

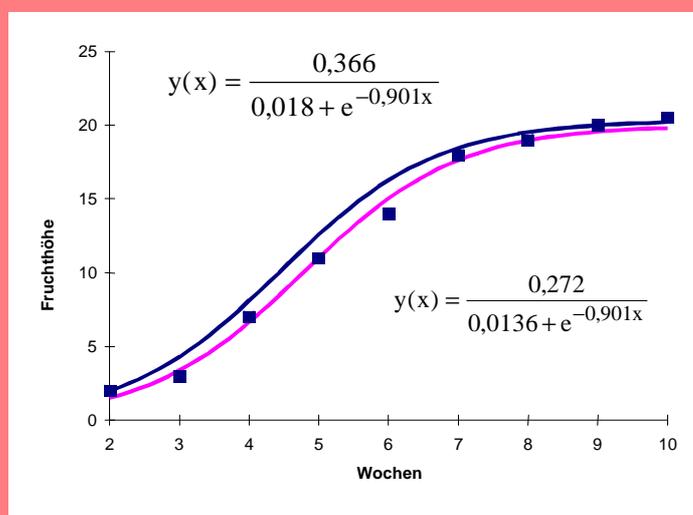


nli-Berichte 64

Niedersächsisches Landesinstitut
für Fortbildung und Weiterbildung im
Schulwesen und Medienpädagogik (NLI)

Wochen	Höhe
2	2
3	3
4	7
5	11
6	14
7	18
8	19
9	20
10	20,5

$$\frac{y'}{y} = -0,045 \cdot y + 0,901$$



Heiko Knechtel • Rainer Kühl • Mechthild Ebenhöf •
Markus Eberle • Hans Kramer • Ulf-Hermann Krüger •
Ulrich Niehoff • Reimund Vehling • Wilhelm Weiskirch

Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht des Sekundarbereichs II

NLI-Berichte 64

Heiko Knechtel • Rainer Kühl • Mechthild Ebenhöf •
Markus Eberle • Hans Kramer • Ulf-Hermann Krüger •
Ulrich Niehoff • Reimund Vehling • Wilhelm Weiskirch

Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht des Sekundarbereichs II

Herausgeber: Niedersächsisches Landesinstitut
für Fortbildung und Weiterbildung im
Schulwesen und Medienpädagogik (NLI)
Keßlerstraße 52, 31134 Hildesheim

Schriftleitung der NLI-Berichte: Dr. Friedrich Winterhager

Redaktion: Dr. Peter Gaschler
Dr. Friedrich Winterhager

Satz und Layout: Heiko Knechtel
Ingrid Helms

Druck und Vertrieb: NLI, Dezernat 1

Copyright: Vervielfältigungen für unterrichtliche Zwecke sowie für Aus-,
Fort- und Weiterbildung sind erlaubt. Dies gilt nicht für
den Abdruck in Materialsammlungen und Broschüren mit
größerer Auflage. Nachdruck, auch auszugsweise, zum
Zwecke einer Veröffentlichung durch Dritte ist nur mit Zu-
stimmung des NLI gestattet.

Hildesheim, November 2000

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung <i>Heiko Knechtel</i>	7
Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen: Gedanken zu didaktischen Modellen, methodischen Folgerungen und neuen algebraischen Kompetenzen <i>Heiko Knechtel</i>	10
Einführung in die Differenzialrechnung – Von Änderungsraten zum Differenzialquotienten <i>Ulf-Hermann Krüger</i>	15
Krümmung <i>Hans Kramer, Mechthild Ebenhöf</i>	37
Regression <i>Heiko Knechtel, Rainer Kühl</i>	58
Einführung in die Integralrechnung mit dem TI-92 <i>Wilhelm Weiskirch</i>	74
Vergleich numerischer Integrationsverfahren mit dem TI-92 <i>Markus Eberle, Ulrich Niehoff</i>	85
Wozu kann man Matrizen gebrauchen? <i>Reimund Vehling</i>	99
Splines <i>Heiko Knechtel</i>	111
Anhang	132

Einleitung

Heiko Knechtel

„Gegenwärtig wächst die Verunsicherung bezüglich tradierter Inhalte und Methoden des Mathematikunterrichtes im Gymnasium. Zum einen besteht vielfach ein Widerspruch zwischen Zielen und Ergebnissen des Unterrichtes, zum anderen stellt sich das Problem einer neuerlichen Standortbestimmung, seitdem leicht transportierbare und finanziell erschwingliche Taschencomputer mit neuartigen Möglichkeiten auf dem Markt sind. ...

Die Taschencomputer können nicht nur numerisch, sondern auch symbolisch rechnen, d.h. sie können nicht nur mit Zahlen umgehen, sondern auch mit Variablen und Termen. Damit verlieren kalkülorientierte Fertigkeiten weitgehend an Bedeutung. Die auf den Taschencomputern implementierten Computer-Algebra-Systeme können Terme umformen und Gleichungen lösen, können Funktionen differenzieren und Kurvendiskussionen durchführen. Der Unterricht in Mathematik wird also zum Umgang mit Kalkülen ein völlig neues Verhältnis finden müssen; auf keinen Fall kann er so kalkülorientiert bleiben wie bisher.“ (Empfehlungen für den Mathematikunterricht an Gymnasien, Niedersächsisches Kultusministerium 1998).

Graphikfähige Taschenrechner (GTR) und Computeralgebrasysteme (CAS) dringen unaufhaltsam auf den Schulmarkt. Es wird erwartet, dass der graphikfähige Taschenrechner in ganz kurzer Zeit den wissenschaftlich-technischen Taschenrechner vollständig ablöst. Dieses liegt insbesondere daran, dass der graphikfähige Taschenrechner sowohl vom Funktionsumfang als auch von den numerischen Fähigkeiten den wissenschaftlich-technischen Rechner deutlich übertrifft. Hinzu kommt die Möglichkeit, viele Probleme geeignet zu visualisieren. Die Hardware ist bzgl. des Vertikalrechners weitgehend ausgereift, die Preise bewegen sich in einem für die Schule akzeptablen Bereich. Graphikfähige Taschenrechner werden in Kürze Standardwerkzeuge im Mathematikunterricht des Gymnasiums sein. Darüber hinaus sind Taschencomputer mit Computeralgebrasystem zusätzlich in der Lage, Probleme auch symbolisch zu lösen. Dadurch setzen sie neue Maßstäbe, die besonders den Mathematikunterricht betreffen. Was bleibt, wenn kleine, preiswerte Computer auch in den Sekundarbereich I eindringen? *Wilfried Herget* hat die heute schon klassische Frage gestellt: „Wie viel Termumformungen braucht der Mensch?“ Hierauf ist weltweit bisher keine schlüssige Antwort gefunden worden, aber man hat in bundesweiten Untersuchungen in Österreich zum Einsatz des Computeralgebrasystems DERIVE™ und des Taschencomputers TI-92™ bereits erste Teilantworten in Form von neuen algebraischen Qualifikationen im CAS-Zeitalter gefunden.

Computeralgebrasysteme werden in den nächsten Jahren vermutlich verstärkt dem Unterricht im Sekundarbereich II vorbehalten sein. Hier stellen sie ein wertvolles Werkzeug dar, das auch bereits weitgehend akzeptiert ist. Erst mittelfristig ist damit zu rechnen, dass CAS auch in den Unterricht des Sekundarbereichs I Einzug halten werden. Das Unterrichtsprojekt in Österreich und erste Schulversuche in Niedersachsen weisen bereits auf eine zu erwartende Entwicklung hin.

Die Mathematikkommission hat in ihren Empfehlungen im Jahr 1998 deutlich gemacht, dass unter dem Eindruck des Vordringens von Computeralgebrasystemen in den Mathematikunterricht des Gymnasiums viele seiner Inhalte und Methoden neu überdacht werden müssen. Bei den angestrebten Veränderungen handelt es sich keineswegs um neue Ziele, sondern darum, wie tradierte Ziele besser erreicht werden können. Dieses ist der Ansatz für den vorliegenden Band. Er soll einerseits aufzeigen, wie mit Einsatz von CAS klassische Inhalte tiefer durchdrungen werden können und sich andererseits neue Inhalte für den Unterricht eröffnen.

Diese Aspekte sind schon Mitte der neunziger Jahre in viele zentrale und regionale Mathematikfortbildungen eingeflossen. Es wurde begonnen, durch neue Strukturen die Kolleginnen und Kollegen die Mathematik wieder neu erfahren zu lassen. Zentraler Aspekt der neuen Struktur war der Workshopcharakter und der Projektgedanke. Sie haben sich in vielen Fortbildungen als eine Möglichkeit erwiesen, die Teilnehmerinnen und Teilnehmer anzuleiten, sich intensiv und aktiv mit den vorgestellten Problemen auseinander zu setzen. Die Form der Fortbildungen war so angelegt, dass

sie einen neu orientierten Mathematikunterricht mit CAS im kleinen Rahmen simuliert. Die eigene Auseinandersetzung mit offenen Problemen, die Untersuchung divergenter Probleme, die Variation bekannter Probleme stellten den Kern der Fortbildungsveranstaltungen dar. Die klassische passive „Seminarform“ mit Vortrag und anschließender Diskussion wurde weitgehend zugunsten von aktiver Projektarbeit in Gruppen zurückgedrängt. Gerade dieses Fortbildungskonzept wurde von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern sehr gut angenommen und hat sich in vielen Veranstaltungen bewährt.

Ende 1997 wurde damit begonnen, in den vier Regierungsbezirken des Landes Niedersachsen Multiplikatorinnen und Multiplikatoren für die Mathematikfortbildung auszubilden. Auf der Basis dieser Ausbildung und den eigenen Erfahrungen im Unterricht wurden dann 1999 die Ideen für einen sich wandelnden Mathematikunterricht in die Schulen getragen. Neben den selbst erstellten Materialien sollte hierbei auch auf die in den zentralen Fortbildungen entwickelten Unterrichtsmaterialien zurückgegriffen werden. Ein NLI-Bericht zum Einsatz von CAS im Mathematikunterricht sollte hierbei die Möglichkeiten für einen rechnerunterstützten Unterricht aufzeigen und neue Anregungen geben. Der vorliegende Bericht ist aus den verschiedenen Fortbildungen der Jahre 1996-1999 zum Einsatz von Computeralgebrasystemen im Mathematikunterricht entstanden. Er enthält redaktionell überarbeitete Materialien, die die Teilnehmerinnen und Teilnehmer in den Fortbildungen unter Moderation der Projektleitungen selbst entwickelt haben. Alle vorgestellten Themen sind bereits mehrfach im Unterricht von Kolleginnen und Kollegen erfolgreich „getestet“ worden. In vielen Schulen, die heute schon CAS in Grund- oder Leistungskursen einsetzen, gehören die Themen und Materialien bereits zum Standardprogramm des Mathematikunterrichtes. Aus ihnen heraus haben sich aber auch viele individuelle Variationen ergeben, die den Unterricht neu belebt haben.

Die Materialien sind überwiegend unter Einsatz von Taschencomputern TI-92 von Texas Instruments, die das CAS DERIVE implementiert haben, entstanden. Diese Geräte sind z.Z. an Gymnasien am weitesten verbreitet. Die Themen und Materialien können jedoch auch auf jedem anderen Computeralgebrasystem bearbeitet werden. Darüber hinaus sind fast alle der vorgestellten Unterrichtseinheiten und Projekte auch in weiten Teilen mit grafikfähigen Taschenrechnern durchführbar. Unter dem Eindruck dieses sich rasch ausbreitenden neuen Werkzeuges ist dieser Aspekt besonders wichtig. Viele Kolleginnen und Kollegen haben die vorgestellten Unterrichtseinheiten schon erfolgreich mit grafikfähigen Taschenrechnern durchgeführt. Die Teile, die CAS erfordern, wurden von ihnen häufig separat mit CAS-Demo-Rechnern oder im Computerraum mit CAS auf dem PC behandelt.

Die hier vorliegenden Materialien sind nur eine Auswahl aus den Themen, die in den zentralen Fortbildungen zum Einsatz von CAS behandelt worden sind. Ihre Auswahl wurde so getroffen, dass sie einen Einblick in die Behandlung traditioneller und neuer Themen des Mathematikunterrichtes des Sekundarbereichs II unter Einsatz von Computeralgebrasystemen geben. Sie sollen die Orientierung in einem sich weit öffnenden Feld neuer Möglichkeiten bieten.

In dem Artikel **„Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen: Gedanken zu didaktischen Modellen, methodischen Folgerungen und neuen algebraischen Kompetenzen“** werden von mir die wesentlichen Neuerungen in diesem Bereich knapp zusammengestellt. Die hier aufgezeigten didaktischen und methodischen Prinzipien sind Grundlage aller folgenden Artikel. Die neuen algebraischen Kompetenzen wurden aus einem Vortrag von *Helmut Heugel* zur Evaluation des österreichischen TI-92 Projektes zusammengestellt.

In dem Beitrag von Ulf-Hermann Krüger **„Einführung in die Differenzialrechnung - Von Änderungsraten zum Differenzialquotienten“** wird eine Möglichkeit aufgezeigt, das klassische Thema der Klasse 11 neu zu beleben. Neben vielen Materialien werden auch 8 Folienvorlagen und Arbeitsblätter mitgeliefert, die einen Einstieg in die neuen Fragestellungen erleichtern sollen.

Durch Einsatz von CAS ist es möglich, die **„Krümmung“** einer Kurve als neues, zentrales Merkmal zu untersuchen. Hans Kramer stellt in seinem Beitrag vielfältige Aspekte vor, die sowohl innermathematisch als auch in Anwendungen beim Straßenbau relevant sind. Die Realisation dieses Projektes auf dem TI-92 ist in diesem Beitrag sehr ausführlich dokumentiert.

„**Regression**“ kann als ein zentrales Verbindungsglied zwischen Anwendung und mathematischem Modell angesehen werden. Sie bietet die Möglichkeit, mit mathematischen Methoden Funktionen an Daten anzupassen. Hinführungen, Möglichkeiten und Probleme dieses „Datafittings“ werden in dem Beitrag von Rainer Kühl und mir an realen Beispielen behandelt. Hierbei wird einerseits das Zahlenmaterial experimentell selbst erzeugt und andererseits werden umfangreiche Datenmengen ausgewertet. Dieses Thema ist sowohl für Grund- als auch für Leistungskurse geeignet und findet sich indirekt in vielen anderen Beiträgen wieder.

In dem Beitrag von Wilhelm Weiskirch „**Einführung in die Integralrechnung mit dem TI-92**“ werden unterschiedliche klassische und moderne Aspekte der Integralrechnung aufgezeigt. Ausgehend von der Volumenbestimmung einer Vase werden Wege zu den bisher eher selten angesprochenen Themenbereichen wie Oberflächen von Rotationskörpern dargestellt. Auch mögliche Irrwege werden in diesem Zusammenhang beleuchtet.

Der Beitrag von Markus Eberle und Ulrich Niehoff „**Vergleich numerischer Integrationsverfahren mit dem TI-92**“ schließt an den vorhergehenden Artikel direkt an. Die beiden Autoren beschäftigen sich mit der Frage, was von der Integralrechnung bleibt, wenn ein CAS die gebräuchliche Stammfunktion „auf Knopfdruck“ bestimmen kann. Was steckt eigentlich dahinter, dass der Rechner zwar nicht die Stammfunktion zu $f(x) = e^{-x^2}$ bestimmen kann, aber zu fest vorgegebenen Grenzen Werte für das bestimmte Integral berechnet. Die dahinter liegenden numerischen Verfahren werden hier vorgestellt und deren Realisierung auf dem TI-92 sehr ausführlich dokumentiert.

Die Bearbeitung der klassischen Aufgaben der Vektorrechnung und Linearen Algebra ist weitgehend obsolet, wenn CAS lineare Gleichungssysteme auf Knopfdruck lösen. Reimund Vehling zeigt in seinem Beitrag „**Wozu kann man Matrizen gebrauchen?**“ neue Aspekte in diesem Bereich sowohl für den Grundkurs als auch für den Leistungskurs auf. Die Vernetzung von Linearer Algebra, Stochastik und Analysis als wesentlicher Bestandteil von Schulmathematik wird in diesem Artikel besonders deutlich.

Das von mir bearbeitete Thema „**Splines**“ wurde bereits in den Empfehlungen für den Mathematikunterricht an Gymnasien als ein Aspekt zum Einsatz von Computeralgebrasystemen vorgestellt. In diesem Artikel werden ein Unterrichtsprojekt und weiterführende Aspekte für parametrisierte Kurven beschrieben. Dieses Projekt kann in alle Jahrgangsstufen des Sekundarbereichs II integriert werden. Es zeigt besonders deutlich auf, wie mit CAS-Modulen per Hand nicht mehr sinnvoll zu bearbeitende Probleme gelöst werden können und somit die Gedanken für inner- und außermathematische Zusammenhänge frei werden.

Im „**Anhang**“ stehen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der zentralen Fortbildungen, die durch ihre Mitarbeit in den Projekten die Realisierung dieses NLI-Bandes erst möglich gemacht haben. Ihnen sei an dieser Stelle besonders herzlich für ihre Mitarbeit gedankt.

Bedanken möchte ich mich auch bei allen Projektleitern, ohne deren engagierte Mitarbeit diese Fortbildungen nicht so erfolgreich gewesen wären. Mein besonderer Dank gilt hierbei Rainer Kühl, der mit mir zusammen die Kurse konzeptionell und inhaltlich geplant und durchgeführt hat.

Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen: Gedanken zu didaktischen Prinzipien, methodischen Folgerungen und neuen algebraischen Kompetenzen

Heiko Knechtel

*Mathematikunterricht ist wie ein Tanker.
So ein Tanker hat ein gewisses Beharrungsvermögen.
Jede Kurskorrektur braucht eine ganze Weile,
so leicht und schnell ändert sich da eben nichts.
Eben wie im Mathematikunterricht.*

Löding

Vorbemerkungen

Seit 1996 wird in verschiedenen niedersächsischen Gymnasien Mathematik im Kursunterricht mit Taschencomputern (TC) unterrichtet. Der Einsatz dieser Geräte wird überwiegend vollintegriert im fit¹-System durchgeführt, d.h. die Schülerinnen und Schüler können den TC jederzeit einsetzen, im Unterricht, zu Hause, in der Cafeteria, in der Klausur, im Abitur. Nur dadurch wird erreicht, dass die „Sonntagssituation“ des Unterrichts im Computerraum überwunden und der TC für Schülerinnen/Schüler und Lehrerinnen/Lehrer ein natürliches Werkzeug wird. Der Gedanke des natürlichen Werkzeugs impliziert, dass die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden müssen, wann und wie sie dieses Gerät einsetzen. Andere Versuche zum Einsatz von Computeralgebrasystemen auf Personalcomputern werden lokal seit vielen Jahren durchgeführt. Ein wesentliches Problem liegt in der Logistik, da der Unterricht immer an die PC-Räume der Schule gebunden ist. Hinzu kommen die noch nicht gelösten Probleme bei der Verwendung von PC-Systemen in Klausuren und im Abitur. Die nahe Zukunft wird entscheiden, ob sich eher kleine, portable oder große, vernetzte Systeme für den Mathematikunterricht durchsetzen werden. Unabhängig davon werden sich Computeralgebrasysteme in Ausbildung und Forschung weiter etablieren. Die Erfahrungen vieler Lehrkräfte mit dem Einsatz von TC im Mathematikunterricht können in folgenden Thesen zusammengefasst werden:

These 1

Die klassische Kurvendiskussion ist „tot“! An ihre Stelle kann z.B. das Anpassen von Funktionen an Datenmengen treten.

These 2

Mathematik kann realitätsnah unterrichtet werden.

These 3

An die Stelle von konvergenten Aufgaben treten divergente Probleme.

These 4

Symbolische „Fertigkeiten“ werden von symbolischen „Fähigkeiten“ verdrängt.

These 5

Bei vollintegriertem Einsatz von CAS tritt das Operieren in den Hintergrund, die Problem-

analyse, das Darstellen und Interpretieren dagegen in den Vordergrund.

These 6

Neben algebraischen Kompetenzen müssen die Schülerinnen und Schüler auch die Kompetenz erwerben, einen Computer effektiv für die Problemlösung einzusetzen.

¹ fit = fully integrated technology (H.Knechtel).

Didaktische Prinzipien

Beim Einsatz von CAS muss sich der Unterricht teilweise an neuen didaktischen Prinzipien orientieren. Dies muss bei der Planung und Durchführung von Unterricht sorgfältig beachtet werden. Im Wesentlichen lassen sich folgende didaktische Prinzipien angeben:

The-Rule-Of-The-Three

Jedes mathematische Problem kann graphisch, numerisch und analytisch betrachtet und gelöst werden. Die drei Betrachtungsweisen stehen gleichberechtigt nebeneinander. Das Primat der analytischen Lösung ist nur in einigen Ausnahmefällen wirksam, da sich nur wenige Probleme durch mathematische Funktionen vollständig modellieren lassen. Ziel ist es, eine Synthese der drei Betrachtungsebenen im Sinne der Heuristik und Problemlösung zu erreichen.

White-Box-Black-Box-Prinzip (nach *Buchberger* 1989)

In der ersten Phase der Auseinandersetzung mit einem neuen Problem, Begriff oder Verfahren wird dieses rechnerfrei so lange erforscht und geübt, bis es für die Schülerinnen und Schüler transparent geworden ist. In dieser White-Box-Phase wird der Rechner bzw. werden die teilweise sehr kompakten Module des Rechners nicht genutzt. Nach einer entsprechenden Vertiefungsphase wird der Rechner im Sinne einer Black-Box als kompaktes Werkzeug genutzt. Hierbei sind unterschiedliche Akzentuierungen der White-Box im Sinne von rein heuristischen Vorstellungen eines Begriffes bis hin zur Erarbeitung von präzisen Definitionen und Regeln möglich. Als Problem hat sich erwiesen, dass gerade schwächere Schülerinnen/Schüler nach Abschluss der White-Box-Phase viele Module des Rechners nur noch als Black-Box anwenden.

Black-Box-White-Box-Prinzip (nach *Buchberger* 1989)

Insbesondere im Zusammenhang mit Vorschlägen zur experimentellen Erforschung der Mathematik wird dieses Prinzip häufig angewendet. Die Phasen sind nicht scharf getrennt, sondern sie fließen teilweise ineinander. Anhand verschiedener Eingaben sollen die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung bestimmter Befehle und damit dahinterstehende mathematische Begriffe und Regeln erkennen. Weniger die Erarbeitung eines bestimmten Begriffes als vielmehr die Erzeugung einer „Forschungshaltung“ wird hier bewusst gefördert: Aufstellen einer Vermutung – Überprüfung, Modifikation der Vermutung - neuerliche Überprüfung - ...

Modul-Prinzip

Der Modulgedanke ist eine fundamentale Idee der Informatik, die von den CAS übernommen wurde. Unter Modularität versteht man, grob gesprochen, die Anwendung des Baukastenprinzips bei Problemlöseprozessen. Module kann man als Wissenseinheiten auffassen, in denen komplexes Wissen komprimiert wird und in denen Operationen durch diese Kapselung als Ganzes abrufbar und einsetzbar werden. Module haben kognitive Entlastungsfunktion, sie tragen zur Reduktion der Komplexität bei, indem sie Abläufe, Tätigkeiten, komplexes Wissen als Einheit handhabbar machen.²

Prinzip der Förderung der Übersetzungsqualifikationen

Bei den Tätigkeiten „Problemanalyse – Darstellen - Operieren - Interpretieren“ dominierte bislang das Operieren. Da das Operieren weitgehend dem CAS übertragen werden kann, werden die Freiräume für die Problemanalyse, das Darstellen und Interpretieren genutzt. Dieses wird durch veränderte divergente Aufgaben verstärkt. Die Grenzen der Möglichkeiten beim Operieren wurden bisher auch als Grenzen des im Mathematikunterricht Machbaren angesehen. Durch die Übertragung dieser Tätigkeiten an den Rechner haben Ziele wie Problemanalyse, Darstellen und Interpretieren aber deutlich an Eigenständigkeit gewonnen. Die Befürchtung, dass durch den Wegfall oder durch die Reduktion des Operierens schwächeren Schülerinnen/Schülern die Möglichkeit genommen wird, durch Reproduktion wenigstens einen teilweise positiven Abschluss in Mathematik zu erreichen, hat sich bisher so nicht erfüllt. Dies liegt insbesondere auch daran, dass die Reproduktionsleistung

² Kronfellner, M.: „Analysisunterricht: Quo vadis?“ *Derive Days*, Düsseldorf 1995.

gen in anderer Form (Beschreibung von Verfahren, von einfach zu erzeugenden Graphen, ...) wie bisher gefordert werden.

