Begriff des Maßstabs gedanklich mit Bedeutung zu füllen und die Aufgabenstellung zu verstehen (K6). Es muss klar sein, dass ein Maßstab das Größenverhältnis von Bild zu Original angibt, d. h. bei dem angegebenen Maßstab entspricht 1 cm auf dem Bild 300 000 cm im Original. Mit Hilfe dieses Zusammenhangs kann die wahre Länge der Strecke auf der Karte leicht berechnet werden (K5). Zur Auswahl der richtigen Antwortalternative muss das Ergebnis noch in Kilometer umgewandelt werden.

Da sich die Anforderungen der Aufgabe auf den reproduktiven Bereich beschränken, fällt die Aufgabe in den Anforderungsbereich I.

Mögliche Schwierigkeiten

- 1. Antwortalternative (Fehllösung 3 km): Hinter dieser Antwortalternative verbirgt sich wahrscheinlich die Deutung des Maßstabs in Zentimetern sowie Umwandlung der 300 000 cm in Kilometer. Die auf der Landkarte gemessene Strecke von 15 cm wurde nicht als bedeutsam aufgefasst (Defizit bzgl. K6).
- 2. Antwortalternative (Fehllösung 15 km): Bei der Wahl dieser Antwortalternative sind vermutlich die 15 cm vordergründig in 15 km transformiert worden (Defizit bzgl. K6).
- 3. Antwortalternative (Fehllösung 20 km): Die Wahl dieser Antwortalternative deutet darauf hin, dass vordergründig 300 durch 15 dividiert worden ist (Defizit bzgl. K3).

Weiterarbeit und Förderung

Treten bei der Bearbeitung der Aufgabe Schwierigkeiten auf, könnte dies darauf zurückzuführen sein, dass die Vorstellungen zum Maßstabsbegriff noch zu vage sind. Demnach sollten weitere Aufgaben ähnlicher Art im Unterricht behandelt werden. Werden dabei handelnde und zeichnerische Aktivitäten eingebunden, können die Schülerinnen und Schüler ihre Grundvorstellungen zum Maßstabsbegriff auf vielfältige Weise verbessern. Hierzu können sie beispielsweise aufgefordert werden, einen maßstabsgerechten Lageplan ihres Zimmers anzufertigen und die hierzu notwendigen Maße zu messen. Auch Lagepläne der Schule – beispielsweise im Rahmen eines Schulfests etc. – können angefertigt und dann auch genutzt werden. Alternativ können sie die Länge ihres Schulweges zunächst auf einer Karte ermitteln und anschließend mittels des angegebenen Maßstabes dessen reale Länge berechnen.

Weiterführend können Aufgaben behandelt werden, bei denen der Maßstab angegeben werden muss. Besonders gut eignen sich hierfür Tierfotos oder Modelle, deren wirkliche Größe ermittelt werden muss. Auch Karten können eingesetzt werden. Eine mögliche Aufgabe hierzu ist beispielsweise die folgende:

Ein Wanderweg ist etwa 4 km lang. Auf einer Wanderkarte ist dieser Weg 8 cm lang gezeichnet.

Kreuze an, in welchem Maßstab diese Karte gezeichnet ist.

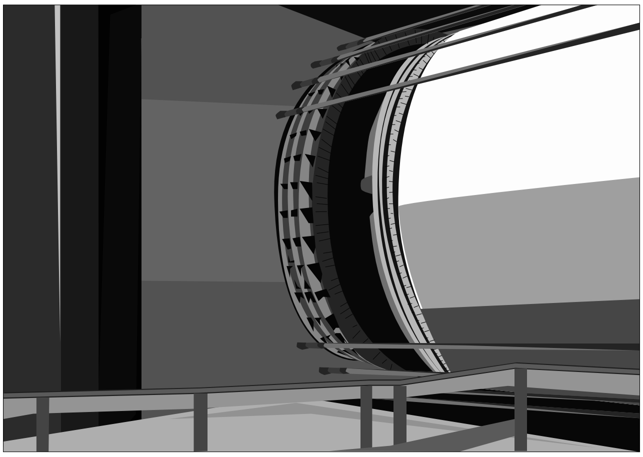
☐	☐	☐	☐
1 : 50 000	1 : 500	1 : 50	1 : 2

Aufgabe 16: Tunnelbohrmaschine

Die Tunnelbohrmaschine VERA (**V**on der **E**lbe **R**ichtung **A**lster) begann am 15. Mai 2008 mit dem Ausbohren des Fahrtunnels für die neue Hamburger U-Bahnlinie U4.

Diese Tunnelbohrmaschine schafft durchschnittlich 10 m Tunnellänge in 24 Stunden.

Für den Bau dieses Tunnels sind bei pausenlosem Betrieb vierzig Wochen (also 280 Tage) angesetzt.



Grafik: © IQB

Teilaufgabe 16.1

Gib an, wie lang der Tunnel der U-Bahnlinie U4 etwa wird.

Der Tunnel wird etwa __________ km lang.

Auswertung

RICHTIG	Der Tunnel wird etwa **2,8** km (gerundet **3** km) lang. Anm.: Akzeptiert wird auch die Angabe 2800 m (gerundet 3000 m), sofern die Einheit m angegeben ist.
FALSCH	Alle anderen Antworten. z. B. 2800

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	3

Teilaufgabe 16.2

Wie viele Meter Tunnel müsste VERA durchschnittlich am Tag schaffen, wenn der U-Bahntunnel schon nach 200 Tagen fertig sein soll?

Gib dein Ergebnis an.

VERA müsste am Tag _________ m Tunnel schaffen.

Auswertung

RICHTIG	VERA müsste am Tag **14** m Tunnel schaffen. Anm.: Akzeptiert werden auch die Angaben in anderer Einheit, sofern diese dann angegeben ist. ODER (Grenzfall) Der Schüler hat in Teilaufgabe 1 ein falsches Ergebnis und berechnet: (falsches Ergebnis aus Teilaufgabe 1) : 200 richtig.

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	3

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da es um Beziehungen zwischen Größen geht.

Zunächst müssen die Schülerinnen und Schüler den Text lesen (K6) und dabei erkennen, dass die Tunnellänge von der Arbeitszeit der Bohrmaschine abhängig ist. Anschließend ist ein passendes proportionales Modell zu wählen (K3) und hieraus die Länge des Tunnels zu berechnen, wobei die Rechnung einfach ist (K5).

Bei Teilaufgabe 16.2 liegt ein antiproportionales Modell nahe (K3). Ansonsten sind die Anforderungen ähnlich.

Da es sich bei beiden Teilaufgaben um die Anwendung von Standardmodellen handelt und die zur Bestimmung der gesuchten Größen durchzuführenden Rechnungen vergleichsweise einfach sind, können beide Teilaufgaben noch dem Anforderungsbereich I zugeordnet werden.