Methodische Folgerungen

Aus den didaktischen Prinzipien lassen sich bei vollintegriertem Einsatz von CAS folgende methodische Aspekte ableiten:

- Schülerinnen und Schüler können selbständiger arbeiten, da sie die Arbeitsmethoden weitgehend selbst bestimmen können.
- Schülerinnen und Schüler können ohne Angst, in Termumformungen „stecken zu bleiben“, komplexere Problemstellungen eigenständig untersuchen.
- Schülerinnen und Schüler können Probleme experimentell lösen, da sie jederzeit ein entsprechendes Werkzeug zur Verfügung haben.
- Schülerinnen und Schüler können im Sinne von problemorientiertem Unterricht Problemstellungen selbständig variieren.
- Schülerinnen und Schüler können auch umfangreiche reale Daten selbständig untersuchen.
- Lehrerzentrierter Unterricht wird von schülerorientiertem Unterricht und Gruppenarbeit teilweise verdrängt.

Neue algebraische Kompetenzen

Bedingt durch die Reduktion des händischen algebraischen Operierens müssen sich auch die algebraischen Kompetenzen verändern. Aus den Ergebnissen des österreichischen Unterrichtsprojektes zum Einsatz des TI-92³ hat *Helmut Heuge*⁴ folgende „neue“ Kompetenzen bei Einsatz von CAS aufgezeigt:

1. Die Kompetenz, Terme oder Formeln zu finden.
 - Das CAS erlaubt es der Schülerin/dem Schüler, seine „Wort-Formeln“ direkt in ein symbolisches Objekt der mathematischen Sprache zu übersetzen, indem er Variablen, Terme, Funktionen oder Programme definiert.
 - Das CAS erlaubt, eine wesentlich größere Vielfalt und Streuung der entsprechenden Prototypen von Formeln zu bearbeiten. Es bietet dadurch auch die Behandlung von Elementen an, die bisher nicht beachtet wurden. Während im klassischen Mathematikunterricht von einem Prototyp meist nur eine Formel untersucht wurde, ist jetzt eine entsprechende Variation leicht möglich. Durch die Window-Shuttle-Technik kann man darüber hinaus die Variationen auch leicht miteinander vergleichen.
 - Das CAS erlaubt eine wesentlich größere Vielfalt der Teststrategien, der Verifizierung. Dies beinhaltet auch, ob die Formel mathematisch korrekt und angemessen ist.
2. Die Kompetenz, Termstrukturen und die Äquivalenz von Termen zu erkennen.
 - Die Eingabe eines Termes verlangt von der Schülerin/dem Schüler ein umfassendes Verständnis seiner Struktur.
 - Zum sinnvollen Einsatz des CAS als Black-Box muss die Schülerin/der Schüler schon eine Idee haben, wie der Term umgeformt werden kann. Der blinde Gebrauch der Befehle FACTOR oder EXPAND hilft selten weiter.
 - Die Schülerin/Der Schüler muss Ergebnisse, die er nicht selbst produziert hat, durch Erkennen der Termstruktur interpretieren.
 - Unterschiedliche Ergebnisse einer experimentellen Phase müssen verglichen und auf Gemeinsamkeiten untersucht werden.

³ Evaluation zur Erprobung des TI-92 im Mathematikunterricht an allgemeinbildenden höheren Schulen, ZSE Report, Graz Juni 1999.

⁴ The necessary fundamental algebraic competence in the age of Computer Algebra Systems, ACDCA Tagung, Gössing August 1999.

- CAS erzeugt manchmal unerwartete Ergebnisse, mit denen Schülerinnen und Schüler umgehen müssen. Zur Interpretation müssen sie die Termstruktur sinnvoll analysieren können.
3. Die Kompetenz, zu testen.
- CAS ermöglicht es der Schülerin/dem Schüler, effektiver und schneller ihre/seine Lösungen und Strategien zu testen.
 - Durch die Vernetzung von algebraischen und graphischen Lösemethoden ergeben sich auch neue Testmöglichkeiten.
 - Der Einsatz von CAS beinhaltet auch neue Probleme: Die Schülerin/Der Schüler muss Ergebnisse überprüfen, die sie/er nicht selbst erzeugt hat. Die Vorstellung von der Form der Lösung ist bei Schülerin/Schüler und Rechner manchmal unterschiedlich.
 - Die Anzahl der unterschiedlichen Wege, die zur Lösung eines Problems führen, und damit die Anzahl der unterschiedlichen Resultate steigt dramatisch an. Deshalb muss die Äquivalenz der vielfältigen Lösungen getestet werden.
 - Je mehr Anwendungsprobleme bearbeitet werden, um so mehr muss die Modellbildung, die Sinnhaftigkeit der mathematischen Lösung bzgl. des Problems und der Einfluss der Parameter getestet werden.
4. Die Kompetenz, elementare Rechnungen auszuführen.
- Der Übergang von reinen Rechenfertigkeiten hin zu konzeptionellem Verständnis.
 - Der Wandel vom Tun zum Planen.
 - Die Reduktion der Komplexität manueller Rechnungen.
 - Der Wandel von Rechenkompetenz zu algebraischer Kompetenz, wie z.B. Strukturerkennungskompetenz oder Testkompetenz.
 - Ein besserer Zusammenhang zwischen formalen und inhaltlichen Aspekten.
5. Die Kompetenz der Visualisierung.
- CAS erlaubt es dem Benutzer, Graphen schneller und direkter zu erhalten.
 - CAS erlaubt es dem Benutzer, andere Repräsentationsebenen (Graph, Tabelle, Vektoren, Listen, algebraische Untersuchungen) einfacher aufzurufen und miteinander zu vernetzen.
 - Die parallele Verarbeitung bietet mehr Möglichkeiten der Visualisierung. Z.B. kann ein Term sowohl algebraisch oder durch den Befehl GRAPH graphisch visualisiert werden.
 - Die Window-Shuttle-Technik unterstützt die Parallelverarbeitung.
 - Algebraische Probleme können auch numerisch und/oder graphisch behandelt werden.
6. Die Kompetenz, mit Modulen zu arbeiten.
- Computer und speziell CAS eröffnen eine völlig neue Dimension des modularen Denkens und Handelns. Durch Definition und Speicherung von Teilen einer komplexen Formel als Variable können die Schülerinnen und Schüler viel eher die Struktur erkennen und untersuchen. Durch die Modultechnik werden komplexe Ausdrücke vereinfacht und erlauben das weitere Arbeiten damit.
 - Insbesondere das kleine Display von Taschencomputern fordert das Arbeiten mit Modulen geradezu heraus. Nur durch Einführung entsprechender Module können umfangreiche Terme vollständig auf dem Bildschirm dargestellt werden.
7. Die Kompetenz, ein CAS sinnvoll zu nutzen.
- Der Einsatz von CAS beinhaltet neue Anforderungen für die Schülerinnen und Schüler. Die Benutzung von elektronischen Tools erfordert Rechnerfertigkeiten, die wie Rechenfertigkeiten geübt werden müssen.
 - In den Untersuchungen ist deutlich geworden, dass Spaß und Interesse an neuen Problemstellungen bei Schülerinnen und Schülern mit hoher Gerätesicherheit signifikant
 - ~~Deutlicher~~ Unterschied von Einsatz und Akzeptanz des TC zwischen Jungen und Mädchen ist deutlich. In beiden Gruppen war ein Anstieg bzgl. der Motivation zu erkennen, bei den Jungen aber signifikant höher. Mädchen gaben häufiger an, Schwierigkeiten im Umgang mit Rechnern zu haben.

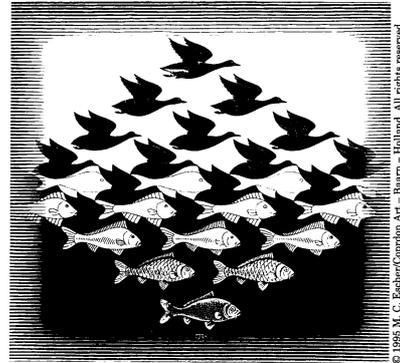
- Die Einführung in das Handling des Gerätes muss „häppchenweise“ erfolgen. Üben und Wiederholen von Fertigkeiten muss eingeplant werden.
- Die Nutzung des CAS als Black-Box erfordert ein hohes Maß an Dokumentation der Problemlösung. Dies muss mit den Schülern rechtzeitig vereinbart werden.

**Wenn so ein Tanker erst einmal in Fahrt gekommen ist,
dann kann ihn so schnell nichts mehr aufhalten.
Heiko Knechtel, Bückebug 2000**

Einführung in die Differenzialrechnung - Von Änderungsraten zum Differenzialquotienten

Leitung des Workshops und Endredaktion: *Ulf-Hermann Krüger*

*„Dass es anders werden muss,
wenn es besser werden soll – das weiß ich.
Aber ob es besser wird,
wenn es anders wird – das weiß ich nicht.“*
Lichtenberg



Überblick

Während des gesamten Unterrichts hatten die Schülerinnen und Schüler den TI-92 zur Verfügung. Dieser Vorschlag gliedert den Unterrichtsgang zur Einführung der Differenzialrechnung in Klasse 11 in vier Phasen:

- Phase 1:** Erfahrungen mit Änderungsraten anhand von Realdaten
- Phase 2:** Entdeckung von Ableitungsregeln bei ganzrationalen Funktionen
- Phase 3:** Anwendung der Entdeckung in Extremwertproblemen
- Phase 4:** Formalisierung der Entdeckung im Differenzialquotienten

Jedem ist intuitiv klar, dass Straßen in allen Punkten eine Steigung haben. Aber: Wie wird die Steigung in einem Punkt bestimmt?

Reales Datenmaterial soll hier zu einer Lösung beitragen: Aus einer topographischen Karte werden eine Tabelle für Kartenentfernung und die jeweilige Höhe extrahiert. Hieraus ergibt sich (z.B. als PLOT der Tabelle mithilfe des TI-92) die Profilkurve eines Berges längs der Straße. Unter Ausnutzung der Möglichkeiten des Rechners im „Data/Matrix-Editor“ können Durchschnittssteigungen berechnet werden. Aus der graphischen Darstellung der Profilkurve und der Steigungswerte sollte sich die Idee einer Steigungsfunktion ergeben. Profil und Steigung sind dabei einander zugeordnet. Anhand vieler weiterer Beispiele wird dann der Begriff der Steigung auf Änderungsraten anderer Größen erweitert. Die Schülerinnen und Schüler können hierzu die Daten (in Hausaufgaben) selbst sammeln.

Der Vorschlag ist erst nach dieser langen Phase der Begriffsbildung an Beispielen aus der Anwendung zur rein mathematischen Betrachtung ganzrationaler Funktionen und ihrer Ableitungsfunktionen überzugehen.

Zur Bestimmung der Steigung einer Funktion in einem Punkt sollen wieder die Möglichkeiten des Rechners ausgenutzt werden (Zeichnen der Tangente als black box). Entsprechend der Möglichkeiten des TI-92 können dabei mithilfe des Regressionsmoduls ganzrationale Funktionen bis zum Grad 4 bestimmt und untersucht werden (vgl. hierzu auch das Kapitel zur „Regression“ in diesem Band).

Es wird dabei gerade intendiert und nicht nur geduldet, dass die Schülerinnen und Schüler aus diesen Beispielen Regeln zur Berechnung der Terme von Ableitungsfunktionen vermuten, ohne dass der Differenzialquotient bislang eingeführt wurde.

Diese Vermutungen sollen nach ihrer Festigung an mehreren Beispielen in einer dritten Phase des Unterrichts zur Behandlung von Extremwertproblemen angewendet werden. Die Probleme können durch ganzrationale Funktionen modelliert werden.

Nachdem den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeiten, die sich aus der Definition einer Steigungsfunktion ergeben, deutlich geworden sind, soll erst jetzt zur vierten Phase übergegangen werden. Den Anlass bietet die Mathematisierung eines Beispiels, bei dem die oben entwickelten Regeln nicht ausreichen, da die Funktion nicht ganzrational ist. Hier müsste der oben erarbeitete Steigungsbegriff erneut problematisiert und dann formalisiert werden. Lässt sich dann für die neue Funktion mit Hilfe des Differenzialquotienten eine „Ableitungsregel“ entwickeln, so bietet sich im Nachhinein die Möglichkeit, die oben vermuteten Regeln zu beweisen.

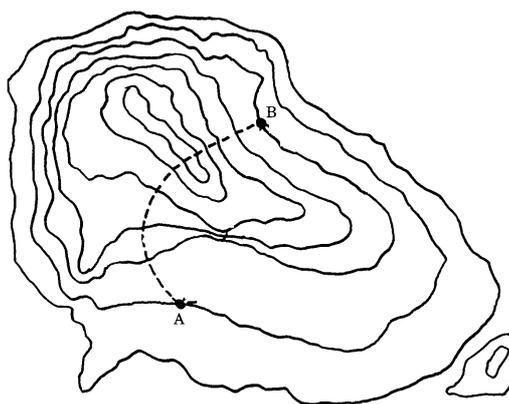
Phase 1: Erfahrungen mit Änderungsraten anhand von Realdaten

1. Beispiel: Profilkurve und Steigungsverlauf eines Weges über den Deister

Um die folgende Aufgabe bearbeiten zu können, ist die Beschaffung einer topographischen Karte notwendig. Die Schülerinnen und Schüler sollen je eine Kopie der Karte erhalten und die Aufgabe in Form einer Gruppenarbeit gegebenenfalls auch arbeitsteilig bearbeiten.

► Ihnen liegt eine topographische Karte im Maßstab 1:25 000 vor, in der der Verlauf eines Weges über den Deister eingetragen ist. Entnehmen Sie der Karte an den Schnittpunkten der Höhenlinien (Abstand: 5 m) mit der ausgewählten Straße die Höhe und die Entfernung vom Startpunkt. Wählen Sie unterschiedliche Abstände der Höhenlinien in verschiedenen Gruppen.

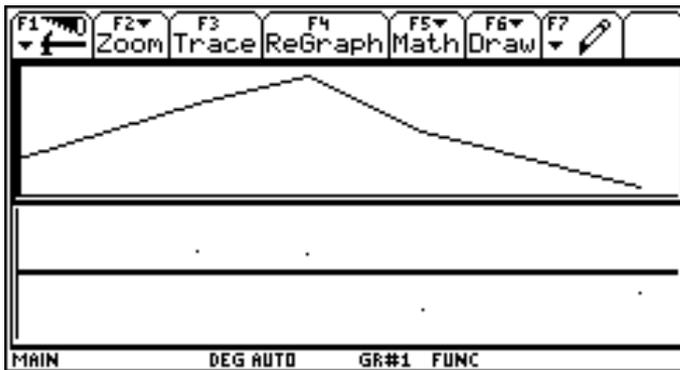
Bestimmen Sie die Steigungen in den Gruppen arbeitsteilig.



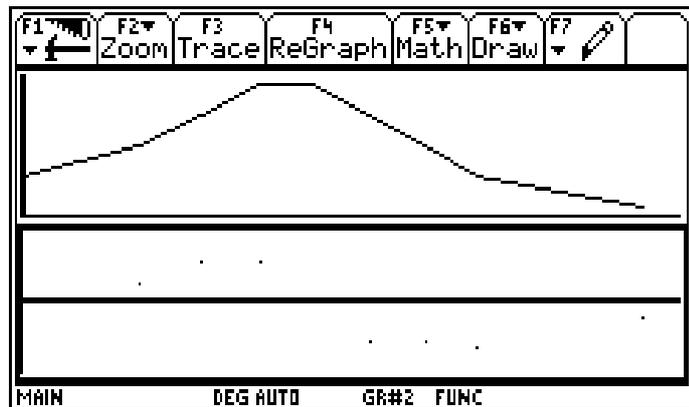
Die Berechnung dieser Durchschnittssteigungen kann im „Data/Matrix - Editor“ unter Verwendung der Operation „shift“ geschehen. Dieser Befehl verschiebt Zelleneinträge in der Liste nach oben oder unten. Sind z.B. in der Spalte c1 die Entfernungen und in der Spalte c2 die Höhen aufgeführt, so liefert $c3 = (\text{shift}(c2) - c2) / (\text{shift}(c1) - c1)$ die gewünschte Steigung. Eine Darstellung sowohl der Profilkurve als auch der Durchschnittssteigungen als PLOTs (evtl. auch mithilfe von Tabellenkalkulation möglich) sollte folgen.

Diskussion der Ergebnisse: Auswirkung der Verfeinerung der Höhenlinien auf die Steigungswerte, evtl. schon hinführend zum Begriff der Tangente einer beliebigen Kurve (statt nur eines Kreises), Idee der Steigungsfunktion einer Funktion.

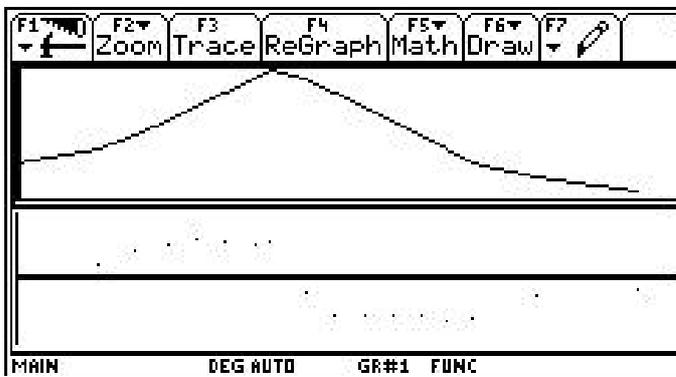
Die folgenden Bilder zeigen den Prozess. Im jeweils waagrecht geteilten Bildschirm sind für die gewählte Höhendifferenz oben jeweils der PLOT der Entfernung - Höhen - Tabelle und unten der zugehörige PLOT der Steigungen dargestellt.



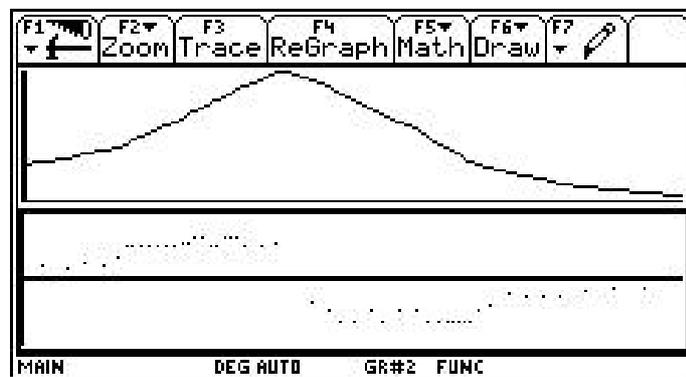
Höhendifferenz 80 m



Höhendifferenz 40 m



Höhendifferenz 20 m



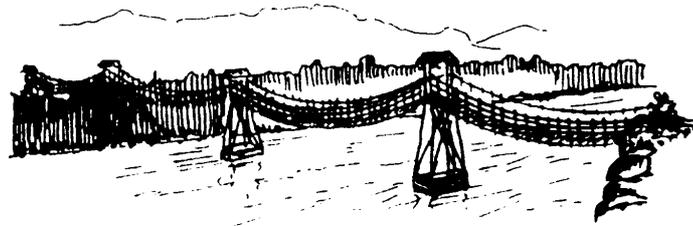
Höhendifferenz 5 m

2. Beispiel: Straßen- und Brückenbau

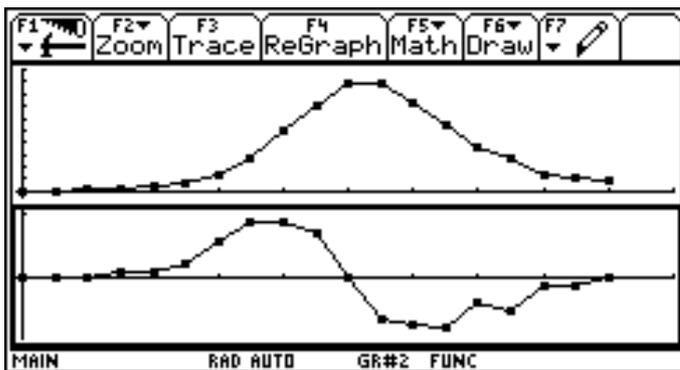
Bei den Straßenbauämtern existieren die Baupläne z.B. für Brücken und Unterführungen. Den zugehörigen Höhenplänen können (nahezu) beliebig genaue Daten über Entfernung und Höhen entnommen werden. Wieder können Profil- und Steigungskurven nach obigem Muster erstellt und gezeichnet werden. Die Güte der Kurven steigt mit wachsender Verfeinerung.

- Ihnen liegt der Höhenplan eines Brückenbauwerks vor. Entnehmen Sie die Höhen und die zugehörigen Entfernungen vom Startpunkt. Erstellen Sie Profil- und Steigungskurven des Bauwerks in den Gruppen arbeitsteilig.

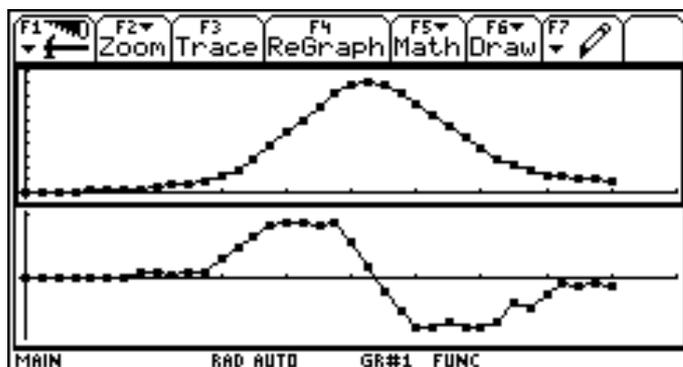
Beurteilen Sie die Güte ihrer Arbeit.



Die Bilder unten zeigen Schnitte durch ein Brückenbauwerk. Die PLOTS wurden mit Hilfe der Daten eines Höhenplanes für verschiedene Schrittweiten erstellt. Der Bildschirm wurde jeweils horizontal geteilt, so dass darunter jeweils die Steigungskurven wiedergegeben sind.



Entfernungsdifferenz 50 m



Entfernungsdifferenz 25 m

Weitere Ideen zur Umsetzung können den im Anhang abgedruckten Folien entnommen werden.

3. Beispiel: Temperaturabnahme in einer Teetasse

Die Datenaufnahme der Werte mithilfe ausgeliehener Thermometer, das Einlesen in den Rechner, Berechnen und Darstellen der verschiedenen Steigungen zu verschiedenen Zeitpunkten, evtl. wieder Untersuchen des Einflusses einer feineren Unterteilung können als Hausaufgabe erledigt werden. (Die Datenaufnahme kann mithilfe des CBL von Texas Instruments auch automatisiert werden. Das **Calculator – Based – Laboratory** stellt in Verbindung mit dem TI-92 einen computerunterstützten Messwertaufnehmer dar.) Für den Unterricht bleibt die Erweiterung der Bedeutung der „Steigung“ vom anschaulichen Begriff auf die einer Änderungsrate, hier der Temperatur.



Auch in diesem Beispiel kann zwecks weiterer Verfeinerung ein Funktionsterm mithilfe einer Regressionsrechnung zur Darstellung des aufgenommenen Temperaturverlaufs ermittelt werden. (In diesem experimentellen Stadium sollte nicht stören, dass in diesem Fall die exponentielle Regression keine gute Näherung bietet, da diese die Temperaturabnahme schlecht modelliert!)

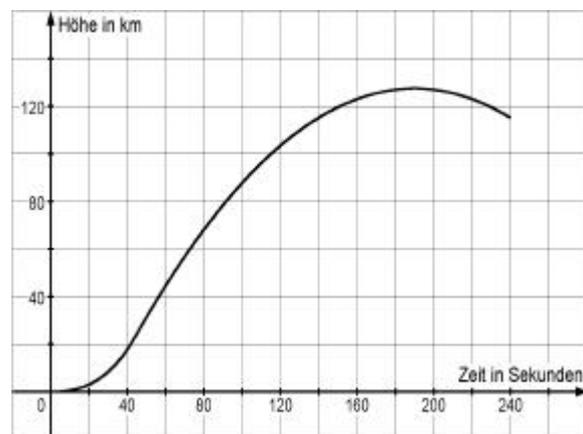
Wieder können punktweise die Steigungen der Tangenten an den Graphen der Regressionsfunktion bestimmt werden. Eine Übertragung der Tangentensteigungen in eine Tabelle und deren graphische Darstellung als PLOT können wegen der genannten Modellproblematik hier jedoch nicht zur experimentellen Bestimmung eines Funktionsterms der Ableitungsfunktion führen.

4. Beispiel: Flug einer Rakete (nach Lit. [1], S. 12)

► Höhenforschungsraketen haben die Aufgabe, Nutzlasten auf einer senkrechten Abschussbahn kurzzeitig in die Hochatmosphäre zu befördern. Im Gegensatz zu Satelliten-Trägerraketen, die nach einer gewissen Flugzeit in eine Umlaufbahn einschwenken, kehren Höhenforschungsraketen wieder fast an ihren Ursprungsort zurück.

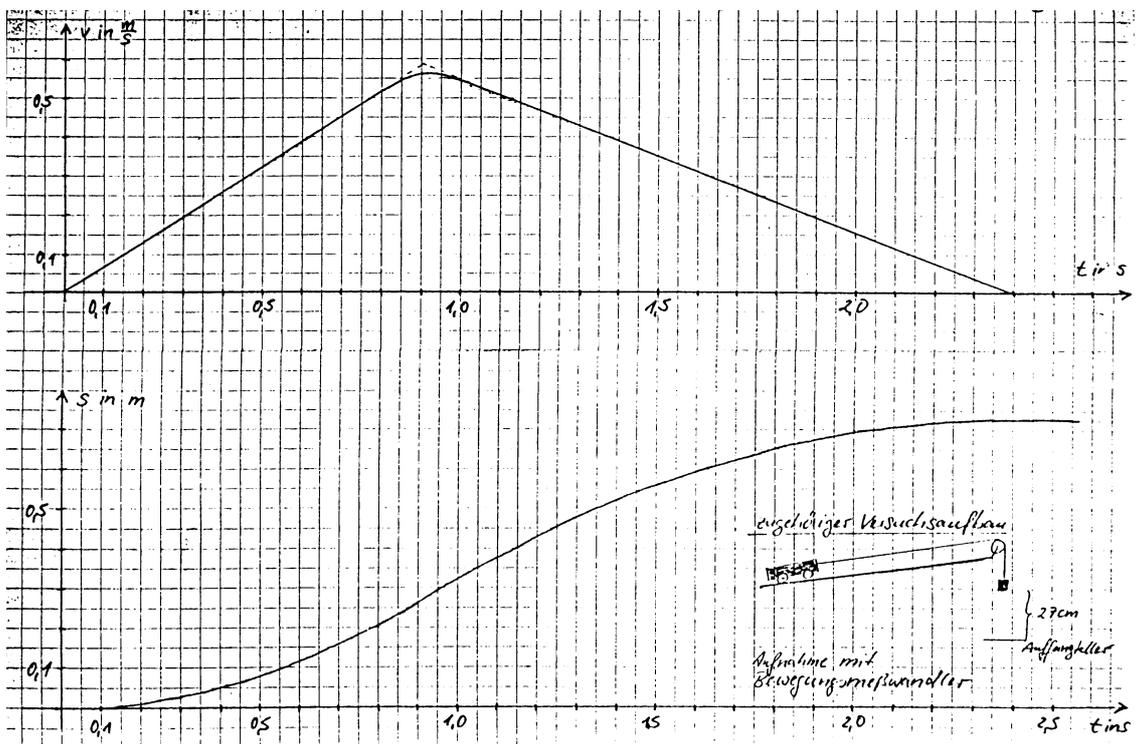
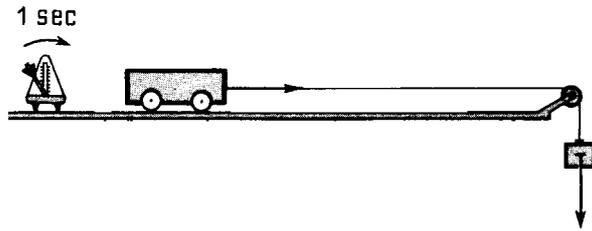
In der Graphik rechts ist der Flug einer solchen Rakete im Zeitraum von 0 bis 240 Sekunden nach dem Start dargestellt. Untersuchen Sie die Flugdaten der Rakete.

In dieser Aufgabe ist die Steigung des Höhen - Zeit - Graphen als Geschwindigkeit zu interpretieren.



5. Beispiel: Weg – Zeit - und Geschwindigkeits – Zeit – Graphen

In Zusammenarbeit mit dem Physikunterricht können Weg – Zeit - und Geschwindigkeits – Zeit – Graphen zur beschleunigten Bewegung eines Wagens aufgezeichnet werden. Es ergibt sich der dargestellte Graph, wenn das Beschleunigungsgewicht nach Zurücklegen einer bestimmten Strecke auf einen Teller aufsetzt. Auch in diesen Aufgaben könnten die PLOTS der Graphen durch passende Regressionen zu Funktionsgraphen ergänzt werden.



6. Beispiel: Datenmaterial aus dem Internet



Im Internet findet sich unter der Adresse

<http://www.census.gov/ipc/www/worldpop.html>

anhand der „World Pop Clock“ oder (unter anderer Adresse) zu Börsenkursen aktuelles Datenmaterial, welches zur Datenanalyse einlädt.

Es stellt sich hier jedoch das grundsätzliche Problem, dass es sich dabei um diskrete Vorgänge handelt.

Für die Weltbevölkerung steht folgendes Datenmaterial (nach Lit. [4], S. 56 ff) zur Verfügung:

Jahr	Bevölkerung in Mrd.
1650	0,545
1750	0,791
1800	0,978
1850	1,262
1900	1,55
1910	1,686
1920	1,811
1930	2,07
1940	2,295

Jahr	Bevölkerung in Mrd.
1950	2,516
1955	2,752
1960	3,019
1965	3,336
1966	3,356
1968	3,483
1970	3,698
1972	3,782
1974	3,89

Jahr	Bevölkerung in Mrd.
1976	4,099
1978	4,258
1980	4,448
1982	4,607
1984	4,763
1986	4,936
1988	5,111
1990	5,292
1992	5,48
1994	5,66

- 1. Schritt: Eingabe der Daten in den Data/Matrix - Editor

[APPS]
 6: Data/Matrix - Editor
 []
 3: New...
 [Enter]
 Type: Data
 Folder: main
 Variable: weltbevo
 [Enter]

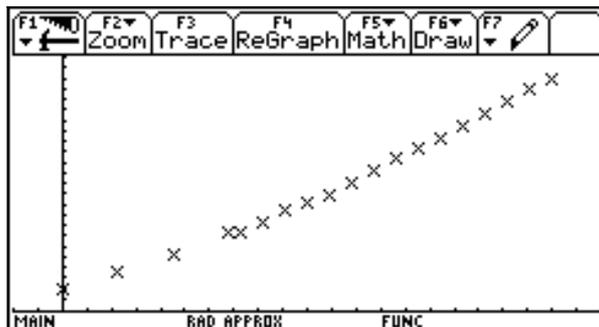
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	t	Bevoelkt	t	2. Grad		
	c1	c2	c3	c4		
1	0.	2.516	0.	.0451		
2	5.	2.752	10.	.0574		
3	10.	3.019	20.	.0697		
4	15.	3.336	30.	.082		
5	16.	3.356	40.	.0943		
6	18.	3.483	70.	.1311		
7	20.	3.698	100.	.168		
c1=						
MAIN	RAD	APPROX	FUNC			

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	t	Bevoelkt	t	2. Grad		
	c1	c2	c3	c4		
15	36.	4.936				
16	38.	5.111				
17	40.	5.292				
18	42.	5.48				
19	44.	5.66				
20						
21						
r21c1=						
MAIN	RAD	APPROX	FUNC			

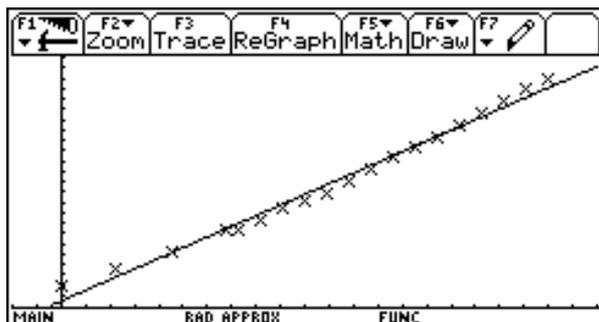
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	t	Bevoelkt	t	2. Grad		
	c1	c2	c3	c4		
8	22.	3.782				
9	24.	3.89				
10	26.	4.099				
11	28.	4.258				
12	30.	4.448				
13	32.	4.607				
14	34.	4.763				
r14c1=34.						
MAIN	RAD	APPROX	FUNC			

Es wurden nur die Daten ab 1950 verwendet: 1950 entspricht t = 0. Relevant sind hier nur die Spalten c1 und c2, die Spalten c3 und c4 werden später eingegeben, siehe unten (4. Schritt).

- 2. Schritt:
Über F2 Plot definieren und anzeigen lassen.

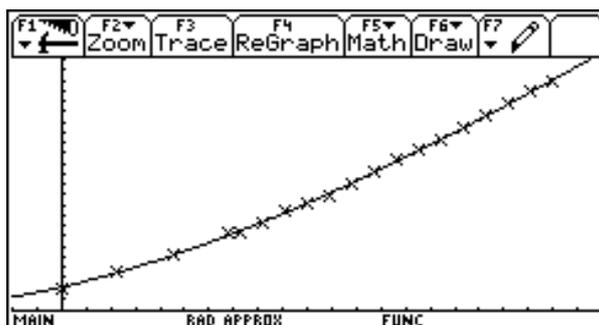


- 3. Schritt:
Ermittlung verschiedener Regressionen ausgehend vom Data/Matrix-Bildschirm
[F5] [\blacktriangleright] 5: LinReg
(oder 9: QuadReg
oder 3: CubicReg
oder A: QuartReg)
auswählen.

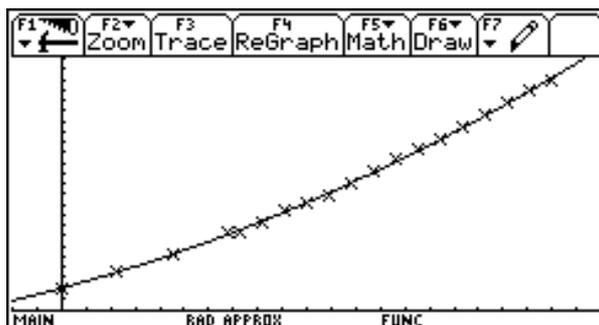


lineare Regression

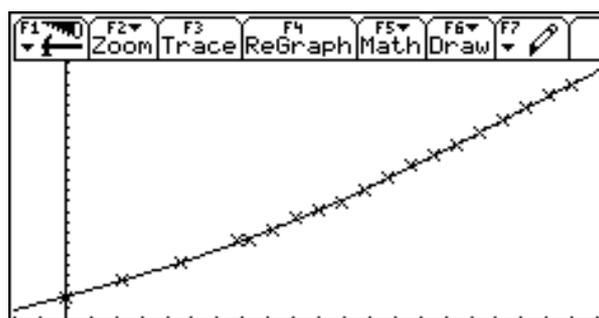
- Für x c1, für y c2 notieren und als y1(x) speichern. [Enter]
Die Gleichung der Regressionsfunktion wird angezeigt, muss bestätigt werden und ist anschließend über den y=Editor wieder abrufbar.
Graphische Darstellung der Regressionsfunktionen (optimale Darstellung über ZOOM 9: ZoomData).



kubische Regression



quadratische Regression



Regression 4.Grades

● 4. Schritt:

Tangenten an Regressionsgraphen anlegen für $t = 0, 10, 20, 30, 40$ und Steigung aus angezeigten Tangentengleichungen ablesen, auf Zettel notieren und anschließend Zeiten und Steigungen im Data/ Matrix-Editor in den Spalten c3 und c4 eingeben.

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	t	2.Grad	3.Grad	4.Grad			
	c3	c4	c5	c6			
1	0.	.0451	.0394	.0459			
2	10.	.0574	.0568	.0556			
3	20.	.0697	.0712	.0705			
4	30.	.082	.0827	.084			
5	40.	.0943	.0912	.0895			
6	70.	.1311	.0989	.0063			
7	100.	.168	.0799	-.4079			

c6=

MAIN RAD APPROX FUNC

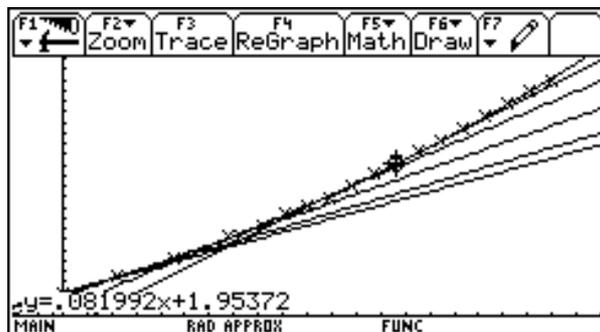
In den Spalten c5 und c6 sind die ermittelten Steigungen für die Regressionen 3. und 4. Grades eingetragen.

Ausgehend vom Graph-Bildschirm:

[F5]

A: Tangent

at? : 0 (bzw. 10, 20, 30, 40, 70, 100 ..) eingeben. (Dazu muss im Window - Editor xmax auf 100 erhöht werden.)

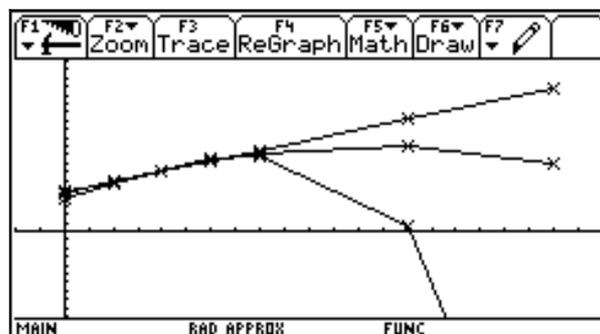


Die Steigungen für $t = 70$ und $t = 100$ stellen die Prognosen für die Wachstumsgeschwindigkeit für die Jahre 2020 und 2050 dar.

● 5. Schritt:

Darstellung der Steigungsgraphen.

(Plots über F2 definieren, alle anderen Plots müssen deaktiviert werden, ggfs. im Y=-Editor).

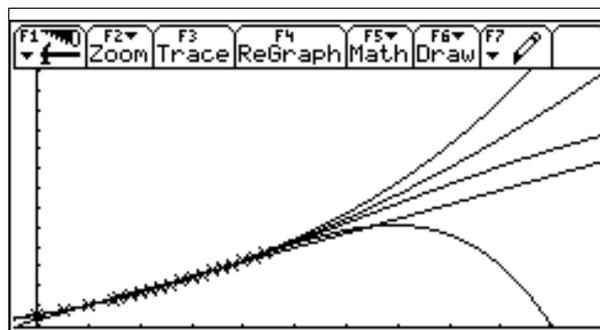


Die völlig unterschiedliche Entwicklung der Wachstumsgeschwindigkeiten wird deutlich.

● 6. Schritt:

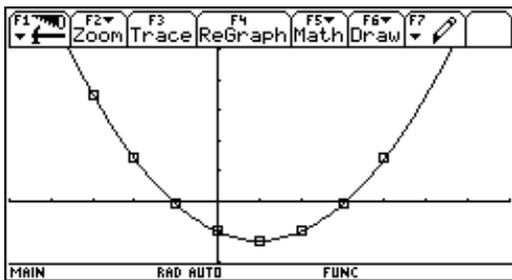
Betrachtung der weiteren Entwicklung der Weltbevölkerung in Abhängigkeit von der gewählten Regression (bis 2050).

(Hier wurde zusätzlich noch die exponentielle Regression gezeichnet.)



von oben nach unten:

exponentielle Regression, quadratische Regression, kubische Regression, lineare Regression, Regression 4. Grades



Möglicherweise wird schon hier die Ableitungsregel für ganzrationale Funktionen vermutet.

Nach der Bearbeitung von weiteren Beispielen ganz-rationaler Funktionen (höchstens 5.Grades, da die Regressionsgleichungen des Rechners auf Funktionen 4.Grades beschränkt sind) sollte diese Regel für die Schülerinnen und Schüler nahe liegen.

2. Aufgabe: Anschaffung eines Rasenmähers

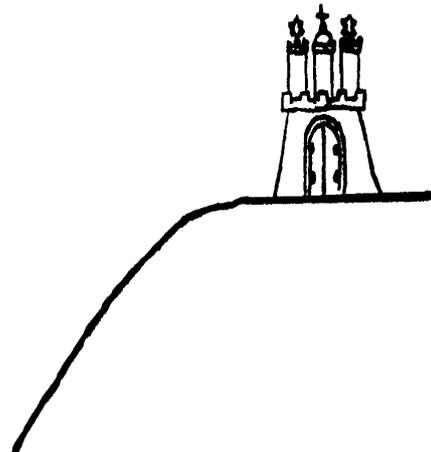
- Das Profil des Gartens einer am Hang gelegenen Villa ist durch den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -0,00002 x^3 + 0,006 x^2 - 0,1 x$; $-30 < x < 200$; $[x, f(x)$ in m] gegeben.

Der Besitzer muss sich einen neuen Rasentraktor zulegen und findet zwei Geräte zur Auswahl:

Gerät A:
maximale Steigfähigkeit 40 %;
Preis 6500 DM

Gerät B:
maximale Steigfähigkeit 50 %;
Preis 9000 DM

Für welches Gerät soll sich der (geizige) Besitzer entscheiden?



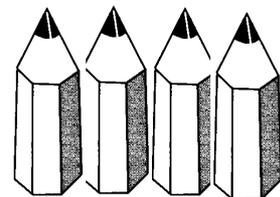
Phase 3: Anwendung der Entdeckung in Extremwertproblemen

Die in Phase 2 gewonnene, noch unbestätigte Vermutung soll jetzt durch den Einsatz in weiteren Anwendungszusammenhängen getestet werden. Aus der Fülle der Möglichkeiten seien hier zwei Beispiele exemplarisch dargestellt.

1. Aufgabe: Gewinnerwartung eines Unternehmens (nach Lit. [2], S. 172 f)

x	0	2	4	8
K(x)	32	96	112	384

- Ein Unternehmen stellt Bleistifte her. Dabei werden oben stehende Kosten ermittelt (Mengeinheit 1000 Stück, Kosteneinheit 1 DM). Die Bleistifte werden für 50 DM pro Mengeinheit verkauft. Untersuchen Sie die Gewinnerwartung des Unternehmens.



Ideen zur Lösung

- a) Definieren einer ganzrationalen Funktion 3.Grades für die Kostenfunktion ($K(x) = 2x^3 - 18x^2 + 60x + 32$).

- b) Ermitteln der Gewinnzone mit Hilfe der Gewinnfunktion
 $(G(x) = 50x - K(x))$.
 Dabei können die Nullstellen der Funktion graphisch oder numerisch mithilfe des Rechners bestimmt werden ($x_1 \approx 1,9$; $x_2 \approx 8,1$; $x_3 \approx -1,04$); ein Fixpunktverfahren konvergiert nicht.
Hinweis: Es bietet sich auch die Möglichkeit, hier oder später das Newton-Verfahren einzuführen, um damit eine weitere sinnvolle Anwendungsmöglichkeit der Ableitungsfunktion zu haben.
- c) Bestimmen des maximalen Gewinns ($x \approx 5,7$ maximaler Gewinn; $x \approx 0,29$ maximaler Verlust)

2. Aufgabe: Konstruktion einer Schachtel



- Aus einem Stück DIN A 4 Papier soll eine besondere Schachtel geformt werden. Wie?

Denkbar wären an dieser Stelle auch noch Aufgaben zur Funktionsbestimmung aus vorgegebenen Bedingungen.

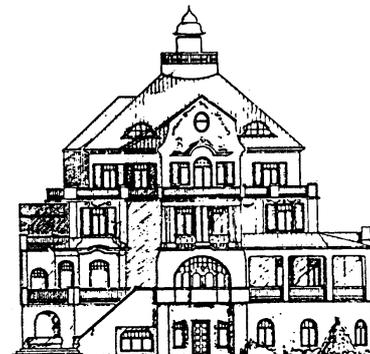
Phase 4: Formalisierung der Entdeckung im Differenzialquotienten

1. Aufgabe: Gestalt eines Rundbogenfensters (nach Lit. [1], S. 10; vgl. auch Lit. [3], S. 175)

- In einem gut erhaltenen Altstadtkern hat eine Bank die Genehmigung zur Errichtung eines neuen Gebäudes erhalten mit der Auflage, dieses architektonisch dem alten Stadtbild anzupassen. Unter anderem soll die Gebäudefront mit Rundbogenfenstern ausgestattet werden, deren Sandsteineinfassung mit einem Meißel zu riffeln (d.h. zu scharrieren) ist.

Um den nötigen Lichteinfall zu garantieren, soll die Fläche der Fenster mindestens $1,3 \text{ m}^2$ betragen.

Wie sind die Ausmaße der Fenstereinfassungen zu wählen, wenn die Kosten für die Scharrierung so niedrig wie möglich gehalten werden sollen?



Ergibt sich beim Untersuchen der Aufgabe beispielsweise die folgende zu minimierende Umfangsfunktion $U(x) = (2 + \pi/2) \cdot x + 1,3/x$, so stellen sich die Grenzen des oben benutzten Algorithmus heraus: „Diese Funktion lässt sich nicht ableiten!“ (Ergibt sie sich nicht, so muss eine Funktion zur Untersuchung gestellt werden, die nicht ganzrational ist.)

Erst jetzt wird für die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit einer Formalisierung der Verfeinerung der Schrittweite, wie sie in den ersten Einführungsbeispielen bereits angedeutet wurde, sichtbar. Diese Formalisierung führt zunächst zum Differenzen- und dann zum Differenzialquotienten. Mit diesem Mittel kann und muss man jetzt die bislang nur vermutete Ableitungsregel für ganzrationale Funktionen beweisen. Ihr Gebrauch wird damit nachträglich gerechtfertigt. Mit dem Beweis ist dann auch ein „klassischer Kern“ erreicht.

Der Unterricht leistet somit eine propädeutische Arbeit bezüglich eines möglichen Leistungskurses, in dem Nachweise mehr in den Mittelpunkt treten können und sollen.

Schülerinnen und Schüler könnten die Funktion $f(x) = 1/x$ zu $f(x) = x^{-1}$ umstellen und dann die Ableitungsregeln auf Potenzfunktionen mit negativem Exponenten übertragen. Für diesen Fall ist hier geeignetes anderes Aufgabenmaterial sinnvoll, um die Notwendigkeit der Formalisierung hervorzuheben. Es bieten sich dann einfache gebrochenrationale Funktionen wie z.B. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ an.

Schlussbemerkungen

Der hier vorgeschlagene Ansatz weicht in mehreren Punkten von dem „klassischen“ Weg der Einführung in die Differenzialrechnung ab. Zunächst wird der Aspekt der Änderungsrate gegenüber dem der Steigung mehr in den Vordergrund geholt. Das Hilfsmittel TI-92 erlaubt es hier, Schüleraktivitäten an Realdaten breiten Raum zu bieten.

Die herausragende Änderung besteht jedoch darin, die Ableitung an ganzrationalen Funktionen inklusive der zugehörigen Regeln mit Hilfe des TI-92 zunächst zu vermuten und mit ihnen zu arbeiten, ohne sie zu beweisen.

Der Beweis soll erst dann erfolgen, wenn die Beweisnotwendigkeit für die Schülerinnen und Schüler nach vielen Anwendungssituationen einsichtig wird.

Literatur

- [1] **Busmann, H., Heymann, H.W.:** Differentialrechnung. Anwendungs- und computerorientierte Aufgaben mit Lösungen. Westermann, Braunschweig 1985.
- [2] **Schmidt, A., Schweizer, W.:** Lambacher-Schweizer Mathematik, Analysis 1. Klett, Stuttgart 1987.
- [3] **Kuypers, W., Lauer, J. (Hrsg.):** Mathematik; 11. Schuljahr. Schwann, Düsseldorf 1988.
- [4] **Haas, N., Müller, A.:** „Weltbevölkerung - Wachstum ohne Grenzen?“ In: Mathematik lehren, (1995) 70, 56-62.