Mögliche Schwierigkeiten

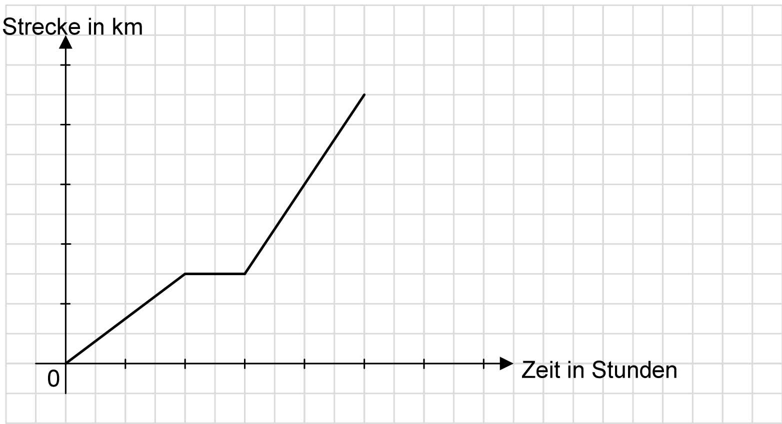
Zu 16.1, 16.2:

- Es kommt zur Schwierigkeiten im Umgang mit den Einheiten. Statt 2,8 km wird z. B. 28 km angegeben, wodurch oft auch die zweite Teilaufgabe falsch gelöst wird [Fehllösung: 140 m] (Defizit bzgl. K5).
- Die unterschiedlichen Einheiten werden nicht beachtet. Es wird nicht daran gedacht, dass 24 Stunden einem Tag entsprechen, so dass die Arbeitsdauer bei der Rechnung doppelt berücksichtigt wird und zur Lösung $24 \cdot 280 \cdot 10 = 67\,200$ m = 67,2 km führt (Defizit bzgl. K6).

Weiterarbeit und Förderung

Die Herausforderung der Aufgabe liegt unter anderem darin, den Aufgabentext inhaltlich richtig zu erfassen und anschließend ein proportionales oder antiproportionales Modell aufzustellen und dieses zu nutzen. Treten diesbezüglich Schwierigkeiten auf, bietet es sich an, die verschiedenen Zuordnungen im Unterricht erneut aufzugreifen und deren Merkmale herauszuarbeiten, auch um sie voneinander abzugrenzen. Hinweise, wie dies im Unterricht geschehen kann, können dem Didaktischen Kommentar zur Aufgabe „Kraftfutter“ entnommen werden.

Aufgabe 17: Geschichte zur Graphik



Eine der folgenden Beschreibungen wurde hier graphisch dargestellt.

Kreuze die Beschreibung an, die zu der Graphik passt.

☐ Paula und Sepp machen eine Bergtour. Zuerst steigt der Weg nur wenig an und die beiden kommen gut voran. Dann ist der Weg eine Zeit lang eben. Zum Schluss ist der Weg bis zum Gipfel ziemlich steil und Paula und Sepp kommen nur langsam voran.

☐ Herr Heuer kauft Aktien. Zuerst steigt der Wert der Aktien. Dann bleibt er eine Zeit lang konstant. Schließlich steigt der Wert steil an und Herr Heuer könnte die Aktien mit Gewinn verkaufen.

☐ Lisa und Sven machen eine Radtour. Nach einiger Zeit hat Sven eine Panne und sie müssen sein Rad reparieren. Für den Rest der Strecke fahren beide mit höherer Geschwindigkeit, um die versäumte Zeit aufzuholen.

☐ Lars ist auf dem Weg zur Schule. Unterwegs fällt ihm ein, dass er seinen Taschenrechner vergessen hat, den er für die Mathearbeit braucht. Er läuft zurück nach Hause, nimmt den Taschenrechner und muss sich jetzt beeilen, um pünktlich zur Schule zu kommen.

Auswertung

RICHTIG	3. Kästchen wurde angekreuzt

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	3

Hinweise zur Bearbeitung

Die Aufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da es um alltägliche funktionale Zusammenhänge und deren graphische Darstellung geht.

Zur Bearbeitung der Aufgabe ist es zunächst nötig, die mittels eines Graphen repräsentierte Abhängigkeit der zurückgelegten Strecke von der verstrichenen Zeit zu erfassen (K4). Anschließend sind die einzelnen Sachsituationen zu lesen (K6) und ist zu prüfen, welche Situation zu dem abgebildeten Graphen passt (K3). Hierzu sind insbesondere Textstellen, welche Aufschluss über den Verlauf der Bewegung geben, herauszufiltern. So wird bei der passenden Sachsituation auf zwei unterschiedliche Geschwindigkeiten sowie eine Pause verwiesen. Natürlich ist auch die umgekehrte Vorgehensweise möglich (zuerst werden nacheinander die Geschichten gelesen und graphisch veranschaulicht und dann wird jeweils mit dem gegebenen Graphen verglichen).

Der Wechsel zwischen den in natürlicher Sprache beschriebenen Sachsituationen und dem Graphen sowie die Anforderungen an das Kommunizieren bedingen eine Einordnung der Aufgabe in den Anforderungsbereich II.

Mögliche Schwierigkeiten

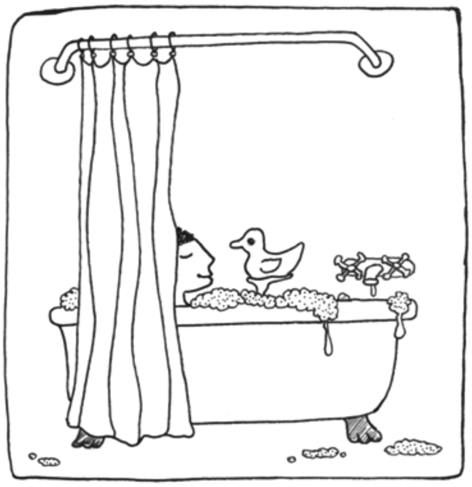
- Antwortalternative [01]: Wird diese Antwortalternative gewählt, liegt offensichtlich eine Verwechslung des Verlaufs der Strecke (Weg steigt an, Weg ist eben, Weg steigt an) mit dem zugehörigen Graphen vor (Defizit bzgl. K3, K4).
- Antwortalternative [02]: Wird diese Antwortalternative gewählt, scheinen die Schülerinnen und Schüler nicht auf die gegebenen Größenbereiche der dargestellten funktionalen Zusammenhänge geachtet zu haben (im Graphen die zurückgelegte Strecke in km, im Text der Gewinn in Euro) (Defizit bzgl. K4, K6).
- Antwortalternative [03]: Wird diese Antwortalternative als richtig bewertet, scheint zwar der Aspekt der wechselnden Geschwindigkeit richtig erfasst worden zu sein, doch wird der konstante Abschnitt des Graphen fälschlicherweise als „nach Hause laufen“ interpretiert (Defizit bzgl. K3, K4).