Anhang

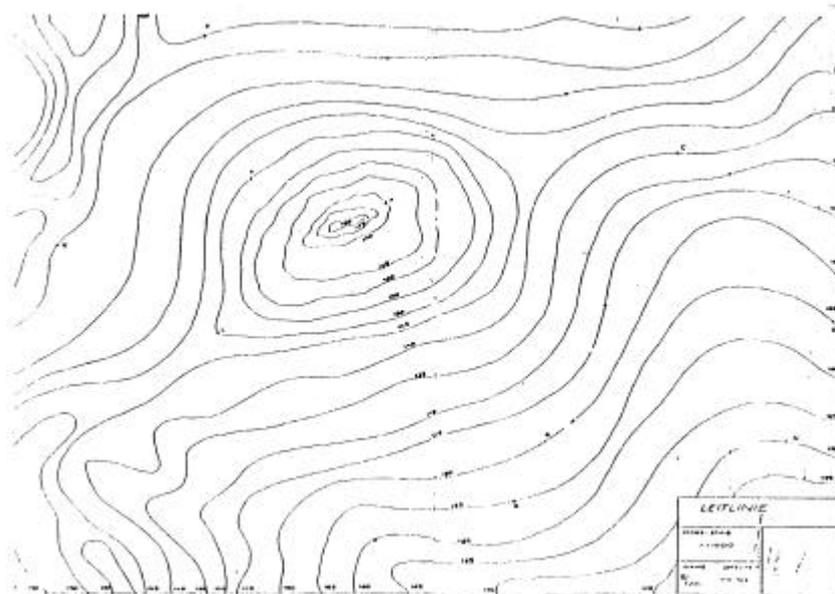
Im Anhang finden sich Kopien von Folienvorlagen und Arbeitsblättern sowie Klausuraufgaben, die in einer Unterrichtseinheit verwendet wurden.

Die Folien sind für diesen Unterricht erstellt worden und müssen dem eigenen Unterricht angepasst werden. Dazu sind z.B. als Materialien die angesprochenen Höhenpläne zu besorgen und auszuteilen.

Jürgen Bissel, Ulf-Hermann Krüger, Sigrun Otte-Spille, Ute Schlobinski-Voigt

Problemstellung:

Durch ein Gelände, welches durch einen Höhenschichtlinienplan gegeben ist, ist eine Landstraße zu legen.



Aufgaben:

1. Aus dem Höhenschichtlinienplan kann man eine Wertetabelle ermitteln, welche die Kartenentfernung vom Startpunkt und die Höhe über dem Startpunkt wiedergibt.

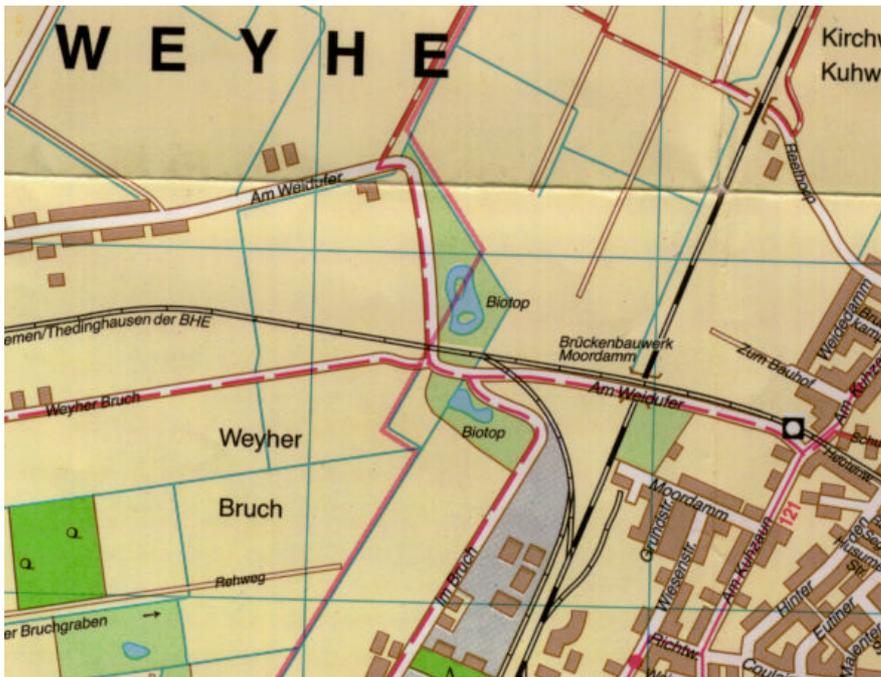
Kartenweg in cm	0,0	3,0	6,0	7,75	10,5	12,8	14,2	15,2	16,6	17,75	19,1	21,45	22,25
Höhe über Start in m													
Kartenweg in cm	22,7	23,2	23,7	24,1	25,6	26,3	27,4	28,5	30,8	32,3	34,3	37,1	39,0
Höhe über Start in m													

Vervollständigen Sie die Tabelle.

2. Zeichnen Sie eine (realistische) Profilkurve der Straße.
Beschreiben Sie: In welchen Bereichen fällt die Straße, in welchen steigt sie?
Wo liegt keine Steigung vor? Wo ist die Steigung maximal?
3. Berechnen Sie die Steigungen der Straße.
4. Zeichnen Sie den Steigungsgraphen.
Untersuchen Sie, ob dieser Steigungsgraph realistisch ist oder nicht.
Wie kann die Aussagekraft des Graphen verbessert werden?

Problemstellung:

Zur Entlastung und Steuerung der Verkehrsströme innerhalb der Gemeinde ist eine Straßenüberführung über die Eisenbahnlinie im Bereich des Moordamms zu planen.



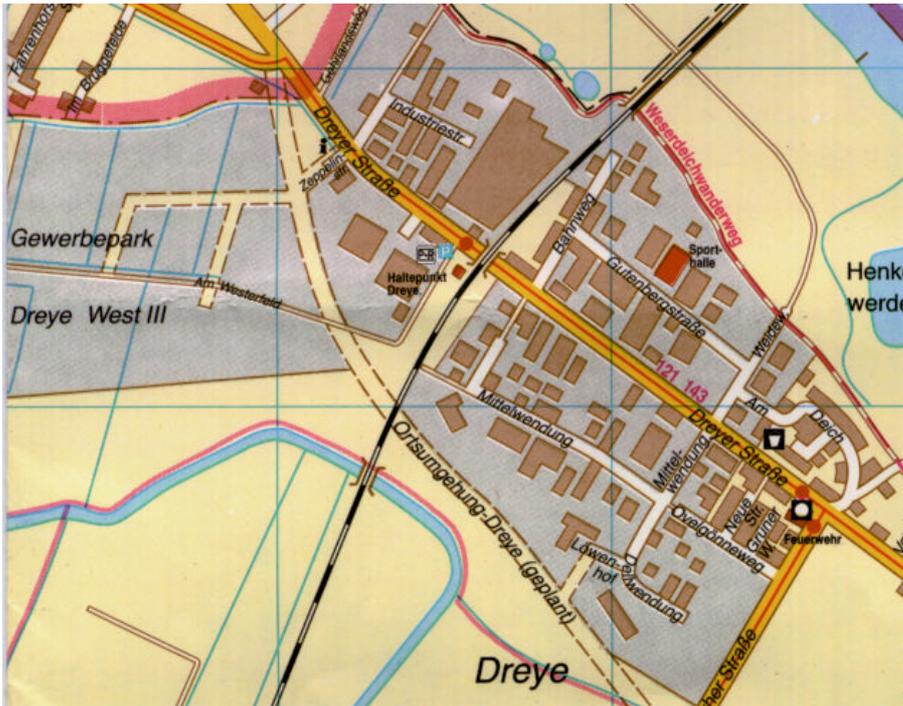
(mit freundlicher Erlaubnis der Gemeinde Weyhe)

Aufgaben:

1. Aus einem Höhenplan kann eine Wertetabelle ermittelt werden, welche die Kartenentfernung vom Startpunkt und die Höhe über dem Startpunkt wiedergibt. Erstellen Sie diese Tabelle.
2. Zeichnen Sie eine (realistische) Profilkurve der Überführung. Beschreiben Sie:
In welchen Bereichen fällt die Straße, in welchen steigt sie?
Wo liegt keine Steigung vor?
Wo ist die Steigung maximal?
3. Berechnen Sie die Steigungen der Überführung.
4. Zeichnen Sie den Steigungsgraphen. Untersuchen Sie, ob dieser Steigungsgraph realistisch ist oder nicht!
5. Die Baurichtlinien sehen vor, dass eine solche Straßenüberführung Steigungswerte von 4,5 % nicht überschreiten darf. Prüfen Sie, ob diese Bestimmung überall eingehalten worden ist.

Problemstellung:

Im Zuge des Baues der kommunalen Entlastungsstraße in Dreye ist eine Straßenunterführung unter der Eisenbahnlinie im Bereich des Gewerbegebietes Dreye zu planen.



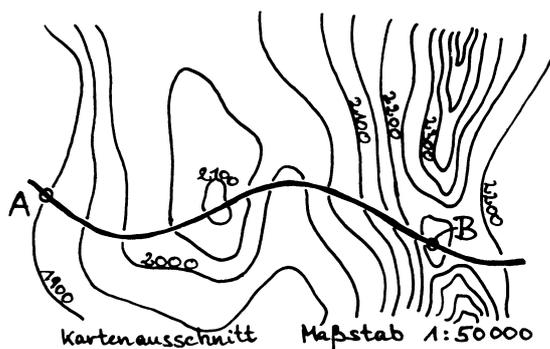
(mit freundlicher Erlaubnis der Gemeinde Weyhe)

Aufgaben:

1. Aus einem Höhenplan kann eine Wertetabelle ermittelt werden, welche die Kartenentfernung vom Startpunkt und die Höhe über dem Startpunkt wiedergibt. Erstellen Sie die Tabelle.
2. Zeichnen Sie eine (realistische) Profilkurve der Unterführung. Beschreiben Sie:
In welchen Bereichen fällt die Straße, in welchen steigt sie?
Wo liegt keine Steigung vor? Wo ist die Steigung maximal?
3. Berechnen Sie die Steigungen der Unterführung.
4. Zeichnen Sie den Steigungsgraphen. Untersuchen Sie, ob dieser Steigungsgraph realistisch ist oder nicht.
5. Die Baurichtlinien sehen vor, dass eine solche Straßenunterführung Steigungswerte von 4,5 % nicht überschreiten darf. Prüfen Sie, ob diese Bestimmung überall eingehalten worden ist.

Aufgabe 1:

In einem Höhengichtlinienbild stellt die eingezeichnete Linie den Weg einer Pässstraße von A nach B dar. Die Wertetabelle gibt einige Punkte genauer an.

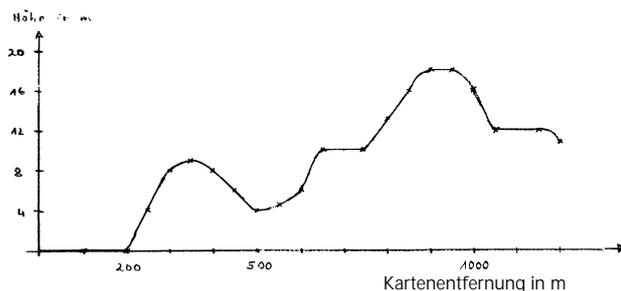


Kartenweg in m	Höhe in m	Karten-Weg in m	Höhe in m
0		6400	
1100		6600	
1600		7900	
2400		8700	
3500		9300	
4100		9900	
5000		10600	
5600			

- Vervollständigen Sie die Tabelle.
Zeichnen Sie eine (realistische) Profilkurve der Strecke.
Beschreiben Sie: In welchen Bereichen fällt die Straße, in welchen steigt sie?
Wo liegt keine Steigung vor?
Wo ist die Steigung maximal?
- Berechnen Sie die Steigungen der Pässstraße.
Zeichnen Sie den Steigungsgraphen.
- Nach einer neuen Verfügung des Verkehrsministeriums werden für Wohnwagengespanne alle Pässe gesperrt, die über 10 % Steigung aufweisen.
Prüfen Sie, ob auch dieser Pass zu sperren ist.

Aufgabe 2:

Unten ist die Profilkurve eines Wanderweges gezeichnet. Die Wertetabelle gibt einige Punkte genauer an.



Kartenweg in m	Höhe in m	Karten-weg in m	Höhe in m
0	0	700	9
200	0	750	9
250	4	800	13
300	8	850	16
350	9	900	18
400	8	950	18
450	6	1000	16
500	4	1050	12
550	5	1100	12
600	6	1150	12
650	9	1200	11

- Zeichnen Sie eine (realistische) Profilkurve des Weges.
- Berechnen Sie die Steigungen des Wanderweges.
Zeichnen Sie den Steigungsgraphen.
- Nach einer neuen Verfügung des Innenministeriums werden für Wanderwege besondere Steighilfen gefordert, wenn sie über 15 % Steigung aufweisen.
Prüfen Sie, ob auch für diesen Weg solche Maßnahmen durchzuführen sind.

Aufgabe 1:

Demnächst soll der 13. Lauf zur Deutschen Rennsportmeisterschaft für Tourenwagen durchgeführt werden. Veranstalter ist der ADAC, Gau Weser-Ems. Das Rennen wird auf einem Rundkurs bei Diepholz stattfinden.

Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer haben Gelegenheit, die Strecke in Trainingsläufen kennenzulernen. In der Tabelle ist ein Auszug aus dem Streckenprotokoll der Startnummer 13 dargestellt.

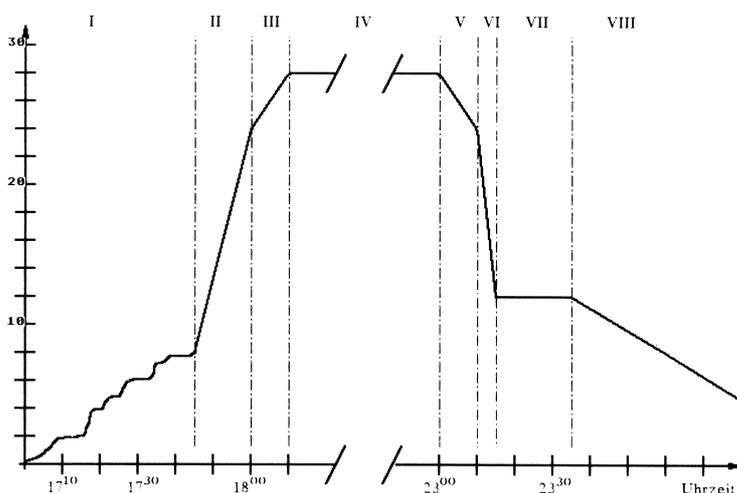
Fahrzeit in min	0,0	0,5	1,0	3,0	3,25	3,5	4,5	4,75	5,0	5,25	5,5	6,0	6,75	7,0	7,75	8,25	8,75	9,25	9,75	10
Wegstrecke in km	0,0	0,1	0,45	2,5	2,6	2,7	2,7	2,75	2,8	2,9	3,25	4,15	5,25	5,5	5,5	5,8	6,25	6,7	6,95	7,0

- a) Zeichnen Sie eine (realistische) Kurve für Wege und Zeiten.
 Beschreiben Sie: Wann fährt der Wagen schnell, wann fährt er langsam?
 Wann beschleunigt das Team, wann wird gebremst?
 Wann steht der Wagen?
 Schreiben Sie eine Radio-Reportage des Trainingslaufes.
- b) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten des Wagens.
 Zeichnen Sie den Geschwindigkeitsgraphen.
- c) Die Rennleitung disqualifiziert die Startnummer 13 wegen Überschreitung der Höchstgeschwindigkeit von 100 km/h.
 Prüfen Sie, ob das gerechtfertigt ist oder ob ein Protest Aussicht auf Erfolg hat.

Aufgabe 2:

Unten ist der Graph einer Kegelfahrt dargestellt.

Die Tabelle gibt einige Werte genauer an.



Uhrzeit	Entfernung in km
17 ⁰⁰	0,0
17 ⁴⁵	8,0
18 ⁰⁰	24,0
18 ¹⁰	28,0
23 ⁰⁰	28,0
23 ¹⁰	24,0
23 ¹⁵	12,0
23 ³⁵	12,0
24 ⁰⁰	8,0

- a) Beschreiben Sie die 8 Etappen der Fahrt. Gab es besondere Ereignisse?
 Schreiben Sie eine Radio-Reportage der Fahrt.
- b) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten des Wagens.
 Zeichnen Sie den Geschwindigkeitsgraphen.
- c) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die Kegelbrüder voraussichtlich wieder zu Hause sein werden.

Aufgabe 1:

Beim Start eines Space-Shuttle nehmen Höhe und Geschwindigkeit des Shuttle sehr schnell zu.

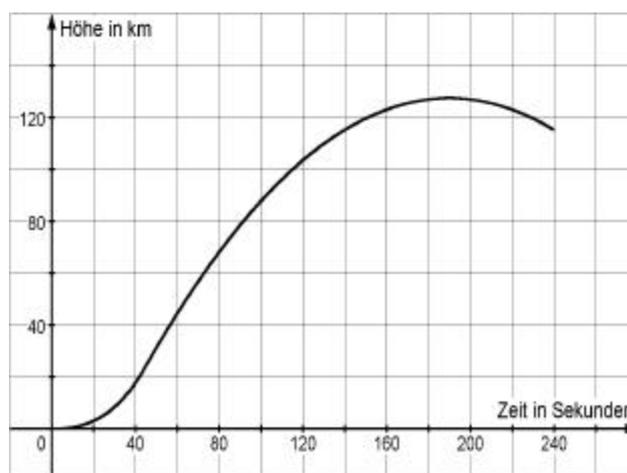
Die Tabelle gibt einige Werte genauer an.



Zeit in min	Höhe in km
0:00	0,0
0:20	1,0
0:40	4,3
0:53	7,6
1:00	9,8
2:00	40,8
3:00	84,6
4:00	117,0
5:00	132,8
6:00	135,4
7:00	134,5
8:00	122,1
8:20	117,7
8:34	117,0

- Zeichnen Sie eine (realistische) Kurve für Zeiten und Höhen.
- Berechnen Sie die Geschwindigkeiten des Shuttles. Zeichnen Sie den Geschwindigkeitsgraphen.

Aufgabe 2:



Höhenforschungsraketen haben die Aufgabe, Nutzlasten auf einer senkrechten Abschussbahn kurzzeitig in die Hochatmosphäre zu befördern. Im Gegensatz zu Satelliten-Trägerraketen, die nach einer gewissen Flugzeit in eine Umlaufbahn einschwenken, kehren Höhenforschungsraketen wieder fast an ihren Ursprungsort zurück.

In der Graphik oben ist der Flug einer solchen Rakete im Zeitraum von 0 bis 240 Sekunden nach dem Start dargestellt. Untersuchen Sie die Flugdaten der Rakete.

Aufgabe 3:

Es soll die Temperaturabnahme in einer Teetasse untersucht werden. Bringen Sie dazu Wasser zum Kochen und gießen Sie dieses in eine Teetasse. Messen Sie die Temperatur des Wassers in Abständen über einen längeren Zeitraum.

- Stellen Sie die Messwerte graphisch dar.
- Berechnen Sie die Abnahme der Temperatur in den jeweiligen Zeiträumen.
Stellen Sie die Änderung der Temperatur graphisch dar.
- Finden Sie Funktionsgleichungen für die Kurven.

KL. 11	UE : Einführung in die Differenzialrechnung	AB: 4
--------	---	-------

Aufgabe 1:

Die Tabelle gibt das Körperwachstum von Jungen wieder.

Lebensalter in Jahren	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	3	4	5	6	7
Körpergröße in cm	51,0	61,6	68,5	73,3	77,0	83,8	88,9	97,9	105,0	111,4	117,8	123,8
Lebensalter in Jahren	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Körpergröße in cm	129,6	134,8	139,8	144,6	149,6	155,1	161,3	168,6	173,1	176,1	177,6	178,9

- a) Zeichnen Sie eine (realistische) Kurve für Lebensalter und Körpergröße.
- b) Berechnen Sie die Änderungsrate für die Körpergröße.
Zeichnen Sie den Graphen der Änderungsrate.
- c) Machen Sie Aussagen zur Monotonie der Graphen. Was folgern Sie daraus für das Größenwachstum?

Aufgabe 2:

Beim Start eines Space-Shuttle nehmen Höhe und Geschwindigkeit des Shuttle sehr schnell zu.

Die Tabelle gibt einige Werte genauer an.



Zeit in min	Geschw. in m/sec
0:00	0
0:20	107
0:40	229
0:53	323
1:00	381
2:00	1216
3:00	1748
4:00	2100
5:00	2641
6:00	3481
7:00	4726
8:00	6427
8:20	7012
8:34	7424

- a) Zeichnen Sie eine Kurve für Zeiten und Geschwindigkeiten.
- b) Berechnen Sie die Beschleunigungen des Shuttles.
Zeichnen Sie den Beschleunigungsgraphen.

Aufgabe 3:

Nach den Daten des U.S. Bureau of the Census ergeben sich folgende Zahlen für die Weltbevölkerung im Zeitraum 1950 - 2030:

Jahr	1950	1952	1954	1956	1958	1959	1960
Bevölkerungszahl	2555982611	2635793710	2728957573	2833150774	2945263533	2997482465	3039433944
Jahr	1961	1962	1964	1966	1968	1970	1972
Bevölkerungszahl	3080063747	3136082730	3276491201	3415545874	3556946153	3706601448	3860789944
Jahr	1974	1976	1978	1980	1982	1984	1986
Bevölkerungszahl	4012904290	4158437090	4303037183	4453863820	4610062597	4769630537	4932580072
Jahr	1988	1990	1992	1994	1996	1998	2000
Bevölkerungszahl	5104636805	5277725410	5443740826	5606338688	5766435620	5925770871	6081002937
Jahr	2002	2004	2006	2008	2010	2012	2014
Bevölkerungszahl	6234277496	6386542886	6537660423	6688888440	6840423256	6991800919	7141433937
Jahr	2016	2018	2020	2022	2024	2026	2030
Bevölkerungszahl	7287785896	7430827367	7570215444	7706380265	7839692803	7970096069	8224502122

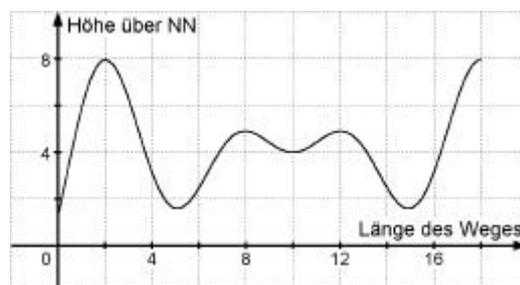
Quelle: <http://www.census.gov/ipc/www/worldpop.html>

- a) Stellen Sie die Daten graphisch dar.
- b) Berechnen Sie die Änderung der Weltbevölkerung in den jeweiligen Zeiträumen. Zeichnen Sie den Graphen der Änderungsrate.
- c) Untersuchen Sie die Zusammenhänge zwischen den Graphen.

Aufgabe 4:

Das Bild zeigt die Profilkurve der Bergetappe einer Radrundfahrt.

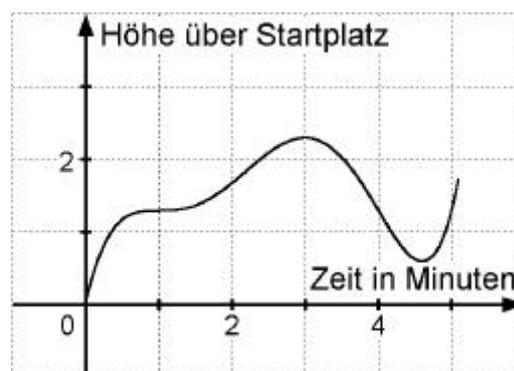
- a) Vergleichen Sie die Steigungen des Weges in einzelnen Punkten.
- b) Definieren Sie die Steigung nach 2 km bzw. 10 km.
- c) Skizzieren Sie die Steigungskurve der Bergetappe in einem Bild unter der Profilkurve.
- d) Untersuchen Sie die Zusammenhänge zwischen den Graphen.



Aufgabe 5:

Das Bild zeigt das Barogramm eines Segelfluges. Zu jedem Zeitpunkt des Fluges ist die Höhe des Segelfluges registriert.

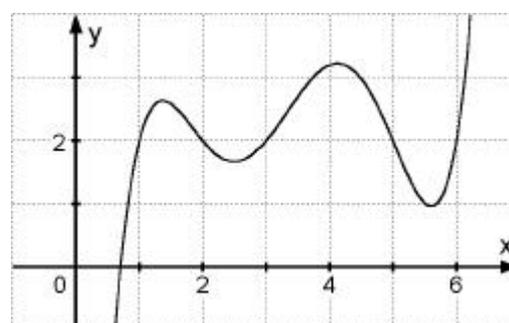
- a) Beschreiben Sie:
 In welchen Zeiträumen steigt das Flugzeug, in welchen fällt es?
 Zu welchen Zeitpunkten ändert sich die Höhe nicht?
 Zu welchen Zeitpunkten ist die Steigung des Flugzeugs maximal?
- b) Skizzieren Sie die Steigungskurve des Flugzeugs in einem Bild unter dem Barogramm.
- c) Untersuchen Sie die Zusammenhänge zwischen den Graphen.



Aufgabe 6:

Das Bild zeigt den Graphen einer mathematischen Funktion.