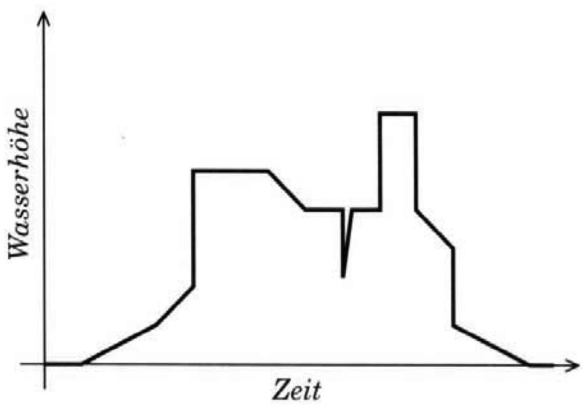
Weiterarbeit und Förderung

Kommt es bei der Aufgabe zu Schwierigkeiten, bietet es sich an, den Schülerinnen und Schülern im Unterricht vier verschiedene, zu den vier gegebenen Sachsituationen passende Graphen zur Verfügung zu stellen und sie aufzufordern, diese begründet den Situationen zu zuordnen. Dabei können sie notfalls nach dem Ausschlussprinzip vorgehen und sich dabei die Auswirkungen einer Bewegung auf den Verlauf des Graphen ins Gedächtnis rufen. Spätestens in der anschließenden Besprechung der Arbeitsergebnisse sollte noch einmal herausgearbeitet werden, welche Bedeutung ein steigender, fallender oder konstant verlaufender Abschnitt des Graphen jeweils hat. Alternativ oder weiterführend ist es auch denkbar, die Schülerinnen und Schüler den abgebildeten Graphen so verändern zu lassen, dass er zu einer der anderen Sachsituationen passt. Dies könnte beispielsweise geschehen, indem der konstant verlaufende Abschnitt fallend gezeichnet und die Beschriftung der zweiten Achse in „zurückgelegte Entfernung“ abgeändert wird.

Zur Vertiefung der erworbenen Inhalte und zur Förderung des Kommunizierens im Unterricht können die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, zu einem Graphen eine passende Bewegungsgeschichte zu schreiben oder zu einer vorgegebenen Geschichte den richtigen Graphen zu zeichnen. Diesbezüglich bietet sich die Arbeit in Tandems an, d. h. ein Schüler schreibt die Geschichte und ein Mitschüler zeichnet den Graphen hierzu. Dabei zeigt sich, dass Graph und Geschichte genaue Informationen enthalten müssen, um in die jeweilige Darstellungsform übertragen werden zu können.

Die folgende Geschichte wurde von einer Siebtklässlerin zu dem – mittlerweile recht bekannten – Badewannen-Graphen geschrieben (vgl. Sinus-Materialien Hessen). In ihrer Geschichte wird jeder einzelne Abschnitt des Graphen mit Leben gefüllt. Lediglich die zu Beginn wechselnde Steigung wird dabei nicht deutlich genug berücksichtigt. Zur Kontrolle könnte ein Mitschüler wiederum den passenden Graphen zeichnen und diesen dann mit der Vorlage vergleichen. Dies ist jedoch aufgrund fehlender Wertepaare nicht einfach.





Graphen können Geschichten erzählen und Situationen beschreiben. Dieser Graph beschreibt den Wasserstand in einer Badewanne.

AB „Badewanne“ 26.08.

Nadja und Lea wollen baden. Sie lassen erst heißes Wasser in die Wanne laufen, merken dann aber, dass die Temperatur zu hoch ist und lassen noch kaltes Wasser in die Wanne. Dann steigt Nadja in das Bad. Mitten im Baden lässt sie etwas Wasser ab.

Nach einiger Zeit steigt sie wieder aus der wanne. Weil das wasser kalt geworden ist, dreht Lea den Hahn ganz auf und lässt noch etwas warmes Wasser dazu. Da klingelt das Telefon, ein Anruf für sie. Aber nach ein paar Minuten kann auch sie endlich baden. Allerdings bleibt sie viel kürzer als ihre Schwester in der Badewanne. Jetzt lässt sie das Wasser ab. Doch da fällt Nadja ein, dass sie noch ihre Zimmerpflanze gießen muss und da-für ja eigentlich das alte Bade-wasser nehmen könnte. Also füllt sie eine große Gieskanne voll Wasser. Danach lässt Lea den Rest des Wassers ab.

Zur weiteren Übung eignet sich auch die Aufgabe „Rolltreppe“ (vgl. hierzu den entsprechenden didaktischen Kommentar aus VERA 2012).

Aufgabe 18: Lineare Funktionen anwenden

Im Folgenden sind Sachsituationen beschrieben, bei denen jeweils eine Größe einer anderen zugeordnet ist. Diese Zuordnungen lassen sich durch Gleichungen darstellen.

Ordne jeder Sachsituation die passende Gleichung zu, indem du sie jeweils verbindest.

Herr Hinze kauft einen Rosenstrauß. Eine Rose kostet 2€. Im Blumenladen wird für das Binden des Straußes zusätzlich 0,50€ berechnet.	$y = 0{,}5x + 2$
Florian verkauft auf dem Bücherbasar seine alten Comics für je 2€. Von seinen Einnahmen muss er 5€ Standgebühr bezahlen. Trotzdem erwartet er, dass er einen guten Gewinn macht.	$y = 2x - 5$
Sven leiht sich im Urlaub ein Fahrrad. Er muss eine Grundgebühr von 2€ bezahlen und zusätzlich pro Tag eine Leihgebühr von 5€.	$y = 2x + 0{,}5$
Frau Meier kauft für eine Bastelarbeit farbige Pappe. Jeder Bogen kostet 0,50€. Außerdem kauft sie eine Tube Spezialkleber für 2,00€.	$y = 5x + 2$

Auswertung

RICHTIG	Herr Hinze kauft einen Rosenstrauß. Eine Rose kostet 2€. Im Blumenladen wird für das Binden des Straußes zusätzlich 0,50€ berechnet.	$y = 0{,}5x + 2$
	Florian verkauft auf dem Bücherbasar seine alten Comics für je 2€. Von seinen Einnahmen muss er 5€ Standgebühr bezahlen. Trotzdem erwartet er, dass er einen guten Gewinn macht.	$y = 2x - 5$
	Sven leiht sich im Urlaub ein Fahrrad. Er muss eine Grundgebühr von 2€ bezahlen und zusätzlich pro Tag eine Leihgebühr von 5€.	$y = 2x + 0{,}5$
	Frau Meier kauft für eine Bastelarbeit farbige Pappe. Jeder Bogen kostet 0,50€. Außerdem kauft sie eine Tube Spezialkleber für 2,00€.	$y = 5x + 2$
	Anm.: Die Lösung ist nur richtig, wenn alle Zuordnungen richtig sind.	