- a) Beschreiben Sie:
 In welchen Bereichen steigt die Kurve, in welchen fällt sie?
 Für welche Werte ändert sich die Höhe nicht?
- b) Skizzieren Sie die Steigungskurve in einem Bild unter dem Graphen.
- c) Untersuchen Sie die Zusammenhänge zwischen den Graphen.



Klausuraufgaben

Aufgabe:

Uhrzeit	4:00	4:15	4:30	4:45	5:00	5:15	5:30	5:45	6:00	6:15
Zeit in Minuten	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135
Leistung in kW	26,6	40	56,6	73,3	86,6	73,3	56,6	40	26,6	26,6
Uhrzeit	30	6:45	7:00	7:15	7:30	7:45	8:00	8:15	8:30	8:45
Zeit in Minuten	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285
Leistung in kW	26,6	40	56,6	70	83,3	96,6	106	116,6	130	143,3
Uhrzeit	9:00	9:15	9:30	9:45	10:00	10:15	10:30	10:45	11:00	11:15
Zeit in Minuten	300	315	330	345	360	375	390	405	420	435
Leistung in kW	150	143,3	130	116,6	130	143,3	150	150	143,3	130
Uhrzeit	11:30	11:45	12:00	12:15	12:30	12:45	13:00	13:15	13:30	13:45
Zeit in Minuten	450	465	480	495	510	525	540	555	570	585
Leistung in kW	116,6	130	143,3	130	116,6	110	106	101,6	96,6	96,6

Die Wertetabelle gibt die am Mittwoch, 09.07.1997, im Verlaufe des Vormittags von der KGS Leeste nachgefragte elektrische Leistung wieder.

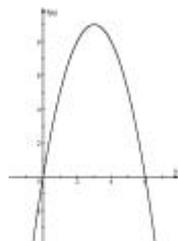
- Stellen Sie die Wertetabelle graphisch dar. Berechnen Sie die Änderung der nachgefragten elektrischen Leistung als „Änderungsrate pro Minute“. Stellen Sie die Kurve für die „Änderungsrate pro Minute“ in einem geeigneten Maßstab unter dem ersten Bild dar.
- Identifizieren Sie die Reinigung der Sporthallen anhand der Leistungs-Kurve. Beschreiben Sie die Auswirkungen der großen Pausen auf die Leistungs-Kurve.
- Beschreiben Sie, durch welche Maßnahmen sichergestellt werden könnte, dass die Kurve der Änderungsrate genauer werden würde, sich also der Wirklichkeit noch mehr näherte.

Aufgabe:

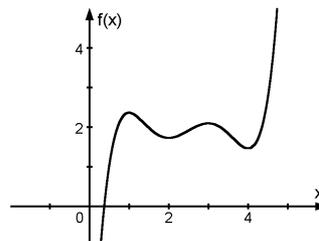
In den Schaubildern unten sind die Graphen der Funktionen A, B, C und D dargestellt. Darunter sind die Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktionen gezeichnet. Diese stehen jedoch nicht in der richtigen Reihenfolge. Ordnen Sie jeder Funktion die richtige Ableitungsfunktion zu und begründen Sie Ihre Entscheidung kurz.



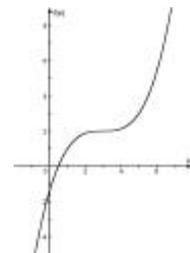
A



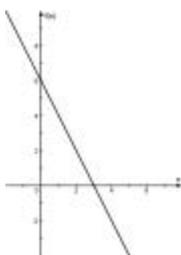
B



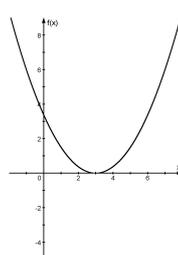
C



D



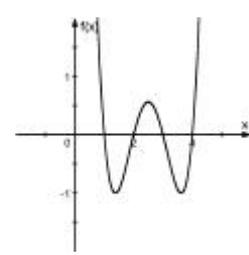
1



2



3



4

Krümmung

Leitung der Workshops: *Mechthild Ebenhöf, Hans Kramer*
Endredaktion: *Hans Kramer*



Bild 1

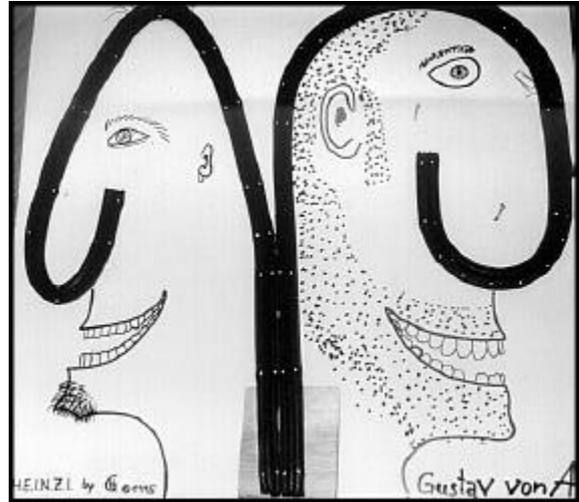


Bild 2
(Kugelbahn, links Klothoide rechts Kreisabschnitte)

Einstieg

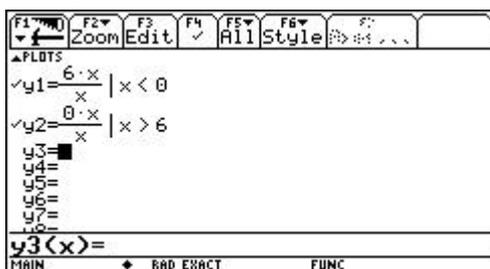
Die folgenden zwei anwendungsorientierten Aufgaben sind gut geeignet, den Begriff der Krümmung bereits am Ende der Klasse 11 zu problematisieren:

Aufgabe 1

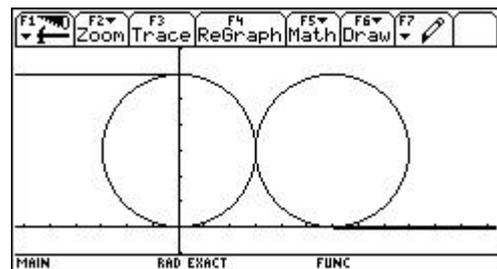
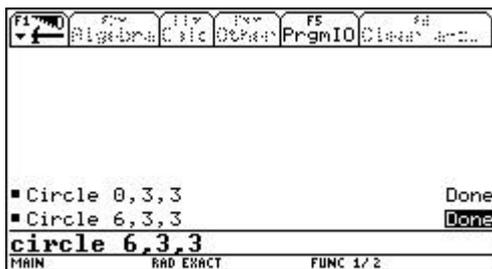
Zwei Straßen, die durch die Strahlen zu $y = 6$ für $x \leq 0$ sowie zu $y = 0$ für $6 \leq x$ veranschaulicht werden können, laufen parallel versetzt aufeinander zu. Untersuche, ob es geeignete Verbindungsmöglichkeiten gibt.

Sofort ist einsehbar, dass sich eine geradlinige Verbindung zu einem Streckenzug aus fahrtechnischen Gründen verbietet.

Sicher ist der Vorschlag zu erwarten, dass die Straßen mit zwei Viertelkreisen zu verbinden sind, die die Mittelpunkte $M_1(0/3)$ und $M_2(6/3)$ und jeweils den Radius $r_1 = r_2 = 3$ sowie den Berührungspunkt $B(3/3)$ besitzen.



Die konstanten, jedoch nur abschnittsweise definierten Funktionen erfordern die komplizierte Schreibweise der Funktionsterme.



Folgende Vorstellungen lassen sich in dieser Situation vermitteln:

- Geraden besitzen keine Krümmung, wie der Name schon sagt.
- Kreise besitzen eine konstante Krümmung, denn man kann einen Kreis nur mit einem festen Lenkereinschlag abfahren.
- Je größer der Radius des Kreises, desto geringer die Krümmung des Kreises.
- Je kleiner der Radius des Kreises, desto größer die Krümmung des Kreises.

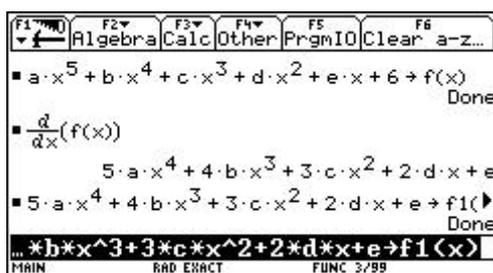
Stoßen bei einer Straßenführung Gerade und Kreis unmittelbar aufeinander, so kommt es zu einem „Krümmungssprung“. Beim Befahren der Straße muss der Lenker plötzlich aus der geraden Position in die Kreiskrümmung herumgerissen werden, was bei entsprechenden Geschwindigkeiten mit Gefahren verbunden ist. Noch schlimmer wirkt sich der Wechsel im Berührungspunkt B vom rechtsgekrümmten in den linksgekrümmten Viertelkreis aus.

Die gleichen Überlegungen gelten für den Ansatz, die Strahlen durch den Ausschnitt einer Kurve dritten Grades zu verbinden, die ihren relativen Hochpunkt in $H(0/6)$ sowie ihren relativen Tiefpunkt in $T(6/0)$ besitzt. Ist in Klasse 11 der Tatbestand geklärt, dass die zweite Ableitung Aussagen über die Krümmung trifft (ohne etwas über das Maß der Krümmung aussagen zu können), so ist klar, dass die Kurve in H rechtsgekrümmt, $f''(0) < 0$, und in T linksgekrümmt, $f''(6) > 0$, ist. Auch eine solche Trassierung besitzt also zwei Krümmungssprünge.

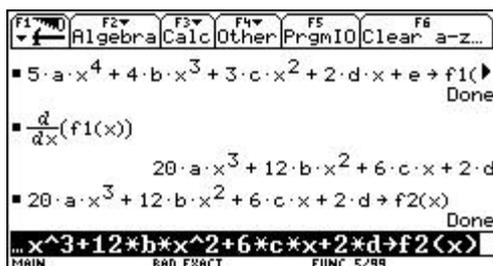
Diese lassen sich nur dann vermeiden, wenn für die Stellen Null und Sechs zusätzlich gilt:

$$f''(0) = 0 \text{ und } f''(6) = 0.$$

T und H können damit als Wendepunkte mit waagerechten Tangenten, also als Sattelpunkte angesehen werden. Die gesuchte Kurve muss somit mindestens fünften Grades sein.



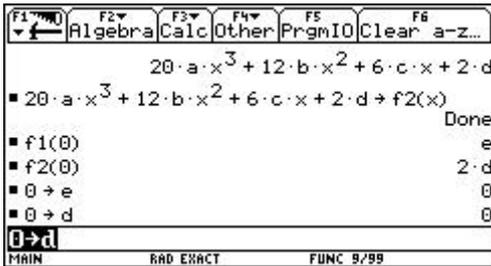
Der Funktionsterm der Kurve 5. Grades wird unter Ausnutzung der Vorgabe des y-Achsenabschnittes 6 eingegeben und als $f(x)$ definiert. Will man das absolute Glied des Polynoms statt mit „6“ durch eine Variable darstellen, sollte man auf „g“ zurückgreifen, um eine Doppelbelegung der Variablen f zu vermeiden. Die erste Ableitung wird gebildet und unter $f_1(x)$ gespeichert.



Der Vorgang wird für die zweite Ableitung wiederholt.

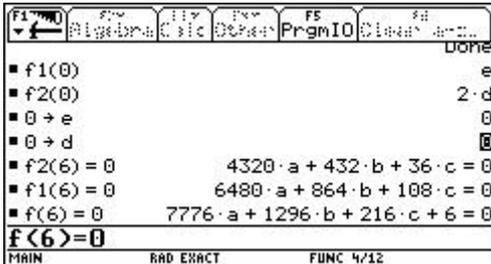
Alternativ ist die Eingabe möglich:

$$d(f(x), x, 2) \rightarrow f_2(x)$$



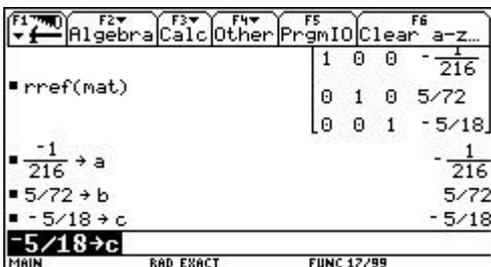
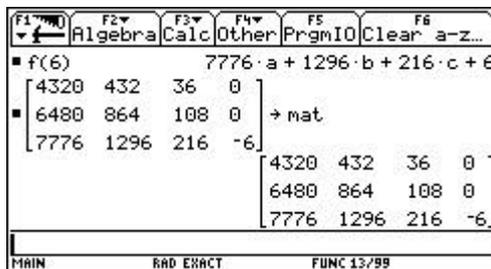
Die erste und die zweite Ableitung an der Stelle Null müssen den Wert Null besitzen.

Den Variablen e und d ist also der Wert Null zuzuordnen.

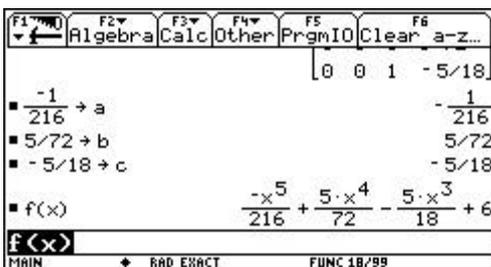


Für die Stelle Sechs gilt ebenfalls: $f'(6) = 0$ und $f''(6) = 0$. Zusätzlich gilt: $f(6) = 0$.

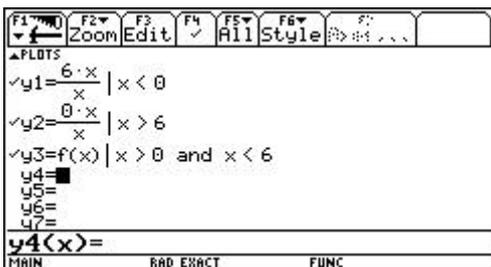
Die Matrix des resultierenden Gleichungssystems lässt sich ablesen.

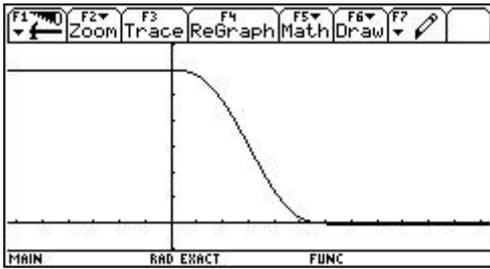


Die Werte für die Variablen lassen sich der mit dem Befehl „RREF“ bearbeiteten Matrix entnehmen und entsprechend zuordnen.



Der gesuchte Funktionsterm kann zur Kontrolle aufgerufen werden, die Funktionsgleichungen können mit den gegebenen Einschränkungen im y-Fenster festgelegt und der abschnittsweise definierte Graph im Graph-Fenster betrachtet werden.

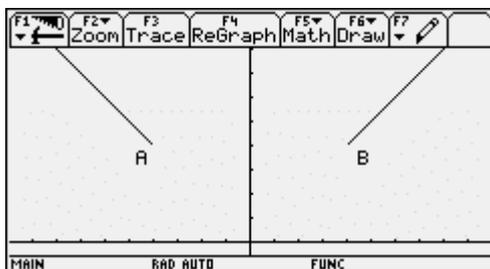




Die grundlegende Aufgabenidee lässt sich durch Abänderung der Anordnung der Strahlen variieren.

Aufgabe 2

Eine rechtwinklige Straßenecke soll für den Verkehr entschärft werden. Finden Sie eine Funktion, deren Graph die Endpunkte A und B sinnvoll verbindet.



Die nebenstehende Graphik veranschaulicht die Aufgabenstellung für die Endpunkte A(-4 / 4) und B(4 / 4) sowie für die Strahlen

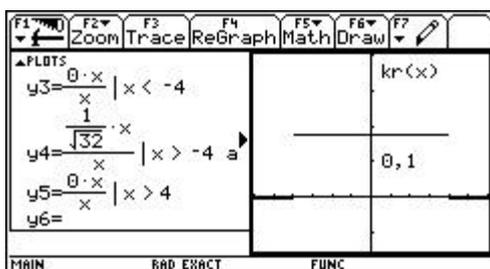
$$\begin{aligned} &\text{zu } y_1 = -x \quad \text{für } x \leq -4 \\ &\text{und zu } y_2 = x \quad \text{für } x \geq 4. \end{aligned}$$

Unterschiedliche Vorstellungen zum Begriff der „Entschärfung der Straßenecke“ sollten diskutiert werden und können zu folgenden Modellierungen führen.

1. Modellierung mit dem Viertelkreis

$$(1) f_1(x) = 8 - \sqrt{32 - x^2}$$

Wie schon in Aufgabe 1 schließt der Viertelkreis stetig und differenzierbar in A und B an, ergibt jedoch jeweils einen Krümmungssprung an den Übergangsstellen.



Auch ohne TI-92 kann man den Graphen einer Krümmungsfunktion für diese Situation qualitativ entwickeln und intuitiv begründen lassen. Das Maß der Krümmung einer Geraden ist Null, das des Kreises konstant und von Null verschieden und – so wird vielleicht schon spekuliert – umgekehrt proportional zum Radius des Kreises.

2. Modellierung mit einer Parabel

$$(2) f_2(x) = \frac{1}{8} x^2 + 2$$

Auch die Parabel führt zu Krümmungssprüngen, die jedoch nicht unbedingt unmittelbar erkennbar sind. Ihre Existenz lässt sich aus der Tatsache ableiten, dass die zweite Ableitung einer Funktion zweiten Grades stets konstant und von Null verschieden ist, also die Kurve stets rechts oder linksgekrümmt ist. Genauere Aussagen lassen sich erst dann formulieren, wenn für die Krümmung ein Maß gefunden worden ist.

3. Modellierung mit anderen Funktionstypen

Die Kurven zu den folgenden fünf Funktionen erfüllen jeweils die drei Bedingungen eines stetigen, differenzierbaren und krümmungsfreien Anschlusses, wobei die letzte Eigenschaft mit der Forderung $f''(x) = 0$ verbunden wird. Sie können im Analysisunterricht der Kursstufe jeweils dann der Aufgabenstellung hinzugefügt werden, wenn die entsprechende Funktionsklasse behandelt wurde. Ist in diesen Kursen die Krümmungsfunktion erarbeitet worden, können auch die hier vorab aufgeführten Krümmungsmaxima k_{\max} berechnet werden. Anschaulich ist für diese Aufgabe bereits in Klasse 11 klar: Je kleiner der y-Achsenabschnitt ist, desto größer ist die Krümmung.

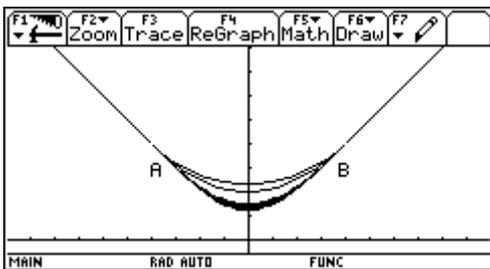
(3) $f_3(x) = -\frac{1}{512}x^4 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{2}$ ($k_{\max} = 0,375$) Lösung in Klasse 11

(4) $f_4(x) = -\frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right) + 4$ ($k_{\max} = 0,38$) ggf. Lösung in 12/13

(5) $f_5(x) = -4e^{-\frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{2}} + 8$ ($k_{\max} = 0,41$) ggf. Lösung in 12/13

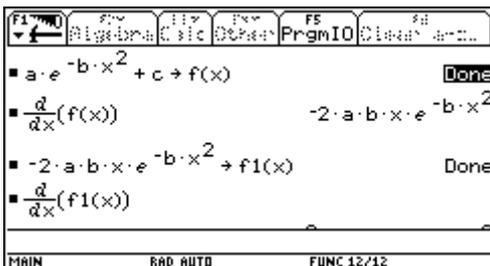
(6) $f_6(x) = -\frac{512}{x^2 + 48} + 12$ ($k_{\max} = 0,44$) ggf. Lösung in 12

(7) $f_7(x) = \frac{1}{16384}x^6 - \frac{5}{1024}x^4 + \frac{15}{64}x^2 + \frac{5}{4}$ ($k_{\max} = 0,47$) ggf. Lösung in 12

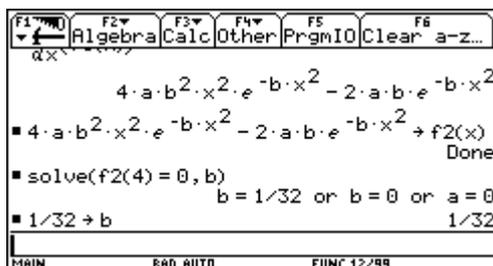


Exemplarisch sei die Herleitung zweier Funktionen dargestellt.

Zum Lösungsversuch (5):

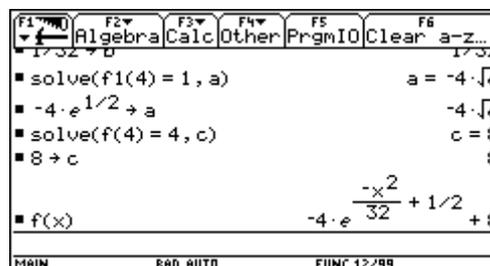


Ein geeigneter Funktionsterm einer Exponentialfunktion wird definiert. Deren erste und zweite Ableitung werden ermittelt und diese als $f_1(x)$ und $f_2(x)$ abgespeichert.



Die Bedingung $f''(4) = 0$ wird als Erste bearbeitet. Die beiden Lösungen $b = 0$ und $a = 0$ entfallen aufgrund der Anwendungssituation. Man möge das nebenstehende Ergebnis mit dem Ansatz „solve($f_2(4) = 0, a$)“ vergleichen.

Mit $b = 1/32$ wird die Bedingung $f'(4) = 1$ bearbeitet und das Ergebnis $a = -4\sqrt{e}$ zur Berechnung von c benutzt.



Zum Lösungsversuch (7):

Calculator screen showing the definition of $f_2(x)$ and its integral $f_1(x)$. The screen displays:

$$a \cdot (x-4)^2 \cdot (x+4)^2 \rightarrow f_2(x)$$

$$\int f_2(x) dx = \frac{a \cdot x^5}{5} - \frac{32 \cdot a \cdot x^3}{3} + 256 \cdot a \cdot x + c$$

$$\frac{a \cdot x^5}{5} - \frac{32 \cdot a \cdot x^3}{3} + 256 \cdot a \cdot x + c \rightarrow f_1(x)$$

The bottom of the screen shows the expression: $5-32*a*x^3/3+256*a*x+c \rightarrow f_1(x)$

Betrachtet man die Stellen 4 und -4 nicht als Wendestellen, sondern als doppelte Nullstellen von f'' , also als Nullstellen von f'' ohne Vorzeichenwechsel, ergibt sich der nebenstehende Ansatz.

Calculator screen showing the solution for c . The screen displays:

$$\frac{a \cdot x^5}{5} - \frac{32 \cdot a \cdot x^3}{3} + 256 \cdot a \cdot x + c \rightarrow f_1(x)$$

$$\text{solve}(f_1(4) = 1, c) \quad c = \frac{-(8192 \cdot a - 15)}{15}$$

$$\frac{-(8192 \cdot a - 15)}{15} \rightarrow c \quad \frac{-(8192 \cdot a - 15)}{15}$$

The bottom of the screen shows the expression: $-(8192*a-15)/15 \rightarrow c$

Die weitere Herleitung verläuft analog zum Beispiel (5).

Calculator screen showing the solution for a . The screen displays:

$$\frac{-(8192 \cdot a - 15)}{15} \rightarrow c \quad \frac{-(8192 \cdot a - 15)}{15}$$

$$\text{solve}(f_1(-4) = -1, a) \quad a = \frac{15}{8192}$$

$$\frac{15}{8192} \rightarrow a \quad \frac{15}{8192}$$

$$f_1(x) = \frac{3 \cdot x^5}{8192} - \frac{5 \cdot x^3}{256} + \frac{15 \cdot x}{32}$$

The bottom of the screen shows the expression: $f_1(x)$

Die erste Ableitung ist, wie erwartet, eine ungerade Funktion 5. Grades. Um das nebenstehende Schriftbild zu erzielen, ist gegebenenfalls noch erforderlich: „EXPAND($f_1(x)$)“.

Calculator screen showing the solution for d . The screen displays:

$$f_1(x) = \frac{3 \cdot x^5}{8192} - \frac{5 \cdot x^3}{256} + \frac{15 \cdot x}{32}$$

$$\int f_1(x) dx = \frac{x^6}{16384} - \frac{5 \cdot x^4}{1024} + \frac{15 \cdot x^2}{64} + d$$

$$\frac{x^6}{16384} - \frac{5 \cdot x^4}{1024} + \frac{15 \cdot x^2}{64} + d \rightarrow f(x)$$

$$\text{solve}(f(4) = 4, d) \quad d = 5/4$$

The bottom of the screen shows the expression: $\text{solve}(f(4)=4, d)$

Es ist diejenige Stammfunktion zu f' zu bestimmen, deren Graph durch den Punkt $B(4/4)$ verläuft. Aus Symmetriegründen verläuft dieser Graph auch durch $A(-4/4)$.