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe erfordert den Umgang mit funktionalen Beziehungen, die in sprachlicher Form und als Gleichungen gegeben sind. Daher gehört sie zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4).

Hier werden verbal beschriebene Sachsituationen und passende Gleichungen einander zugeordnet. Alle Gleichungen haben dieselbe Struktur (y = mx + b), da in allen Sachsituationen mengenabhängige Beträge (Kosten) und feste Zusatzkosten gemeinsam anfallen. Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst in den Beschreibungen enthaltene mathematikhaltige Begriffe (z. B. „zusätzlich … berechnet“) identifizieren (K6) und diese dann kontextspezifisch deuten, um schließlich ein passendes Modell, d. h. eine passende Gleichung, aufzustellen oder – naheliegender – aus den gegebenen auszuwählen (K3).

Die Aufgabe gehört aufgrund ihrer Anforderungen an das Übersetzen zwischen Realität und Mathematik und an das Lesen zum Anforderungsbereich II.

Mögliche Schwierigkeiten

- Die Deutung mathematikhaltiger Begriffe gelingt nicht. Insbesondere wird nicht erkannt, ob angegebene feste Zusatzkosten zu den beschriebenen Ausgaben hinzukommen oder ob diese von beschriebenen Einnahmen abzurechnen sind (Defizit bzgl. K6).

Weiterarbeit und Förderung

Viele Schwierigkeiten der vorliegenden Aufgabe haben ihre Ursache in den erforderlichen Übersetzungsprozessen zwischen den in Worten beschriebenen Realsituationen und der Mathematik. Dieser Wechsel in beide Richtungen ist der Kern des Modellierens (vgl. hierzu auch das allgemeine Kapitel zur Kompetenz „Mathematisches Modellieren“ in VERA-8 2009) und kann bewusst zum Gegenstand des Unterrichts gemacht werden. Da dieser Wechsel häufig das Erkennen mathematikhaltiger Begriffe aus der Alltagssprache erfordert, kann man beschriebene Sachsituationen zunächst daraufhin analysieren. Des Weiteren kann man sich die betreffenden Situationen ähnlich wie in einem Rollenspiel stets konkret vorstellen. Beispielsweise lässt sich überlegen, wie Herr Hinze beim Kauf von fünf, zehn oder mehr Rosen jeweils den zu zahlenden Preis berechnen müsste. Daraus lässt sich dann ableiten, welchem Aufbau eine passende Gleichung genügen muss.

Bereitet in den Gleichungen das Erkennen der Bedeutung von x und y Schwierigkeiten, kann ergänzend die folgende innermathematische Aufgabe bearbeitet werden, um zu verdeutlichen, dass y jeweils für einen Gesamtwert steht. Darauf aufbauend kann dann wieder eine Sachsituation konstruiert werden, bei der deutlich wird, dass die Variable x für eine veränderliche Größe steht und die Variable y für einen Gesamtwert.

In der Tabelle wird jedem x-Wert durch die Vorschrift $y = 2x - 1$ ein y-Wert zugeordnet.

Ergänze die Tabelle.

x	1	2	3	3,5	-1	-2
y	1		5		-3	

Zur Vertiefung kann auch die folgende Aufgabe bearbeitet werden. In dieser ist ein mathematisches Modell in Form einer Gleichung gegeben, und eine passende Sachsituation ist zu überlegen. Dies kehrt die sonst oft übliche Denkrichtung um und kann einen Beitrag zum verständigen Umgang mit solchen Gleichungen leisten.

Gegeben ist die Gleichung $y = 0{,}25x + 1{,}90$.

Denke dir eine Sachsituation aus, die mit dieser Gleichung beschrieben werden kann. Notiere, wofür x bzw. y stehen, und beschreibe die Sachsituation.

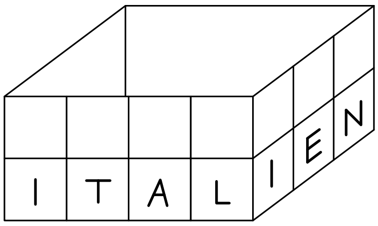
x steht für ___________________________ und y steht für ___________________________ .

Mit dieser Aufgabe kann das Übersetzen eines Modells (zurück) in die Realität geübt werden. Dazu können zunächst verschiedene Kontexte überlegt werden, die einer solchen Struktur genügen. Im nächsten Schritt kann man die Schülerinnen und Schüler auffordern, die einzelnen Summanden des Funktionsterms in den jeweiligen Kontexten zu deuten.

Man vergleiche hierzu auch den didaktischen Kommentar zur Aufgabe „Fieberthermometer“, in der u. a. in einer weiterführenden Aufgabe eine Funktionsgleichung in einer Sachsituation zu deuten ist.

Aufgabe 19: Briefmarkenschachteln

Martin sammelt neuerdings Briefmarken. Er will sie vorläufig in kleinen, selbst gebastelten Schachteln aufbewahren.

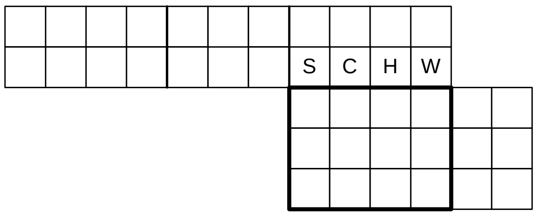


Hier sind Netze für weitere Schachteln. Vor dem Zusammenkleben beschriftet sie Martin.

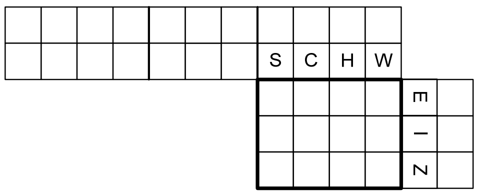
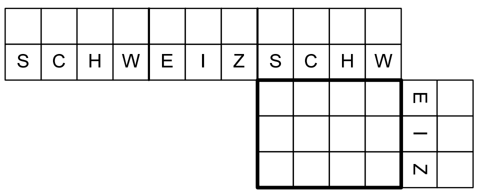
Vervollständige die Beschriftung.