Calculator screen showing the final function $f(x)$ and its value at $x = -4$. The screen displays:

$$\frac{x^6}{16384} - \frac{5 \cdot x^4}{1024} + \frac{15 \cdot x^2}{64} + d \rightarrow f(x)$$

$$\text{solve}(f(4) = 4, d) \quad d = 5/4$$

$$5/4 \rightarrow d \quad 5/4$$

$$f(x) = \frac{x^6}{16384} - \frac{5 \cdot x^4}{1024} + \frac{15 \cdot x^2}{64} + 5/4$$

$$f(-4) = 4$$

The bottom of the screen shows the expression: $f(-4)$

Es folgen die letzte Zuordnung und entsprechende Kontrollen.

Als weitere Variante lässt sich eine entsprechende Aufgabe formulieren, in der die beiden Strahlen weder parallel noch achsensymmetrisch zur y -Achse verlaufen.

Aufgabe 3

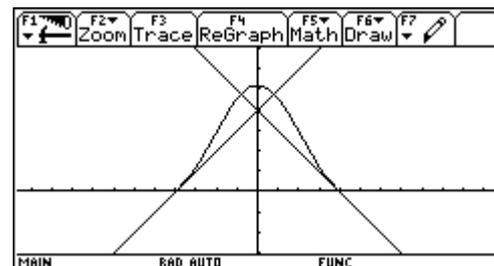
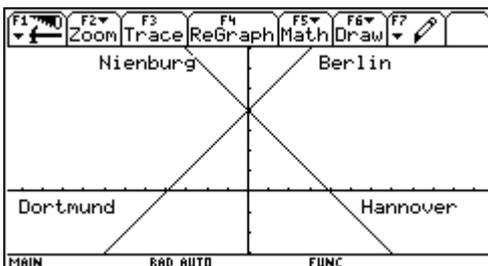


Bild 3



Bild 4

In einem sich (gemäß Diagramm) in C(0/4) rechtwinklig schneidenden Autobahnkreuz soll die Fahrtrichtung Nordwest durch einen Zubringer mit der Fahrtrichtung Südwest verbunden werden, der in B(4/0) rechts abbiegt und in A(-4/0) anschließt. Bestimmen Sie Funktionen, deren Graphen sinnvolle Anbindungen darstellen, und bewerten Sie diese.



Sind die oben angeführten Funktionsklassen behandelt worden, sind folgende Lösungsansätze zu erwarten:

Modellierungsansatz: Trigonometrische Funktion

Der Ansatz „ $f''(x) = a \cos x + b$ “ führt zu einem eindeutigen, aber eher unbefriedigenden Ergebnis, wenn man sich den Verlauf des Graphen bezüglich der gegebenen Geraden betrachtet.

$$f(x) = \frac{1}{4 \cos 4 - \sin 4} \left(-\cos x - \frac{\cos 4}{2} x^2 + 9 \cos 4 \right)$$

Modellierungsansatz: Ganzrationale Funktionen

Der Ansatz „ f “ ist eine Funktion vierten Grades “ besitzt als Lösung eine Funktionenschar. Wenn der Parameter b eine weitere Wendestelle angibt, lautet die Funktionsgleichung:

$$f_b(x) = \frac{1}{5b^2 - 16} \left(\frac{-1}{256} x^6 + \frac{5(b^2 + 16)}{512} x^4 - \frac{15b^2}{16} x^2 + \frac{25b^2 - 48}{2} \right)$$

$$\text{Für } b \text{ muss gelten: } \frac{4}{5}\sqrt{5} < b < 4. \quad b \rightarrow \frac{4}{5}\sqrt{5} \Rightarrow f_b(0) \rightarrow \infty$$

$$b \rightarrow 4 \Rightarrow f_b(0) \rightarrow 2,75$$

Wenn der Parameter t den y-Achsenabschnitt des jeweiligen Graphen angibt, lautet die Funktionsgleichung:

$$f_t(x) = \frac{-2t + 5}{8192} x^6 + \frac{3t - 7}{256} x^4 - \frac{6t - 9}{32} x^2 + t$$

Für $t \approx 5,2$ bzw. $b \approx 2,1$ schneidet der jeweilige Graph die Autobahnen rechtwinklig (Kostenminimierung beim Bau der diesbezüglichen Brücken).

Zur Krümmungsformel
$$kr(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{1.5}}$$

Zur Klärung der unterschiedlichen Möglichkeiten der Einführung des Krümmungsbegriffs und zur Herleitung der Krümmungsformel $kr(x)$ seien hier einige wesentliche Ansätze mit einer subjektiven Einschätzung aufgezählt (siehe Lit. [1]).

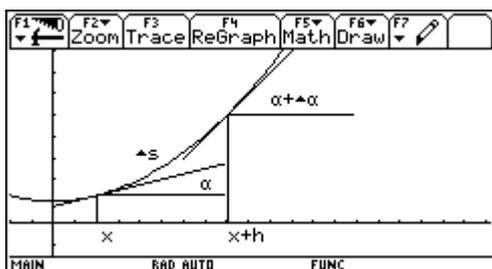
1. Krümmung als Änderungsrate der Richtung bezüglich der zurückgelegten Bogenlänge.
Der eleganteste Weg mit hohem Anspruchsniveau.
Das Anschauungsobjekt „Krümmungskreis“ hat keine Bedeutung für die Herleitung (siehe Lit. [2]; [3]; [4], S. 149; [5]).
2. Bestimmung der Krümmung durch Ermittlung des Krümmungskreises.
 - 2.1 Der Krümmungskreis als Näherungskurve zweiter Ordnung
($f(a) = K(a)$ und $f'(a) = K'(a)$ und $f''(a) = K''(a)$).
Die Einflussnahme der zweiten Ableitung muss von der Schülerin/vom Schüler als Definition „geschluckt“ werden. (siehe Lit. [6]; [7]).
 - 2.2 Ermittlung des Krümmungskreises mit Hilfe von Normalen.
Der Krümmungskreis als Veranschaulichung der Krümmung steht im Vordergrund, die Bedeutung der zweiten Ableitung ergibt sich aus dem Herleitungsprozess (siehe Lit. [7]).

Eine Übersicht hinsichtlich der benötigten Vorkenntnisse und des beweistechnischen Aufwands:

	Krümmung als Änderungsrate	Krümmungskreis als Näherungskurve 2. Ordnung	Krümmungskreis mittels Normalen
Voraussetzungen	Bogenlänge, alternativ: Ableitung der arc-tan- Funkt. Ableitung der tan- Funkt. mit Kettenregel oder: Additionstheorem für tan	Ableitung der Kreis- funktion Kettenregel	Kreisgleichung Tangente Normale
Rechnenniveau	sehr hoch	mittel	sehr niedrig
Rechenaufwand	sehr niedrig	hoch	sehr hoch
Einführung	spät (Analysis II)	früh (Analysis I)	sehr früh (Analysis I)

Hier sollen nun zwei anschauliche Einstiege in den Krümmungsbegriff unter Einbindung des TI-92 vorgestellt werden.

Weg 1



⇒ Wir stellen uns vor: In einem Fahrzeug wird auf einem Kompass die Himmelsrichtung, auf einem Kilometerzähler die gefahrene Strecke registriert. Anschaulich ergibt sich, dass der Quotient aus Winkeländerung $D\alpha$ und zurückgelegter Strecke Ds die Krümmung an der Stelle x näherungsweise angibt, in Zeichen: $k(x) = \frac{D\alpha}{Ds}$.

Dieser Term wird in Abhängigkeit von x dargestellt und die weitere Rechenarbeit dem TI - 92 übertragen. Die Krümmung kann dann (fast) beliebig genau angenähert werden.

Voraussetzungen sind allein der Tangentenbegriff, der Zusammenhang Geradensteigung/-Steigungswinkel α (aus Klasse 10) und der Satz des Pythagoras.

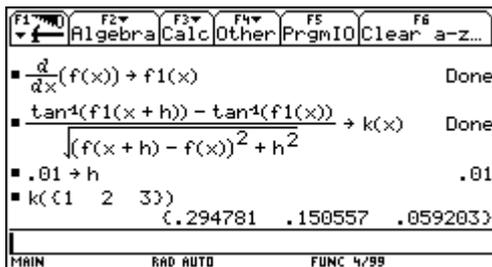
Mit $m = \tan \alpha = f'(x)$ folgt: $D\alpha = \arctan f'(x+h) - \arctan f'(x)$

$$Ds \approx \sqrt{(f(x+h) - f(x))^2 + h^2}$$

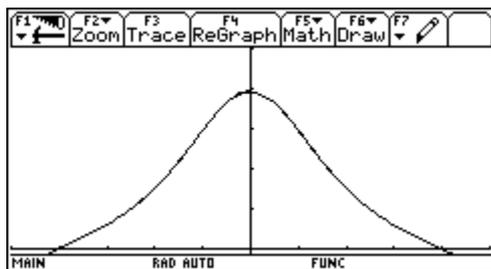
Als Alternativen bieten sich an: $Ds \approx \sqrt{h^2 + h^2 f'(x)^2} = h\sqrt{1 + f'(x)^2}$

$$Ds = \text{arcLen}(f(a), a, x, x+h).$$

Im TI - 92 wird die Krümmungsnäherungsfunktion daher folgendermaßen eingegeben (als $f(x)$ wurde Lösungsansatz (4) aus obiger Liste gewählt):



Die Definition des Differenzenquotienten muss die Zuweisung zu einem Funktionsnamen beinhalten. Anderenfalls erscheint die Fehlermeldung „circular definition“.

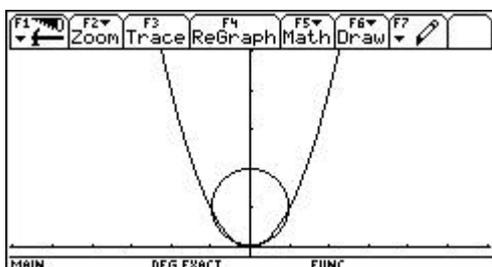


Wie gut die Näherung ist, sieht man, wenn man sich den Graphen der Näherungsfunktion k (hier mit $h = 0,01$) zusammen mit dem Graphen der tatsächlichen Krümmungsfunktion kr plotten lässt.

Weg 2

⇒ Ein Modellauto soll eine Straße, deren Verlauf der Normalparabel entspricht, abfahren. Treffe Aussagen zum Wendekreis dieses Fahrzeugs.

Den Schülerinnen und Schülern ist anschaulich klar, dass die Normalparabel im Scheitelpunkt die stärkste Krümmung besitzt. Der Wendekreis des Autos muss also mindestens so klein sein wie der Krümmungskreis der Normalparabel im Scheitelpunkt. Mit dem Befehl „CIRCLE“ können erste Erfahrungen gesammelt werden.

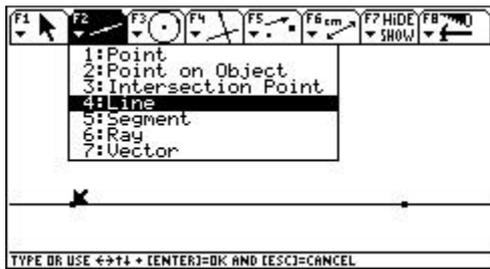


Der Versuch „CIRCLE 0,1,1“ verdeutlicht, dass der Wendekreis einen kleineren Radius als 1 besitzen muss. Weitere Versuche legen nahe: Der kleinste Krümmungskreis der Normalparabel im Scheitelpunkt besitzt den Radius $r = 0,5$.

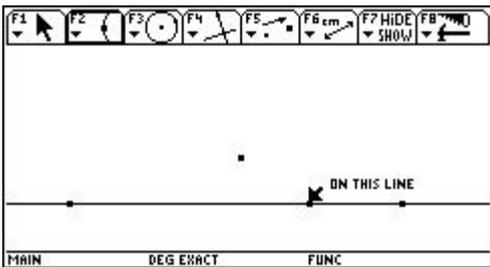
Das Auto durchfährt die Normalparabel weiter. Im Punkt $P(a/a^2)$ hält der Fahrer das Lenkrad in der eingestellten Position fest.

Wiederum ist anschaulich klar, dass das Fahrzeug einen Kreis abfährt, dessen Mittelpunkt sich auf der Normalen zur Parabel in P befindet. Seine Lage soll durch den Schnittpunkt dieser Normalen

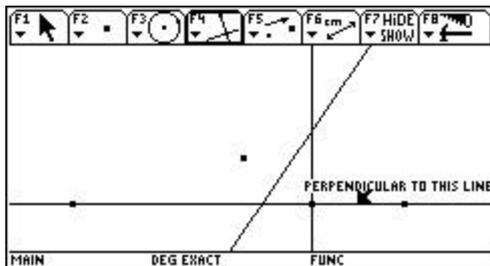
und einer zweiten Normalen in einem „eng benachbarten“ Punkt der Parabel angenähert werden. Der Sachverhalt lässt sich mit Mitteln des Geometrieprogramms des TI-92 veranschaulichen.



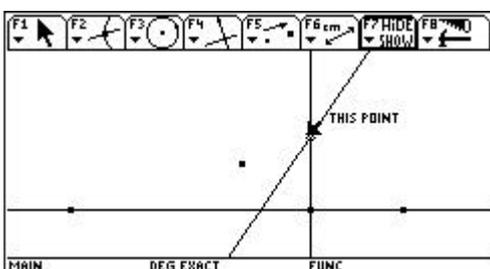
Mit APPS 8 wird das Geometrieprogramm aktiviert. Mit F2/1 lassen sich zwei Punkte und mit F2/4 anschließend eine Gerade durch diese Punkte festlegen. Sie soll die Leitlinie g der späteren Parabel sein.



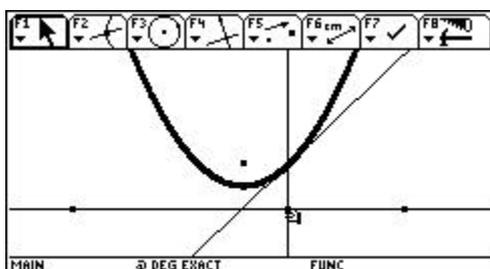
F2/1, ein weiterer Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, wird markiert, der spätere Brennpunkt B der Parabel. Mit F2/2 (Point on Object) bestimmt man einen beweglichen Punkt F auf der Leitlinie g .



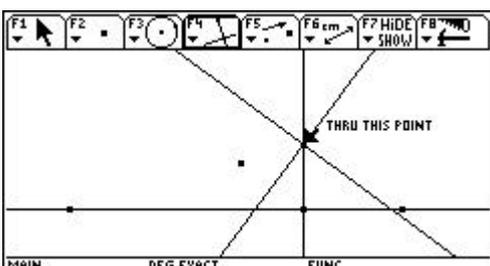
Durch F4/4 lässt sich die Mittelsenkrechte zu den Punkten B und F erzeugen, mit F4/1 die Senkrechte zur Leitlinie g durch den Punkt F . Der Schnittpunkt P beider Geraden ist ein Punkt der Parabel, der zum Brennpunkt B und zur Leitlinie g denselben Abstand besitzt.



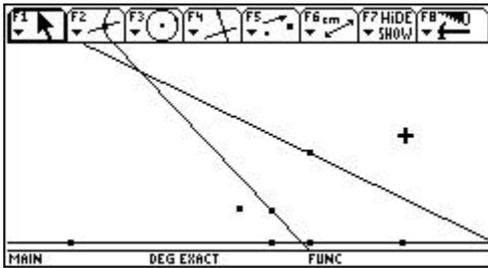
F2/3 ermöglicht die Definition des Schnittpunktes P . Mit F7/2 (Trace on) für den Punkt P und (2nd) „Kralle“ (die Hand links oben auf dem TI-92) für den Punkt F zeichnet man durch Bewegen des Cursors nach links und rechts die Parabel nach. (Die Tasten „2nd“ und „Kralle“ dürfen jedoch nicht festgehalten werden, da in diesem Fall das Bild als Ganzes bewegt wird.)



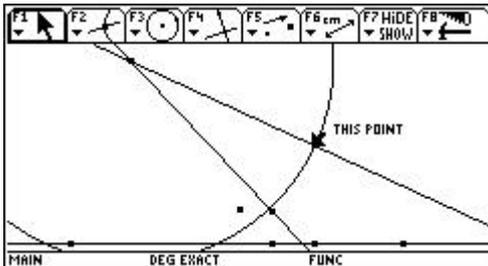
Zusätzlich wird veranschaulicht: Die Mittelsenkrechte zum Brennpunkt B und dem entsprechenden Fußpunkt F entspricht der Tangente in P an die Parabel. (Der Beweis ist eigenständig zu führen.) (2nd) ENTER löst die Kralle.



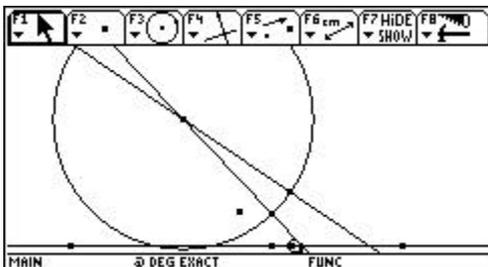
Die Normale in P zur Parabel ist damit die Senkrechte zur Mittelsenkrechten von B und F . Erneut mit F4/1 lässt sich diese Normale festlegen. Störende Linien, z. B. die Mittelsenkrechte und die Senkrechte, kann man mit F7/1 kaschieren.



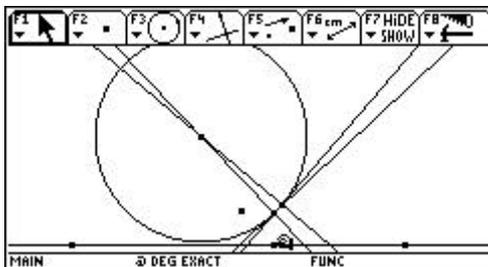
Wiederholt man den gesamten Vorgang für einen zweiten Punkt Q der Parabel, so schneiden sich die Normalen in einem Punkt S, der ebenfalls mit F2/3 fixiert werden kann.



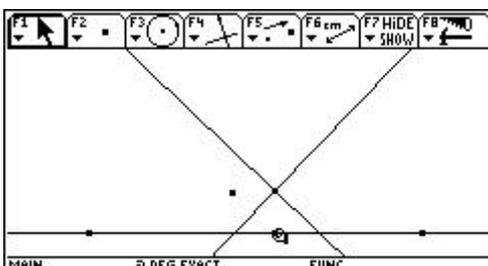
Der Schnittpunkt S soll Mittelpunkt eines Kreises sein, der durch Q verläuft. Dieser Kreis lässt sich mit F3/1 konstruieren. Bei entsprechender Einstellung ist zu beobachten: Dieser Kreis verläuft nicht durch P.



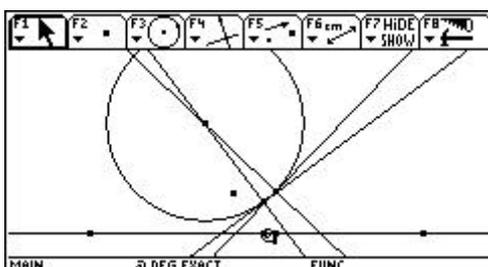
Der rechte Parabelpunkt Q wird als beweglicher Punkt auf der Parabel in Richtung des zweiten, festen Parabelpunktes P geführt. Der Mittelpunkt S des Kreises wandert auf der Normalen nach unten.



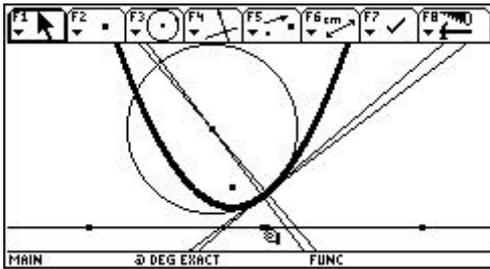
Die Annäherung wird fortgesetzt. Q wandert weiter auf der Parabel in Richtung P. (Im nebenstehenden Bild sind die Tangenten nicht „versteckt“.)



Die Punkte P und Q kommen zur Deckung.



Der bewegliche Punkt Q befindet sich nun links vom festen Punkt P, die linksseitige Annäherung wird veranschaulicht. Die Strecke auf der festen Normalen von P zwischen dem letzten Mittelpunkt der rechtsseitigen Annäherung und dem ersten Mittelpunkt der linksseitigen Annäherung grenzt die Lage des Mittelpunktes des Krümmungskreises ein.



Ein Durchgang mit „Trace on“ für den beweglichen Parabelpunkt Q verdeutlicht die Parabel.

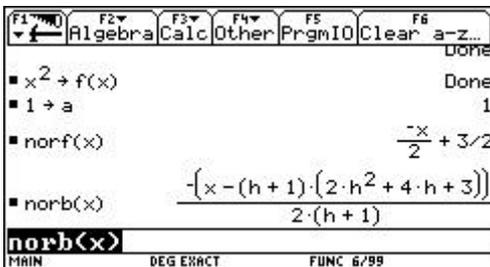
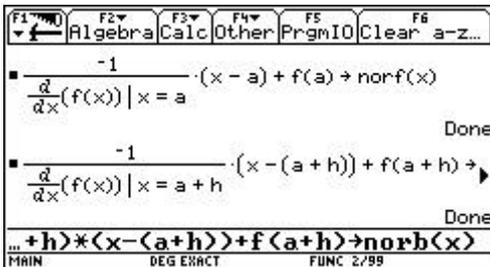
Nach der Punkt-Steigungsform für Geradengleichungen gilt für die Normale in $P(a/f(a))$ zum Graphen der Funktion f :

$$\text{norf}(x) = -\frac{1}{f'(a)} (x - a) + f(a) \quad (\text{norf für Normale im festen Punkt P}).$$

Analog ergibt sich für die Normale zum beweglichen Punkt $Q(a+h/f(a+h))$:

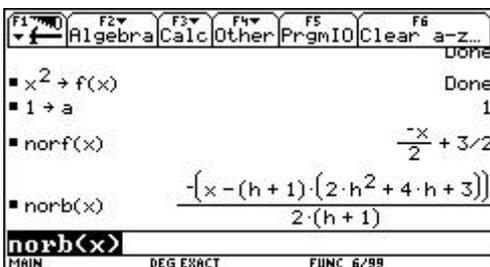
$$\text{norb}(x) = -\frac{1}{f'(a+h)} (x - (a+h)) + f(a+h).$$

Plant man längere Untersuchungen zu diesem Thema, lohnt es sich, diese Terme im TI - 92 zu definieren.

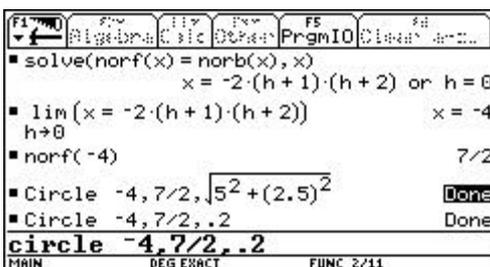


Bei konkreten Untersuchungen ist jeweils $f(x)$, ggf. a und/oder h zu definieren.

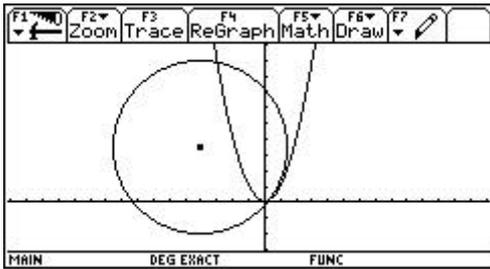
Für die Normalparabel in $P(1/1)$ bedeutet dies:



Die Schnittstelle der Normalen wird mit dem SOLVE – Befehl in Abhängigkeit von h ermittelt. Die Lösung $h=0$ entfällt, P und Q wären identisch und damit auch ihre Normalen. Für $h \rightarrow 0$ ist der Grenzwert sofort zu sehen, aber auch mit F3/3 herzuleiten.



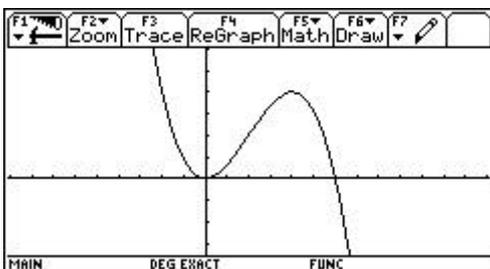
Da der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der Normalen zu P liegen muss, sind mit $x = -4$ und $\text{norf}(-4) = 3,5$ die Koordinaten dieses Mittelpunktes erarbeitet. Mit dem CIRCLE–Befehl lässt sich der Krümmungskreis veranschaulichen.