Teilaufgabe 19.1

SCHWEIZ



Auswertung

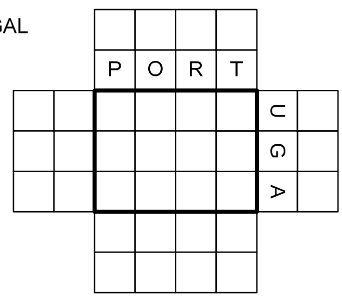
RICHTIG	 ODER 

Teilaufgabenmerkmale

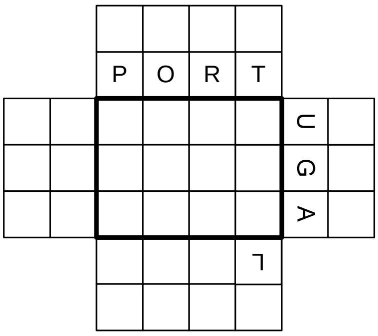
Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	1B

Teilaufgabe 19.2

PORTUGAL



Auswertung

RICHTIG	
FALSCH	Alle anderen Lösungen (Insbesondere Buchstaben in falscher Ausrichtung).

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört der Leitidee Raum und Form (L3) an, da mit einem noch oben offenen Quader und zwei seiner möglichen Netze gearbeitet werden muss.

Bei beiden Teilaufgaben ist es notwendig, zwischen dem Schrägbild des Quaders und seinem Netz zu wechseln, um die im Schrägbild (mental) vorgegebene Beschriftung im Netz richtig zu ergänzen (K4).

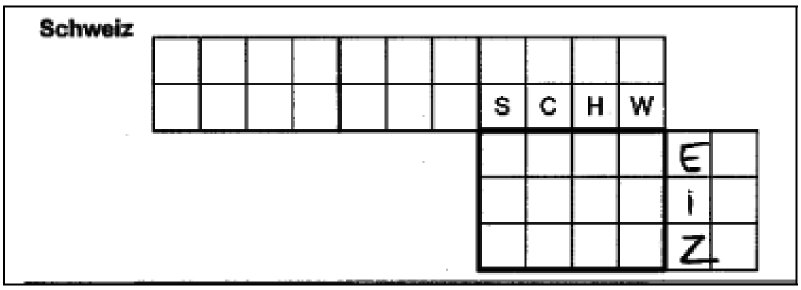
Dieser Wechsel zwischen zwei bekannten mathematischen Darstellungen und die nötigen mentalen Operationen (Wie sind die Buchstaben jeweils ausgerichtet?) rechtfertigen die Einordnung beider Teilaufgaben in den Anforderungsbereich II.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 19.1, 19.2:

Die folgenden Schwierigkeiten und Fehler sind wahrscheinlich alle auf ein noch nicht ausreichend gut entwickeltes räumliches Vorstellungsvermögen zurückzuführen.

- Es wird nicht erkannt, dass es sich bei der fett umrandeten Fläche um die Bodenfläche handelt. Diese wird demzufolge ebenfalls beschriftet.
- Es werden die falschen Seitenflächen beschriftet.
- Die richtige Seitenfläche wird in der falschen Richtung beschriftet, was die folgende Schülerlösung exemplarisch veranschaulicht.



Weiterarbeit und Förderung

Um das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler zu fördern, können die Briefmarkenschachteln im Unterricht leicht aus den gegebenen Netzen nachgebaut und dann richtig beschriftet werden. Vertiefend ist es denkbar, weitere Beschriftungen einzufordern oder aber diesen Aufgabentyp auf andere Körper (z. B. Pyramide) zu übertragen.

Weiterführend können Aufgaben zum Würfel oder Quader behandelt werden, in welchen nach allen möglichen Netzen gefragt wird. Sie erfordern neben der Arbeit mit mathematischen Darstellungen (K4) auch das Lösen mathematischer Probleme (K2) und das Begründen der gefundenen Anzahl an Netzen (K1), so dass weitere Kompetenzen gefördert werden können. Derartige Aufgaben bieten sich hierzu besonders an, da sie auf handelnder und auf zeichnerischer Ebene gelöst werden können und demnach vielen Schülerinnen und Schülern einen Zugang ermöglichen. Dabei bietet sich neben der Arbeit mit Pappe oder Papier auch der Einsatz von Klickis an, aus denen verschiedene Netze nachgebaut werden können.

Diese Aufgabe bietet auch die Möglichkeit, Umkehraufgaben zur gegebenen Frage zu behandeln und schließlich alle drei Grundaufgaben der Prozentrechnung mithilfe einer solchen Darstellung zu thematisieren (Grundwert, Prozentsatz oder Prozentwert ist gesucht). Insbesondere kann bei fehlerhaften Lösungen der obigen Aufgabe gefragt werden, welcher Prozentsatz – anstelle des geforderten – dargestellt ist.

Schließlich kann diese Aufgabe auch Anlass geben, grundlegende Fertigkeiten, wie das Umwandeln eines Prozentsatzes in einen Hundertstelbruch, einen gekürzten Bruch und einen Dezimalbruch zu üben.

Aufgabe 20: Verkehrszeichen

Teilaufgabe 20.1

Ist das Bild des Verkehrszeichens achsensymmetrisch?

Kreuze jeweils an.

	ja	nein
	☐	☐
	☐	☐
	☐	☐
	☐	☐
	☐	☐

Auswertung

RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	2. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt

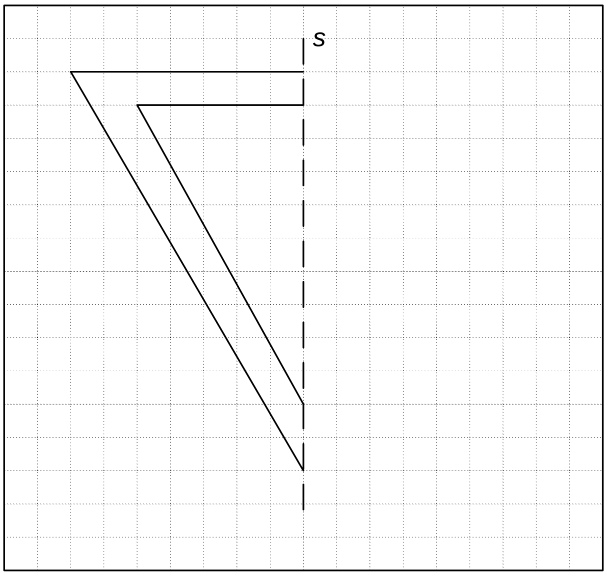
Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	4

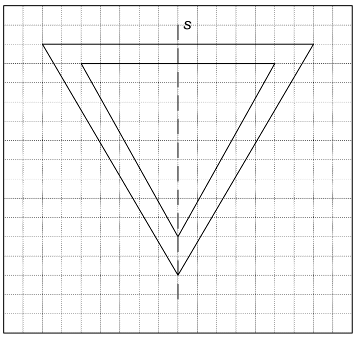
Teilaufgabe 20.2

Spiegele die Figur an der Spiegelachse *s*.

Zeichne mit Geodreieck oder Lineal.



Auswertung

RICHTIG	 Anm.: Die gespiegelten Eckpunkte müssen auf den Schnittpunkten des Rasters liegen. Zeichentoleranz diesbezüglich ± 1 mm.

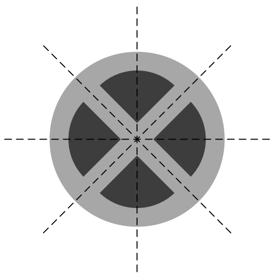
Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1A

Teilaufgabe 20.3

Zeichne alle Spiegelachsen in diese Figur ein.

Auswertung

RICHTIG	 Anm.: Es müssen alle Spiegelachsen eingezeichnet sein. Die einzelnen Achsen dürfen um 1 mm bzw. 3° von ihrer ursprünglichen Lage abweichen.

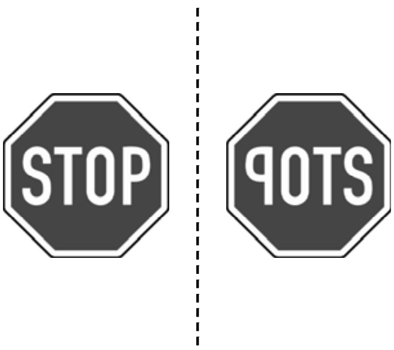
Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

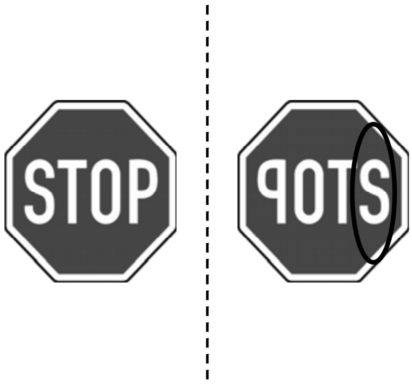
Teilaufgabe 20.4

Beim Spiegeln dieses Verkehrszeichens ist ein Fehler unterlaufen.

Kreise den Fehler ein.



Auswertung

RICHTIG	 Anm.: Der Fehler kann auch mittels eines anderen Zeichens (z. B. Kreuz) gekennzeichnet werden. Es kann auch das "S" im linken Bild markiert werden.

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Raum und Form (L3), da mit ebenen Symmetrien und Abbildungen verständnisorientiert umgegangen werden muss.

Unter Rückgriff auf Vorstellungen von Achsenspiegelungen und Achsensymmetrien ist in Teilaufgabe 20.1 zu prüfen, ob die abgebildeten Verkehrszeichen achsensymmetrisch sind (K4), ist in Teilaufgabe 20.2 eine Figur zu spiegeln (K4, K5), sind in Teilaufgabe 20.3 die Spiegelachsen einer Figur einzuzeichnen (K4) und ist in Teilaufgabe 20.4 ein Fehler beim Spiegeln zu finden (K4).

Da zur Bearbeitung aller Teilaufgaben nur einfache Kenntnisse und Fertigkeiten zu Achsenspiegelungen und Achsensymmetrien zu reproduzieren sind, gehören diese Teilaufgaben zum Anforderungsbereich I.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 20.1:

- Wird die zweite Antwortalternative als richtig bewertet, liegt vermutlich eine Verwechslung von Achsen- und Punktsymmetrie vor. Außerdem wurden die Graustufen nicht berücksichtigt (Defizit bzgl. K4).

Weiterarbeit und Förderung

Sollten bei der Bearbeitung dieser Teilaufgaben Schwierigkeiten auftreten, bietet es sich an, die Schülerinnen und Schüler diese im Unterricht mittels eines realen Spiegels bearbeiten zu lassen. Dies hilft ihnen, adäquate Vorstellungen von den Eigenschaften einer Achsenspiegelung zu entwickeln. Mit Blick auf die zweite Teilaufgabe kann dies auch mit Hilfe eines dynamischen Geometrieprogramms vertieft werden. Dabei ermöglicht es der Zugmodus des Programms, die Ausgangsfigur zu variieren und die Auswirkungen auf die Bildfigur sowie die Lage zur Spiegelachse zu analysieren. Anschließend können die Eigenschaften einer Achsenspiegelung gesammelt und mit denen anderer Abbildungen verglichen werden, wie dies auch in der folgenden ergänzenden Aufgabe eingefordert wird:

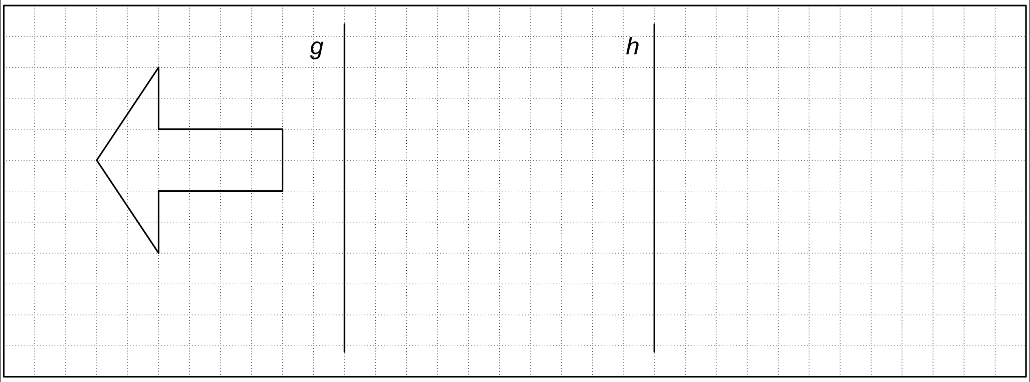
Peter behauptet: „Eine Achsenspiegelung ist **immer** dasselbe wie eine Drehung um 180°."

Nimm zu Peters Aussage Stellung.

Diese Aufgabe erfordert es zu überprüfen, inwiefern sich die Eigenschaften einer Achsenspiegelung mit denen einer Drehung um 180° decken bzw. ob beide Abbildungen immer zum selben Ergebnis führen. Hierzu ist es zunächst erforderlich, die formulierte „All-Aussage" als solche zu identifizieren, wozu das Wort „immer" in seiner mathematischen Bedeutung richtig erfasst werden muss. Sodann kann es hilfreich sein, einzelne Beispiele zu betrachten, anhand derer der Umlaufsinn als ausschlaggebendes Kriterium herausgearbeitet werden kann. In der anschließenden Argumentation muss nun die „All-Aussage" als falsch ausgewiesen werden. Hierzu kann auf allgemeiner Ebene argumentiert oder ein Gegenbeispiel angegeben werden. Wird hierbei ein dynamisches Geometrieprogramm genutzt, kann man anhand verschiedener Beispiele leicht erkennen, dass die beiden Abbildungen nur in Spezialfällen zum selben Ergebnis führen. Hieraus können die Schülerinnen und Schüler auch folgern, dass sie eine Fallunterscheidung durchführen müssen.