Ein zweiter Kreis mit gleichem Mittelpunkt und sehr kleinem Radius kann die Lage des Mittelpunktes des Krümmungskreises hervorheben.

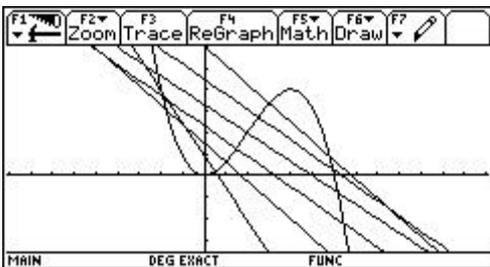
Aufgabe 4

Untersuche, ob sich mit Hilfe der Funktionen norf und norb für den Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$ an den Stellen: $a = 5$, $a = 2$, $a = 0$ der Krümmungskreis bestimmen lässt. Erläutere den Sachverhalt, wenn dies nicht möglich ist.

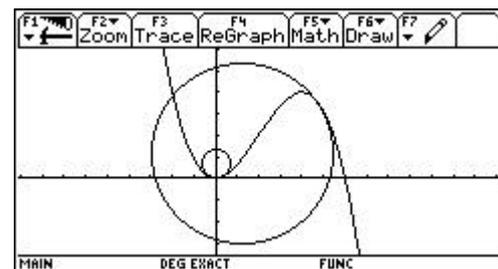
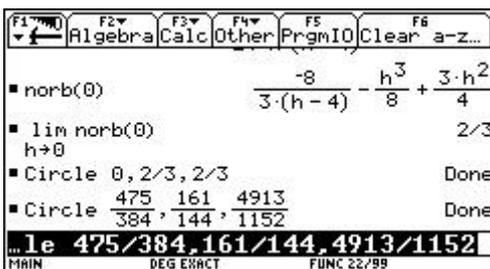
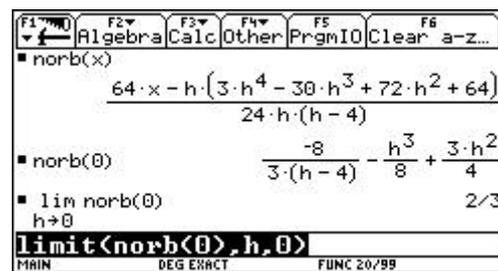
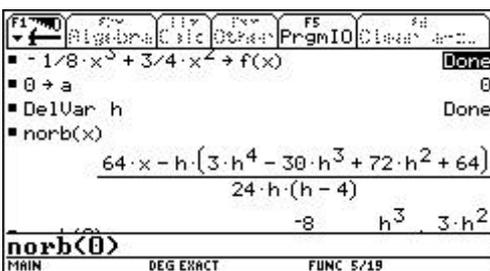


Ein Blick auf den Graphen und weitere Überlegungen zeigen:

- a=5: Der Kreis lässt sich, wie beschrieben, ermitteln.
- a=2: Dies ist die Wendestelle. Das Verfahren wird scheitern.
- Die Schüler können argumentieren.

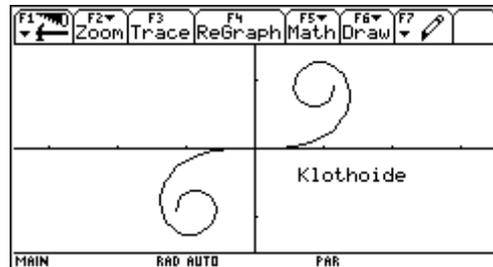
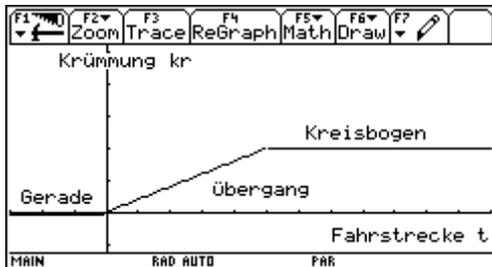


a=0: Der Graph besitzt an dieser Stelle einen Tiefpunkt, die Funktion norf ist hier nicht definiert. Für $h \rightarrow 0$ bestimmen die beweglichen Normalen auf der y-Achse eine Punktfolge, die gegen den Mittelpunkt des Krümmungskreises konvergiert. Für das nebenstehende Bild gilt die Zuordnung in der für den TI-92 charakteristischen Schreibweise: $\{3;2,5;2;1,5;1;0,5\} \rightarrow h$.



Beispiel zur Ermittlung einer Klothoiden

Erneut soll die Aufgabe 2 unter Einbindung eines Kreisbogens (mit konstanter Krümmung) bearbeitet werden. Jedoch sollen Übergangsbögen, die sogenannten Klothoiden, deren Krümmungen proportional zu ihren Längen zunehmen, einen Krümmungssprung verhindern. Zwischen jeder Anschlussgeraden und dem Kreisbogen ist also eine solche Klothoide einzufügen.



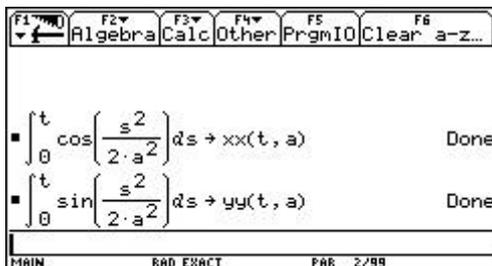
Aus dem Bildungsgesetz der Klothoide, der „natürlichen Gleichung“ $a^2 = r \cdot t$ (t: Länge der Klothoide vom Nullpunkt bis zum Anschlusspunkt; r: Radius des Anschlusskreises; a: Klothoidenparameter), ergeben sich für die Koordinaten eines Punktes der Klothoiden die Fresnel'schen Integrale:

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds \qquad y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds .$$

Für den Neigungswinkel τ der Tangente im Endpunkt der Klothoide den Klothoidenparameter a und der Länge t lässt sich folgende Beziehung nachweisen:

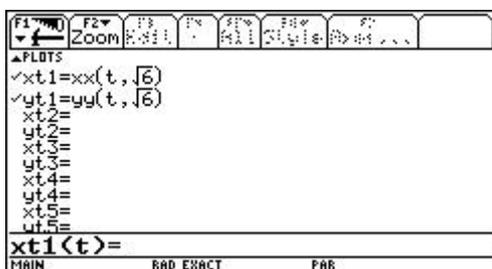
$$\tau = \frac{t^2}{2a^2} \quad (\text{vgl. Lit. [4], S.149}).$$

Eingabemöglichkeiten von Klothoiden als parametrisierte Funktionen in den TI-92.



Die Fresnel'schen Integrale werden in Abhängigkeit des Parameters t der Bogenlänge und des Parameters a der Klothoiden gemäß der natürlichen Gleichung $a^2 = t \cdot r$ eingegeben.

1. Der Parameter für die Bogenlänge muss zwingend t heißen.
2. Die Integrationsvariable muss von t verschieden sein.



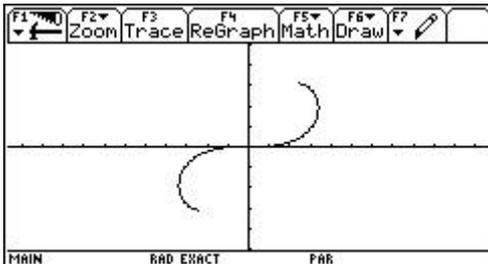
Nach der Wahl „Mode: Parametric“ lassen sich die Koordinaten in Abhängigkeit von a eingeben (hier: $a = \sqrt{6}$). Der Parameter t (die Bogenlänge der Klothoiden) ist im Window-Editor zu bestimmen. Siehe nächstes Bild.

```

F1 Zoom
tmin=-6.
tmax=6.
tstep=1
xmin=-11.6666666667
xmax=11.6666666667
xscl=1.
ymin=-5.00000000001
ymax=5.00000000001
yscl=1.
MAIN RAD EXACT PAR

```

Bei $t_{min} = -t_{max}$ ergibt sich eine zum Ursprung punktsymmetrische Klothoide. Bei einer sehr kleinen Zahl für t_{step} ist eine hohe Rechnerzeit zu erwarten. F2/5 sichert ein orthonormiertes Koordinatensystem.



Eine erste, zum Ursprung punktsymmetrische Klothoide im 1. und 3. Quadranten.

```

F1 Zoom F2 Edit F3 All F4 Style F5 F6 F7
APLOTS
vx1=xx(t,2)
vy1=-yy(t,2)
xt2=
yt2=
xt3=
yt3=
xt4=
yt4=
xt5=
yt5=
xt2(t)=
MAIN RAD EXACT PAR

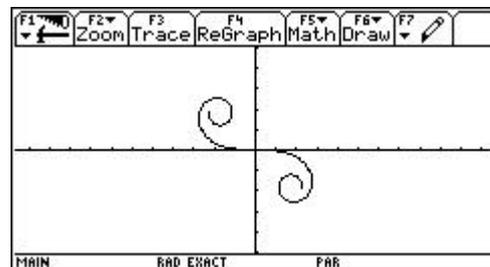
```

Mit entsprechender Variation der Vorzeichen eine Klothoide im 2. und 4. Quadranten.

```

F1 Zoom
tmin=-8.
tmax=8.
tstep=1
xmin=-11.6666666667
xmax=11.6666666667
xscl=1.
ymin=-5.00000000001
ymax=5.00000000001
yscl=1.
MAIN RAD EXACT PAR

```

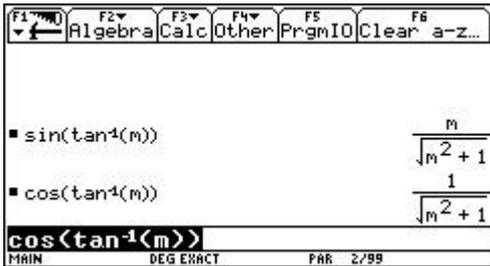


Will man Trassierungsprobleme mit dem TI-92 simulieren oder bearbeiten, ist es hilfreich, durch Vorüberlegungen zu ermöglichen, verschiedene Klothoiden, verschiedene anschließende Kreise und Geraden an verschiedenen Punkten des Koordinatensystems in beliebige Richtungen mit einem einzigen Laufparameter t zeichnen zu können. Dazu empfiehlt es sich zunächst, Klothoiden in allen vier Quadranten mittels eines positiven Laufparameters t , $0 < t < t_{max}$, darstellen zu können. Bei entsprechender Variation der Komponenten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\text{im 1. Quadranten: } K_I &= \begin{pmatrix} xx(t,a) \\ yy(t,a) \end{pmatrix}, & \text{im 2. Quadranten: } K_{II} &= \begin{pmatrix} -xx(t,a) \\ yy(t,a) \end{pmatrix}, \\
\text{im 3. Quadranten: } K_{III} &= \begin{pmatrix} -xx(t,a) \\ -yy(t,a) \end{pmatrix} & \text{und im 4. Quadranten: } K_{IV} &= \begin{pmatrix} xx(t,a) \\ -yy(t,a) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Soll eine dieser Klothoiden nun im Punkt $P(u/v)$ an die Gerade g mit der Gleichung $y = mx + b$ anschließen, so ist ihre Lage durch Drehung und Verschiebung entsprechend anzupassen.

$$K^* = D \cdot K + V = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot K + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ und } \alpha = \arctan(m).$$

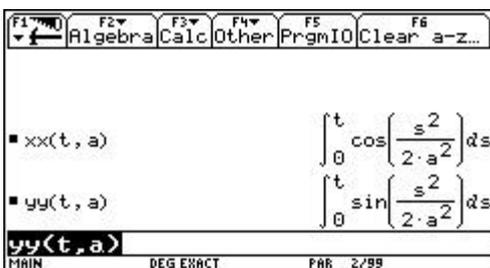


Die resultierende Eingabe in den TI-92 präsentiert (möglicherweise überraschende) Darstellungen, deren Äquivalenz von den Schülern aufgezeigt werden sollte.

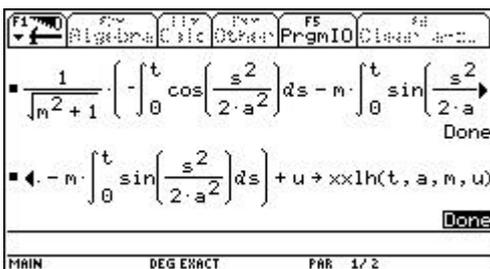
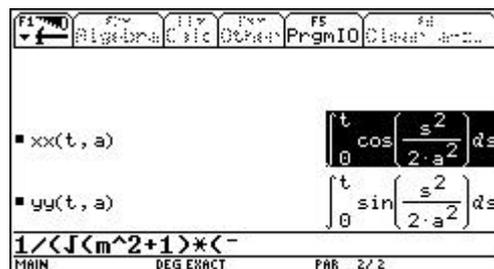
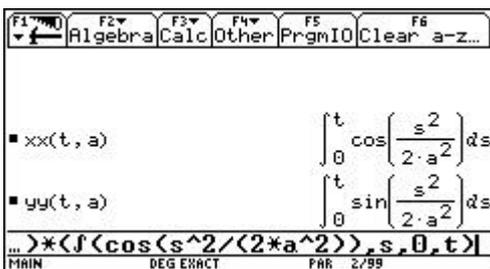
$$D = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzung der Terme von K_I bis K_{IV} ergeben sich die Gleichungen der vier Klothoiden, die in $P(u/v)$ an die Gerade g ohne Krümmungssprung nach „rechts von P und oberhalb von g “ (K_I^*), „links von P und oberhalb von g “ (K_{II}^*), „links von P und unterhalb von g “ (K_{III}^*), „rechts von P und unterhalb von g “ (K_{IV}^*) anschließen.

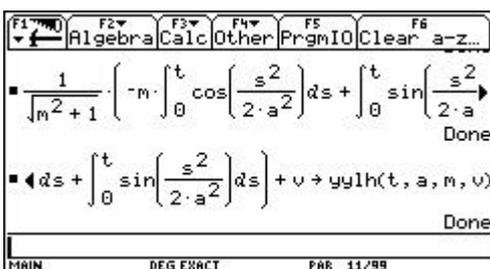
Beispielhaft sei die Eingabe der Terme für K_{II}^* in den TI - 92 dargestellt:



Es empfiehlt sich, die Terme $xx(t,a)$ und $yy(t,a)$ aufzurufen und später die Integrale in die Arbeitszeile einzufügen.



Die x-Koordinate $xxlh(t,a,m,u)$ der Klothoiden (l wie links, h wie hoch) ist nun nicht nur in Abhängigkeit von ihren Parametern t und a , sondern auch in Abhängigkeit der Anschlussstelle u der Geraden g und ihrer Steigung m festgelegt.



Analog bestimmt sich die y-Koordinate. Die x-Koordinate u des Schnittpunktes muss durch die y-Koordinate v ersetzt werden.

Die Eingabe für t muss dem Wert von tmax im Window - Editor der jeweiligen Klothoiden entsprechen. Für die Klothoide K_{III}^* ergibt sich folgende Festlegung des Kreismittelpunktes im TI-92:

$$\frac{-\int_0^t \cos\left(\frac{s^2}{2 \cdot a^2}\right) ds}{\sqrt{m^2+1}} + m \cdot \frac{\int_0^t \sin\left(\frac{s^2}{2 \cdot a^2}\right) ds}{\sqrt{m^2+1}} + t$$

Done

$$\left(t + \frac{a^2}{t \cdot \sqrt{m^2+1}} \left(\sin\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) + m \cdot \cos\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) \right) \right) \rightarrow \text{xxmld}(t, a, m, u)$$

MAIN DEG EXACT PAR 2/3

$$t + \frac{a^2}{t \cdot \sqrt{m^2+1}} \left(\sin\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) + m \cdot \cos\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) \right)$$

Done

$$\frac{-\int_0^t \cos\left(\frac{s^2}{2 \cdot a^2}\right) ds}{\sqrt{m^2+1}} + m \cdot \frac{\int_0^t \sin\left(\frac{s^2}{2 \cdot a^2}\right) ds}{\sqrt{m^2+1}} + t$$

Done

$$\left(t + \frac{a^2}{t \cdot \sqrt{m^2+1}} \left(\sin\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) + m \cdot \cos\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) \right) \right) \rightarrow \text{xxmld}(t, a, m, u)$$

MAIN DEG EXACT PAR 2/4

$$t + \frac{a^2}{t \cdot \sqrt{m^2+1}} \left(\sin\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) + m \cdot \cos\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) \right)$$

Done

$$\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2} + m \cdot \cos\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) \right) \rightarrow \text{xxmld}(t, a, m, u)$$

Done

MAIN DEG EXACT PAR 4/99

$$-m \cdot \frac{\int_0^t \cos\left(\frac{s^2}{2 \cdot a^2}\right) ds}{\sqrt{m^2+1}} - \frac{\int_0^t \sin\left(\frac{s^2}{2 \cdot a^2}\right) ds}{\sqrt{m^2+1}} + t$$

Done

$$-m \cdot \frac{\int_0^t \cos\left(\frac{s^2}{2 \cdot a^2}\right) ds}{\sqrt{m^2+1}} - \frac{\int_0^t \sin\left(\frac{s^2}{2 \cdot a^2}\right) ds}{\sqrt{m^2+1}} + t$$

Done

$$\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2} + m \cdot \cos\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) \right) \rightarrow \text{yyml}(t, a, m, u)$$

MAIN DEG EXACT PAR 2/2

$$\frac{t}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{a^2}{t \cdot \sqrt{m^2+1}} \left(m \cdot \sin\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) - \cos\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) \right)$$

Done

$$\left(t + \frac{a^2}{t \cdot \sqrt{m^2+1}} \left(m \cdot \sin\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) - \cos\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) \right) \right) \rightarrow \text{yyml}(t, a, m, u)$$

Done

MAIN DEG EXACT PAR 1/2

$$t + \frac{a^2}{t \cdot \sqrt{m^2+1}} \left(m \cdot \sin\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) - \cos\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) \right)$$

Done

$$\left(\sin\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) - \cos\left(\frac{t^2}{2 \cdot a^2}\right) \right) \rightarrow \text{yyml}(t, a, m, u)$$

Done

MAIN DEG EXACT PAR 3/99

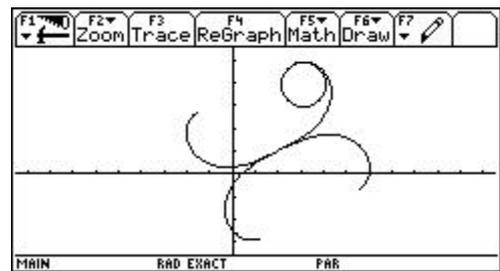
Sind alle Koordinaten der vier Mittelpunkte eingegeben, lassen sich am Beispiel der oben vorgelegten Zeichnung erste Kontrollen durchführen (Achtung: MODE RAD (RADIAN)).

$$\text{xxmrh}(6, \sqrt{6}, .5, 2) \rightarrow v1 \quad 3.11327366842$$

$$\text{yymrh}(6, \sqrt{6}, .5, 1) \rightarrow w1 \quad 3.90435677323$$

circle v1,w1,1

MAIN RAD EXACT PAR 2/99

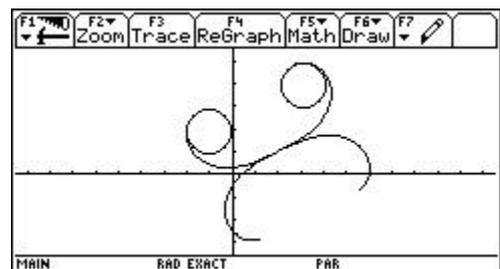


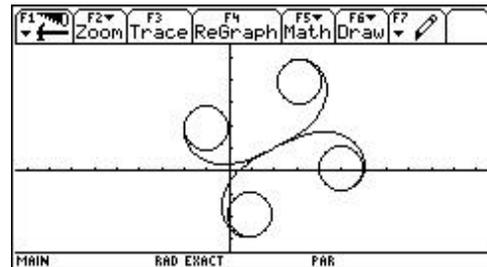
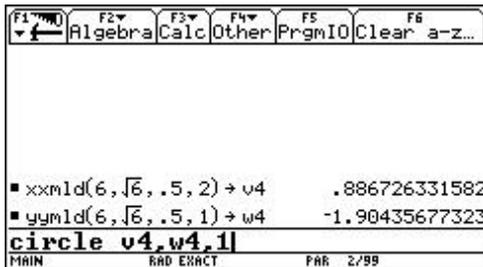
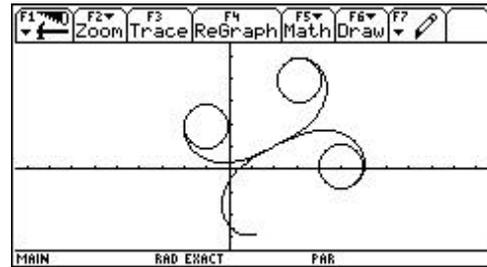
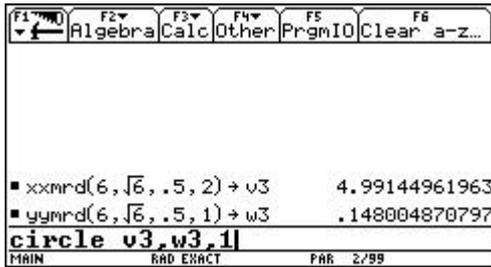
$$\text{xxmlh}(6, \sqrt{6}, .5, 2) \rightarrow v2 \quad -.991449619635$$

$$\text{yymlh}(6, \sqrt{6}, .5, 1) \rightarrow w2 \quad 1.8519951292$$

circle v2,w2,1

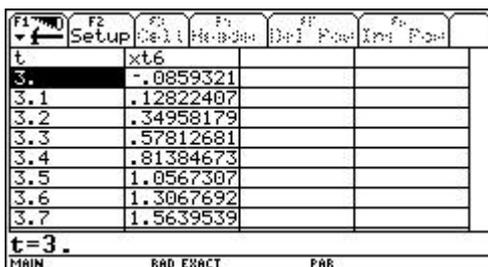
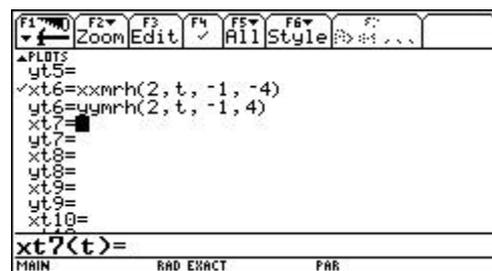
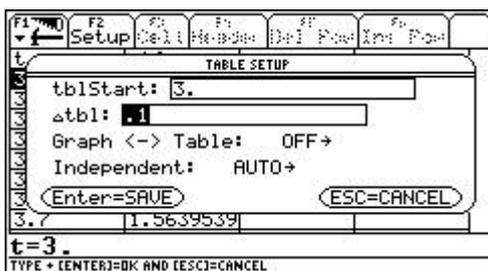
MAIN RAD EXACT PAR 2/99





Zurück zur Aufgabe 2:

Verbindet man die beiden Strahlen unter Inkaufnahme jeweils eines Krümmungssprungs an den Anschlussstellen nach Modellierung 1 (Viertelkreis), so besitzt dieser den Radius $\sqrt{32}$. Die Krümmung $k = 1/r$ hat mithin den genäherten Wert 0,1768. Lösung (3), die ganzrationale Funktion vierten Grades, weist die maximale Krümmung von 0,375, der entsprechende Krümmungskreis also den Radius $r = 8/3$ auf. Der Einsatz von Klothoiden ist also nur dann erfolgreich, wenn das Krümmungsmaximum der neuen Trasse geringer ist als der Wert 0,375 der Lösung (3). Selbstverständlich kann der zu ermittelnde Wert der neuen Trasse nicht besser sein als der direkte Anschluss durch einen Viertelkreis. Wählt man willkürlich die Bogenlänge der beiden Klothoiden zwischen Gerade und Anschlusskreis jeweils mit $t_{\max} = 2$ aus, kann man sich anschließend die Wertetabelle der Ortskurve der Kreismittelpunkte anschauen. Die freie Variable a , der Klothoidenparameter, muss in diesem Fall mit t belegt werden.