Weiterführend können im Unterricht auch Verkettungen von Abbildungen untersucht werden. Diesbezüglich bieten sich beispielsweise die Verkettung zweier Spiegelungen an zueinander parallelen Geraden an, welche durch eine Verschiebung ersetzt werden kann. Die folgende Aufgabenstellung könnte hierzu genutzt werden:

Übertrage den Pfeil in dein Heft. Spiegele ihn an der Achse *g*. Spiegele das Spiegelbild des Pfeils anschließend an der Achse *h*.

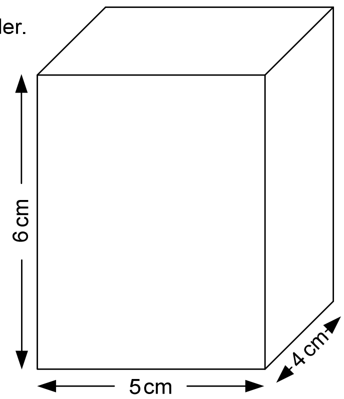


a) Vergleiche die einzelnen Figuren. Beschreibe, was dir auffällt.

b) Überlege, welche Abbildung zu demselben Ergebnis führt wie die Spiegelung an zwei zueinander parallelen Geraden. Beschreibe die Abbildung möglichst genau.

Aufgabe 21: Quader

Die Abbildung zeigt einen Holzquader.



(Abbildung nicht maßstabstreu)

Teilaufgabe 21.1

Berechne das Volumen dieses Quaders.

$V =$ ___________ cm^3

Auswertung

RICHTIG	$V =$ **120** cm^3

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Teilaufgabe 21.2

Alle Seiten des Quaders sollen mit Papier beklebt werden.

Wie viel Papier wird (mindestens) benötigt?

Kreuze an.

☐	☐	☐	☐
45 cm^2	74 cm^2	120 cm^2	148 cm^2

Auswertung

RICHTIG	4. Kästchen wurde angekreuzt

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	3

Hinweise zur Bearbeitung

Die beiden Teilaufgaben 21.1 und 21.2 gehören zur Leitidee Messen (L2), da Volumen bzw. Oberflächeninhalt eines Quaders zu berechnen sind (K5). Die hierzu benötigten Maße sind der Abbildung zu entnehmen (K4).

Da es sich bei der Abbildung um ein Schrägbild eines bekannten mathematischen Körpers handelt und die notwendigen Rechnungen einfach sind, gehören beide Teilaufgaben dem Anforderungsbereich I an.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 21.1:

- Die angegebenen Längen der einzelnen Kanten werden addiert [Fehllösung: 15 cm^3] (Defizit bzgl. K5).
- Es wird der Oberflächeninhalt und nicht das Volumen berechnet [Fehllösung: 148 cm^2] (Defizit bzgl. K5)

Zu 21.2:

- 1. Antwortalternative (Fehllösung: 45 cm^2): Die Längen der sechs sichtbaren Kanten wurden addiert (Defizit bzgl. K5).
- 2. Antwortalternative (Fehllösung: 74 cm^2): Dies ist die Summe der Flächeninhalte der drei abgebildeten Seitenflächen des Würfels (Defizit bzgl. K4).
- 3. Antwortalternative (Fehllösung: 120 cm^2): Dies ist die Summe der Flächeninhalte der Vorder- und der Rückseite (Defizit bzgl. K4).

Weiterarbeit und Förderung

Treten bei der Bearbeitung der Teilaufgaben Schwierigkeiten auf, bietet es sich an, das Volumen und die Oberfläche handelsüblicher Verpackungen berechnen zu lassen. Die Verpackungen können bei Bedarf leicht in ihre Netze auseinander gefaltet werden, so dass die Zusammensetzung der Netze aus einzelnen rechteckigen Teilflächen veranschaulicht und die Formel zur Berechnung des Oberflächeninhalts erneut hergeleitet werden kann.

Um den Begriff des Volumens zu verdeutlichen, können diese Körper mit Wasser oder Sand gefüllt oder aber mit Kubikzentimeterwürfelchen ausgelegt werden. Dies ermöglicht den Schülerinnen und Schülern (erneut) einen handelnden Zugang zum Volumenbegriff, wodurch zum Aufbau adäquater Grundvorstellungen beigetragen wird. Analog kann auch der Oberflächenbegriff verdeutlicht werden.

Weiterführend kann man im Unterricht leicht z. B. auch den Zusammenhang zwischen dem Volumen eines Quaders und dem einer Pyramide bei gleich großer Grundfläche und Höhe thematisieren. Anhand konkreter Beispiele können die Schülerinnen und Schüler selbstständig entdecken, dass bei gleich großer Grundfläche und Höhe das Volumen eines Quaders dreimal so groß ist wie das Volumen einer Pyramide. In diesem Zusammenhang bietet es sich nun an, die Situation operativ durchzuarbeiten und z. B. nach dem Verhältnis der Höhe einer Pyramide und eines Quaders bei gleich großer Grundflächen und Volumina zu fragen. Dies ermöglicht beispielsweise die folgende Aufgabe:

Ein Quader und eine Pyramide haben beide die gleiche Grundfläche und das gleiche Volumen.

Gib an, in welchem Verhältnis die Höhe der Pyramide und die Höhe des Quaders stehen.

____

Begründe deine Antwort.

Zur Bearbeitung dieser Aufgabe kann es hilfreich sein, zunächst Zahlenbeispiele zu betrachten, anhand derer die Schülerinnen und Schüler das Verhältnis selbständig entdecken können. In der sich anschließenden Verallgemeinerung kann dann unter Rückgriff auf die bereits gesammelten Kenntnisse eine allgemeine Begründung formuliert werden. Treten bezüglich der Argumentation Schwierigkeiten auf, kann den Schülern auch ein Art Lückentext zur Verfügung gestellt oder aber eine Reihe von geeigneten Stichworten zum Formulieren der Argumentation an die Hand gegeben werden. Ein solcher Text könnte folgendermaßen aussehen:

Das _____________ einer Pyramide und eines Quaders ist nur von der Größe der Grundfläche und der __________ abhängig. Bei gleicher Höhe und gleich großer _________________ ist das Volumen eines Quaders ______________ so groß wie das Volumen einer _______________. Da das Volumen und die Grundfläche beider Körper in der Aufgabe gleich groß sind, muss ____.

Weitere Hinweise zum Aufbau der Kompetenz „mathematisch Argumentieren" im Unterricht können dem Allgemeinen Kapitel zum mathematischen Argumentieren der Vergleichsarbeiten 2010 entnommen werden.

Aufgabe 22: Geometrische Körper erkennen

In der nachfolgenden Tabelle sind Körper benannt.

Prüfe, ob diese in der Abbildung zu sehen sind.

Kreuze jeweils an.

	ja	nein
Zylinder	☐	☐
Quader	☐	☐
Pyramide	☐	☐
Kegel	☐	☐
Kugel	☐	☐

Auswertung

RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	2. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	1. Kästchen wurde angekreuzt
RICHTIG	2. Kästchen wurde angekreuzt

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Raum und Form (L3), da geometrische Körper identifiziert werden müssen.

Zur Lösung müssen die Bezeichnungen dieser Körper mit den gegebenen Figuren abgeglichen werden (K4).

Da es sich dabei um bekannte Körper handelt, gehört diese Aufgabe dem Anforderungsbereich I an.

Weiterarbeit und Förderung

Treten bei der Aufgabe Schwierigkeiten auf, können die Schüler im Unterricht aufgefordert werden, je einen „Steckbrief“ zu einem Körper zu erstellen, um deren charakteristische Merkmale herauszuarbeiten und die einzelnen Körper voneinander abzugrenzen. Dabei bietet es sich an, die verschiedenen Körper z. B. mittels Knete und Zahnstochern, Pappe oder Klickis nachzubauen oder nach passenden Alltagsgegenständen suchen zu lassen.

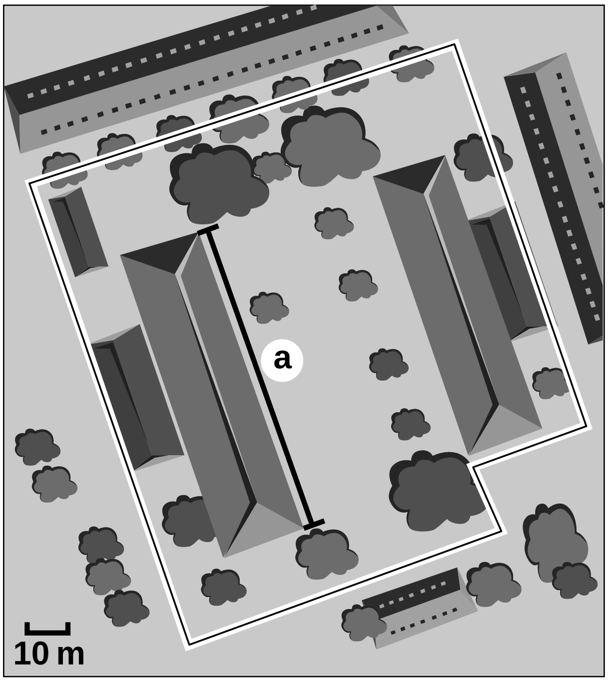
Mögliche Inhalte eines solchen Steckbriefs könnten sein:

- Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten
- Darstellung eines Schrägbildes und eines Netzes
- Angabe des Volumens sowie der Formel zu dessen Berechnung
- Angabe des Oberflächeninhalts sowie der Formel zu dessen Berechnung
- Besonderheiten, z. B. Lagebeziehungen von Begrenzungsflächen
- Unterschiede zu Körpern, mit denen sie leicht verwechselt werden können

Die erstellten Steckbriefe können ggf. in Form einer kleinen Ausstellung allen Schülerinnen und Schülern zugänglich gemacht werden. Werden die Ergebnisse dabei in Form einer Übersicht zusammengetragen, kann diese im folgenden Unterricht wie eine Art Formelsammlung genutzt werden.

Aufgabe 23: Schulgrundstück

Die Abbildung zeigt das Luftbild einer Schule. Darauf sind das Schulgrundstück (schwarz umrandet) und die Schulgebäude zu sehen.



Grafik: © IQB

Teilaufgabe 23.1

Die zwei größten Gebäude auf dem Grundstück sind die Schulgebäude.

Bestimme mit Hilfe der Angaben im Bild die Länge *a.*

Auswertung

RICHTIG	Länge *a* dieses Schulgebäudes aus dem Intervall [64; 100] m.

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	4

Teilaufgabe 23.2

Auf dem Schulhof werden 100-m-Sprints gelaufen. Sebastian will eine 100-m-Laufbahn als Strecke in das Foto einzeichnen.

Wie lang ist die Strecke, die er zeichnen müsste?

Auswertung

RICHTIG	Länge der Strecke aus dem Intervall [4; 7] cm.

Teilaufgabenmerkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	4

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da verschiedene Längen zu bestimmen sind.

Bei beiden Teilaufgaben sind zunächst die gesuchten Größen aus dem Text zu entnehmen (K6). Zur Bearbeitung der Teilaufgabe 23.1 ist zunächst die Länge der Strecke a des Schulgebäudes im Bild zu messen (K4). Mit Hilfe des angegebenen Maßstabs muss anschließend die wirkliche Länge des Schulgebäudes berechnet werden (K5).

Bei Teilaufgabe 23.2 muss umgekehrt zu einer vorgegebenen wirklichen Länge die entsprechende Länge maßstabsgerecht in die Abbildung eingezeichnet werden. Um die Länge der einzuzeichnenden Laufbahn zu berechnen, wird erneut der gegebene Maßstab verwendet (K4) und umgerechnet (K5).

Da zur Lösung beider Teilaufgaben nur elementare Fertigkeiten und Fähigkeiten erforderlich sind, gehören beide – trotz ihrer Mehrschrittigkeit – noch dem Anforderungsbereich I an.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 23.1:

- Es wird nur der im Bild gemessene Wert angegeben. Die wirkliche Länge wird nicht berechnet, d. h. der Maßstab kann entweder nicht abgelesen oder aber nicht eingesetzt werden (Defizit bzgl. K6 oder K4).

Zu 23.1, 23.2:

- Es wird davon ausgegangen, dass 1 cm im Bild in Wirklichkeit 10 m sind. Dies könnte dadurch zustande gekommen sein, dass die Abbildung nur oberflächlich betrachtet und der gegebenen Strecke einfach eine Länge von 1 cm zugewiesen wurde, weil dies eine häufig im Unterricht verwendete Angabe ist [Fehllösungen: 45 m bzw. 10 cm] (Defizit bzgl. K4).
- Es kommt zu Umrechnungsfehlern zwischen den Einheiten Millimeter und Zentimeter, welche sich auf den verwendeten Maßstab auswirken. So wird z. B. angenommen, dass 10 m = 10 000 mm seien, woraus sich ein Maßstab von 5 : 10 000 ergibt (Defizit bzgl. K5).

Weiterarbeit und Förderung

Unterrichtliche Hinweise zur Arbeit mit dem Maßstabsbegriff können dem Didaktischen Kommentar zur Aufgabe „Maßstabsrechner“ entnommen werden, welche auch als Vorbereitung auf die Aufgabe „Schulgrundstück“ genutzt werden kann.