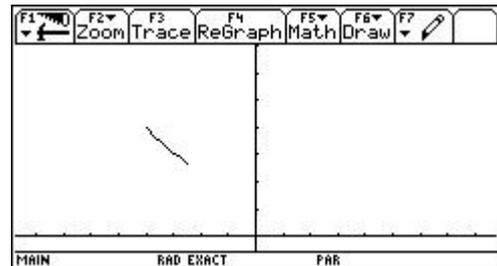
Aus Symmetriegründen soll der Mittelpunkt auf der y-Achse liegen. Die Tabelle zeigt, dass dies für $3,0 < t < 3,1$ der Fall ist. Die Intervallschachtelung kann im gewünschten Maß der Genauigkeit fortgesetzt werden.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Setup	Cell	Header	Del	Pos	Int	Pos
TABLE SETUP						
tblStart: 3.04053						
Δtbl: 1.E-6						
Graph <-> Table: OFF→						
Independent: AUTO→						
<input type="button" value="Enter=SAVE"/> <input type="button" value="ESC=CANCEL"/>						
3.040537 .00001145						
t=3.04053						
USE ← AND → TO OPEN CHOICES						

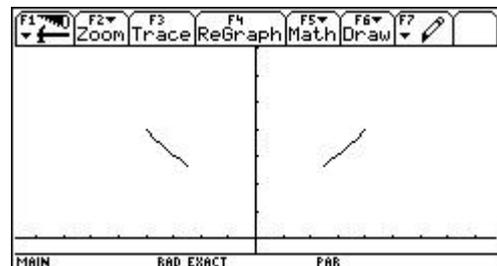
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Setup	Cell	Header	Del	Pos	Int	Pos
t	xt6	yt6				
3.04053	-.0000035	6.5879863				
3.040531	-.0000014	6.5879885				
3.040532	.00000078	6.5879906				
3.040533	.00000292	6.5879927				
3.040534	.00000505	6.5879949				
3.040535	.00000718	6.587997				
3.040536	.00000932	6.5879991				
3.040537	.00001145	6.5880013				
t=3.04053						
MAIN RAD EXACT PAR						

Wählt man für die Klothoiden die Länge 2, so ist der Klothoidenparameter a (hier t) zu $a = 3,040531$ zu wählen. Der Anschlusskreis besitzt die angenäherten Mittelpunktskoordinaten $M(0/6,588)$, sein Radius berechnet sich aus $a^2 = r \cdot t$, $t = 2: r = 4,622414$ und somit $k = 0,216337$. Die erste Klothoide lässt sich vom Anschlusspunkt $A(-4/4)$ nach rechts oben (hoch), also linksgekrümmt, mit $t_{\max} = 2$ zeichnen. Aus Symmetriegründen ergibt sich die nach links oben orientierte Klothoide ab dem Punkt $B(4/4)$. Die Gleichung des Strahls zu $y = -x$, $x \leq -4$ muss dem Parameter t so angepasst werden, dass gilt: ($x \leq -4 \Leftrightarrow t \leq 2$). Entsprechendes gilt für die Gleichung des zweiten Strahls zu $y = x$, $x > 4$. Zum Schluss ist der Kreisbogen einzufügen. Die Koordinaten des Mittelpunktes sind der letzten Wertetabelle zu entnehmen.

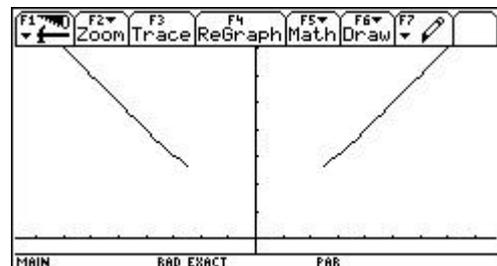
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Zoom	Edit	All	Style			
▲PLOTS						
yt5=						
✓xt6=xxrh(t, 3.040531, -1, -4)						
✓yt6=yyrh(t, 3.040531, -1, 4)						
xt7=xxlh(t, 3.040531, 1, 4)						
yt7=yylh(t, 3.040531, 1, 4)						
xt8=2·t - 8						
yt8=-(2·t - 8)						
xt9=2·t + 4						
yt9=2·t + 4						
yt5(t)=						
MAIN RAD EXACT PAR						



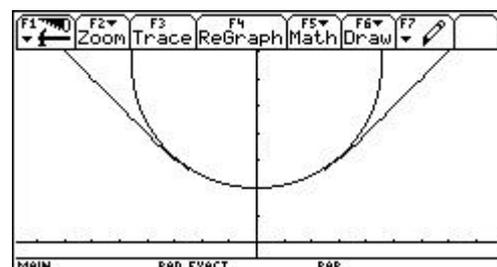
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Zoom	Edit	All	Style			
▲PLOTS						
yt5=						
✓xt6=xxrh(t, 3.040531, -1, -4)						
✓yt6=yyrh(t, 3.040531, -1, 4)						
xt7=xxlh(t, 3.040531, 1, 4)						
yt7=yylh(t, 3.040531, 1, 4)						
xt8=2·t - 8						
yt8=-(2·t - 8)						
xt9=2·t + 4						
yt9=2·t + 4						
yt5(t)=						
MAIN RAD EXACT PAR						



F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Zoom	Edit	All	Style			
▲PLOTS						
yt5=						
✓xt6=xxrh(t, 3.040531, -1, -4)						
✓yt6=yyrh(t, 3.040531, -1, 4)						
xt7=xxlh(t, 3.040531, 1, 4)						
yt7=yylh(t, 3.040531, 1, 4)						
xt8=2·t - 8						
yt8=-(2·t - 8)						
xt9=2·t + 4						
yt9=2·t + 4						
yt5(t)=						
MAIN RAD EXACT PAR						



F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
circle 0,6.587989,4.622414					
MAIN RAD EXACT PAR 0/99					



Man kann auf das Plotten des ganzen Kreises verzichten und nur den fehlenden Kreisbogen einfügen, wenn man bei geeigneter Festlegung des Startparameters t_1 und des Zielparameters t_2 diesen als parametrisierte Funktion bestimmt.

```

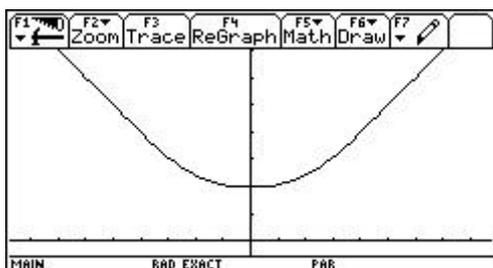
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clear a-z...
solve(4.622414*cos(t)=xxrh(2,3.040531)
t=6.28318530718*en33+2.13985773061
-2.13985773061 → t1 -213985773061
1000000000000
-π - t1 → t2 -π + 213985773061
1000000000000
-π - t1 → t2 -1.00173492298
π - t1 → t2
MAIN RAD EXACT PAR 4/99

```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Zoom Edit Plot Style Plot...
PLOTS
x1t9=2*t+4
y1t9=2*t+4
x1t10=
y1t10=
x1t11=4.622414*cos(t1 + (t2-t1)/2 * t)
y1t11=4.622414*sin(t1 + (t2-t1)/2 * t) + 6.587
x1t12=
y1t12=
yt11(t)=...2-t1)/2*t)+6.5879885
MAIN RAD EXACT PAR

```



Planung eines Mathematikprojekts: Straßenbau

Im modernen Straßenbau sind Klothoiden neben Geraden und Kreisbögen unverzichtbare Trasseierungselemente. Ein Projekt „Straßenbau“ kann den Schülern einen Einblick in den hohen Anwendungsbezug gewähren, den Krümmung und Funktionen in Parameterdarstellung besitzen. Möglicherweise kann man in Straßenbauämtern folgende Materialien entleihen, die die experimentelle Arbeit im Projekt wesentlich unterstützen können:

- Lagepläne von gebauten Straßen oder aus Planfeststellungsverfahren,
- Biegestäbe (Splines) und Fixiergewichte,
- Klothoiden- und Radienschablonen.

Als Literatur empfiehlt sich:

- Richtlinien für die Anlage von Straßen (RAS), Teil Linienführung (RAS-L), Ausgabe 1995, AZ 31230/2 Bundesministerium für Verkehr.
- Hennecke u. a.: Handbuch Ingenieurvermessung, Verkehrsbau – Trassen. VEB Verlag, Berlin ISBN 3 – 345 – 00345 – 7.

Literatur

- [1] **Wippermann, H.:** Bogenlängen und Krümmung im Analysisunterricht. In: Mathematik in der Schule, 34 (1996) 6, 363-373 und 7/8, 422-428.
- [2] **Wörle, K., Kratz, J., Keil, K.-A.:** Infinitesimalrechnung. Bayerischer Schulbuch-Verlag, München 1969.
- [3] **Steinberg, G.:** Die Krümmung von Funktionsgraphen. In: Didaktik der Mathematik, 3 (1985), 222–236.
- [4] **Kirsch, A.:** Übergangsbögen bei Eisenbahngleisen. In: MNU, 50 (1997) 3, 144-155.
- [5] **Reuter, D.:** Verkürzte Herleitung für die Krümmung einer ebenen Kurve. In: Praxis Mathematik, 39 (1997) 6, 261.
- [6] **Hahn, O., Dzewas, J.:** Analysis (LK). Westermann-Verlag, Braunschweig 1994.
- [7] **Jahnke, T. u. a.:** Analysis Grundkurse. Cornelsen, Berlin 1995.

Regression

Techniken der Kurvenanpassung

Trends, Methoden, Fehlerabschätzung, Transformationen

Heiko Knechtel, Rainer Kühl

Tabellenkalkulationen, CAS, auch GTR bieten die Möglichkeit, in verstärktem Umfang „**diskrete Mathematik**“ zu betreiben und in diesen Zusammenhang auch reale Daten einzubeziehen. Ein, wenn nicht der zentrale Aspekt, ist dann die **funktionale Beschreibung der Daten** zum Zwecke der Prognose (Trendanalyse). Dazu bedarf es zuerst bestimmter **Modellvorstellungen** und eines mathematischen Werkzeuges, das dann die Funktionsanpassung ermöglicht. Dieses Werkzeug ist die Technik der **Regression**. Weil es so bedeutsam ist, findet sich in jeder Tabellenkalkulation und in jedem CAS ein Regressionsmodul, der in vielfältiger Weise anwendbar ist.

Die **Technik der Regression** beruht auf der Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers mit der Funktion des aus der Modellvorstellung heraus begründeten Typs.

Da reale Daten einem **statistischen Fehlerrauschen** unterliegen, ergeben sich auch Fehler bei den Regressionsfunktionen. Regression hat also auch einen **statistischen Aspekt**, sodass sich Fragen z.B. zu Tests für Regressionskoeffizienten ergeben. Die zugehörigen Testverteilungen sind aber für die Schulmathematik wohl kaum zugänglich, es bleiben aber Methoden der **Simulation**, die mit Tabellenkalkulationen und CAS „leicht“ durchführbar sind.

Lineare Regression (polynomiale Regression) ist besonders einfach, weil die Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems hinausläuft. Daher versucht man bei nichtlinearen (nichtpolynomialen) Problemen **Koordinatentransformationen** so zu finden, dass die eigentliche Regressionsrechnung linear (polynomial) erfolgen kann.

Luftballons - Einführung in die Regression (Grundkurs Klasse 12)

Wenn man einen Luftballon aufbläst, ändert sich mit dem Volumen auch der Umfang. Gibt es einen funktionalen Zusammenhang, der dieses (näherungsweise) bestätigt?

Phase 1: Experimentieren – Partner-/Gruppenarbeit

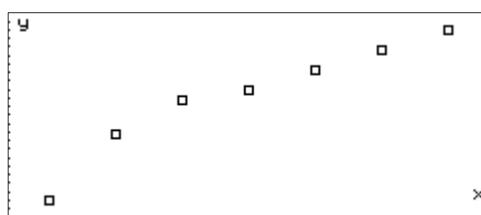
Mehrere Luftballons werden (bis zum Platzen) aufgeblasen, dabei wird bei jedem Atemstoß der zugehörige Umfang des Ballons mit einem Maßband gemessen. Man ist bemüht, möglichst gleichmäßig zu pusten, um die Anzahl als Maß für das Volumen zu benutzen. Vergleichsweise führt eine Gruppe das Experiment mit einer Ballpumpe durch. Einige Gruppen bemühen sich, den Ballon jedesmal in Kugelform zu bringen.

Phase 2: Auswertung – Tabellieren der Daten und graphische Darstellung

Die Daten werden in den Taschencomputer eingegeben und anschließend wird ein Datenplot durchgeführt.

DATA	Anz Pusten	Umfang
	c1	c2
1	1	43
2	2	55.6
3	3	62
4	4	64
5	5	67.5
6	6	71.5
7	7	75

c1=



Phase 3: Diskussion des Graphen – Aufstellen einer Vermutung für einen funktionalen Zusammenhang

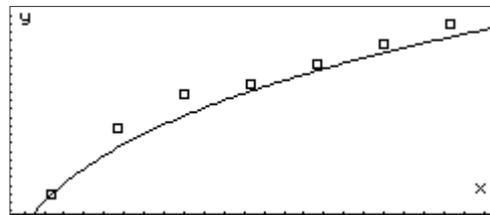
In den unterschiedlichen Graphen der einzelnen Gruppen lässt sich eine gemeinsame „Form“ erkennen. Es wird vermutet, dass diese „Form“ der Graph einer Wurzelfunktion oder einer Logarithmusfunktion ist. Der Ansatz über die Logarithmusfunktion wird nach kurzer Diskussion verworfen, da einige Eigenschaften der Logarithmusfunktion durch die Daten nicht erfüllbar sind.

Phase 4: Experimentelle Bestimmung einer zugehörigen Funktionsgleichung – Nutzung der Tabellenkalkulation des TC

In der TC-Tabelle werden zwei Parameter eingegeben und die Funktion damit berechnet. Gleichzeitig wird diese Funktion zusammen mit dem Datenplot dargestellt und visuell begutachtet. Einige Gruppen experimentieren eher planlos, die überwiegende Anzahl arbeitet sehr gezielt. Es wird schnell erkannt, dass sich a weitgehend festlegen lässt und nur noch b manipuliert werden muss.

DATA	Anz Pus...	Umfang	Paramet...	a*x^b
	c1	c2	c3	c4
1	1	43	"a="	43.
2	2	55.6	43	52.5735
3	3	62	"b="	59.1335
4	4	64	.29	64.2785
5	5	67.5		68.5756
6	6	71.5		72.299
7	7	75		75.6044

c4=c3[2]*c1^c3[4]

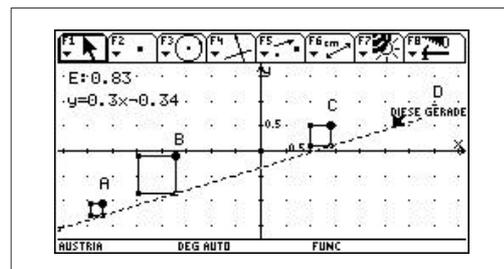


Phase 5: Suche nach Gütekriterien für die Approximation – Fehler, absoluter Betrag des Fehlers, quadratischer Fehler

Die Fehleruntersuchung lässt sich sehr leicht mit der Tabellenkalkulation durchführen. Die Überlegungen zur Bestimmung des quadratischen Fehlers werden durch den Aspekt der unterschiedlichen Gewichtung von dichten und weit entfernten Punkten motiviert. Im Anschluss wird gefordert, dass die Summe der quadratischen Fehler möglichst gering wird. Nach der Einbettung dieser Forderung wird wieder in den Gruppen experimentiert und jeweils eine optimale Approximationsfunktion bestimmt.

DATA	a*x^b	Fehler	Quadrat	Summe
	c4	c5	c6	c7
1	43.	0.	0.	19.6145
2	52.5735	3.02647	9.15951	
3	59.1335	2.8665	8.2168	
4	64.2785	-.278518	0.77572	
5	68.5756	-1.07562	1.15696	
6	72.299	-.799005	0.638408	
7	75.6044	-.604368	0.365261	

c7=sum(c6)



Phase 6: Verallgemeinerung des Verfahrens – Herleitung der linearen Regressionsfunktion

Für die Herleitung der optimalen Approximationsfunktion wird eine zweistellige Funktion untersucht, die von den Parametern a (Steigung) und b (y-Achsenabschnitt) abhängt. Für ein konkretes Beispiel (5 Punkte sollen durch eine Gerade ausgeglichen werden) wird die Regressionsgerade explizit bestimmt. Hierzu wird der Begriff der partiellen Ableitung eingeführt und mit seiner Hilfe wird die Funktion bzgl. a und b optimiert.

Anschließend wird das Regressionsmodul des TC erforscht, das für die lineare Regression den ermittelten Wert bestätigt. Die Bedeutung des Regressionskoeffizienten wird anschaulich anhand mehre-

rer Beispiele verdeutlicht, auf eine exakte Herleitung kann im Grundkurs bei entsprechender Schwerpunktsetzung durchaus verzichtet werden.

Für die „Power-Regression“ wird für das Ballonbeispiel ein geringfügig besserer Wert bzgl. der Quadratsumme gefunden. Als Regresionsgleichung wird vom TI-92 $y = 44,424254 \cdot x^{0,270753}$ angegeben.

Phase 7: Plausibilitätsuntersuchung der Ergebnisse

Für den „idealen“ Luftballon, die Kugel, kann das Problem mit oder ohne Hilfe des CAS direkt gelöst werden.

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$U_{\text{Kugel}} = 2 \cdot \pi \cdot r \Leftrightarrow U = \sqrt{3\pi \cdot V} = k \cdot V^{\frac{1}{3}}$$

Diese Abhängigkeit des Umfanges vom Volumen kann die durch Regression gefundenen Ergebnisse plausibel bestätigen, die Abweichungen sind durch die Form des Luftballons nachvollziehbar.

Trends

Die folgende Tabelle zeigt eine längere Entwicklungsperiode des Dow-Jones-Indexes (mittlerer Wochenindex):

Wochenab Jan1990	Dow-Jones- Index	21	2845	44	2430	67	2919
1	2753	22	2821	45	2502	68	2933
2	2794	23	2935	46	2540	69	2928
3	2669	24	2893	47	2565	70	2877
4	2600	25	2882	48	2533	71	2942
5	2553	26	2845	49	2566	72	2924
6	2623	27	2899	50	2597	73	2892
7	2619	28	2914	51	2593	74	2914
8	2636	29	3000	52	2621	75	3035
9	2602	30	2905	53	2634	76	2975
10	2650	31	2917	54	2523	77	2994
11	2687	32	2716	55	2484	78	2913
12	2756	33	2747	56	2629	79	2958
13	2708	34	2656	57	2654	80	2962
14	2700	35	2612	58	2772	81	2991
15	2722	36	2614	59	2902	82	3013
16	2763	37	2616	60	2935	83	2985
17	2667	38	2567	61	2888	84	2989
18	2657	39	2453	62	2914	85	3001
19	2722	40	2516	63	2939	86	2898
20	2822	41	2524	64	2930	87	3039
		42	2416	65	2866	88	3044
		43	2516	66	2881	89	3007

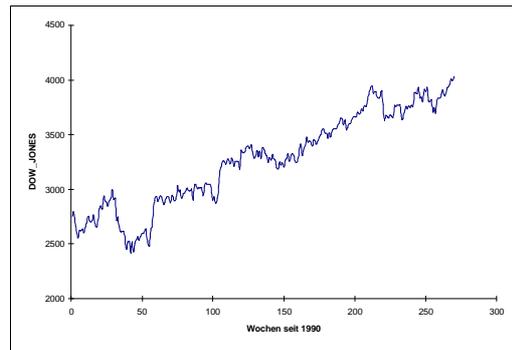
90	3015
91	3011
92	3017
93	2943
94	3019
95	3060
96	3046
97	3046
98	3042
99	2973
100	2902
101	2935
102	2872
103	2919
104	3023
105	3169
106	3204
107	3259
108	3256
109	3225
110	3258
111	3277
112	3230
113	3283
114	3269
115	3209
116	3254
117	3259
118	3249
119	3181
120	3354
121	3339
122	3333
123	3369
124	3392
125	3394
126	3370
127	3407
128	3343
129	3288
130	3291
131	3354
132	3293
133	3345
134	3278
135	3379

136	3365
137	3321
138	3307
139	3247
140	3290
141	3271
142	3319
143	3279
144	3272
145	3195
146	3187
147	3251
148	3223
149	3240
150	3207
151	3266
152	3286
153	3324
154	3255
155	3314
156	3321
157	3305
158	3264
159	3242
160	3291
161	3374
162	3412
163	3312
164	3357
165	3404
166	3478
167	3427
168	3445
169	3435
170	3397
171	3456
172	3439
173	3414
174	3449
175	3482
176	3500
177	3540
178	3553
179	3512
180	3512
181	3467

182	3516
183	3476
184	3543
185	3555
186	3553
187	3552
188	3583
189	3605
190	3652
191	3645
192	3589
193	3634
194	3547
195	3566
196	3599
197	3603
198	3645
199	3665
200	3662
201	3664
202	3704
203	3688
204	3697
205	3735
206	3717
207	3762
208	3754
209	3821
210	3867
211	3914
212	3945
213	3871
214	3895
215	3887
216	3839
217	3832
218	3863
219	3896
220	3775
221	3636
222	3674
223	3661
224	3649
225	3682
226	3670
227	3660

228	3766
229	3757
230	3772
231	3773
232	3777
233	3637
234	3647
235	3709
236	3754
237	3735
238	3765
239	3747
240	3769
241	3755
242	3881
243	3886
244	3875
245	3933
246	3832
247	3843
248	3797
249	3910
250	3891
251	3931
252	3808
253	3801
254	3815
255	3708
256	3746
257	3691
258	3807
259	3833
260	3834
261	3867
262	3908
263	3869
264	3858
265	3929
266	3939
267	3954
268	4012
269	3990
270	4036

- Zeichnen Sie ein Punkt- oder ein Polygonzugdiagramm zu der Tabelle.
- Legen Sie „per Augenmaß“ eine „Trendgerade“ in das Diagramm.
- Blenden Sie Ausschnitte aus der Dow-Jones-Entwicklung aus, und bestimmen Sie den Trend bezüglich dieser Ausschnitte.
- Übrigens: Der Dow-Jones-Index stand am 19.7.99 auf 11187 Punkten.



Die Strategie

Die Frage ist nun, warum alle „per Augenmaß“ abgeschätzten Trendgeraden „ziemlich“ gleich sind.

Die Frage gibt Anlass, einen Abweichungsbegriff (Abweichung von der Trendgeraden) zu erörtern. Schülerinnen und Schüler nennen in der Regel den Abweichungsbetrag oder den lotrechten Abstand. Das Abweichungsquadrat kann als Rechenvereinfachung des „unangenehmen“ Abweichungsbetrages verstanden werden. Die geschätzten Trendgeraden sind umso besser, je kleiner die Summe der gewählten Abweichungen ist. Daher sind die Koeffizienten des Geradenterms so zu wählen, dass diese Summe minimiert wird.

$$\text{MAF} = \sum_i |y_i - (a \cdot x_i + b)|, \text{MLF} = \frac{1}{a^2 + 1} \sum_i (y_i - (a \cdot x_i + b))^2, \text{MQF} = \sum_i (y_i - (a \cdot x_i + b))^2$$

Abhängigkeit des Eisengehaltes [y in %] kieseligler Hämatiterze von der Dichte [x in g/cm³] nach *Bottge*, Bergbauwiss. 10, 1963, 377:

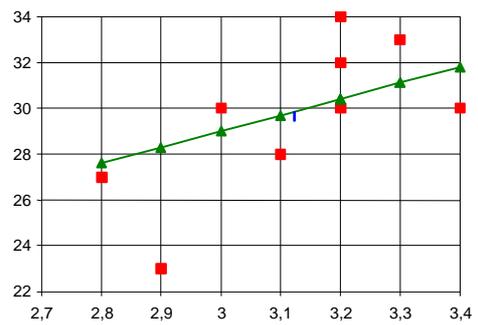
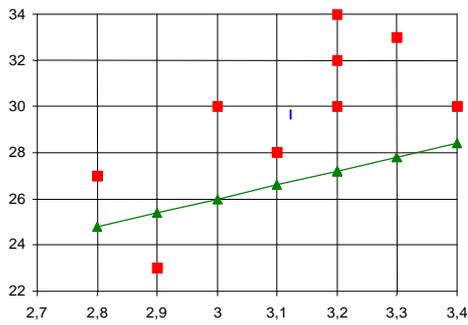
x	2,8	2,9	3	3,1	3,2	3,2	3,2	3,3	3,4
y	27	23	30	28	30	32	34	33	30

- Legen Sie verschiedene Trendgeraden („nach Augenmaß“) fest.
- Bestimmen Sie die Abweichungssummen nach den verschiedenen Methoden.

Mittlerer absoluter, lotrechter und quadratischer Fehler:

a=	6	b=	8	
x	y	MAF	MLF	MQF
2,8	27	2,20	4,84	4,84
2,9	23	2,40	5,76	5,76
3	30	4,00	16,00	16,00
3,1	28	1,40	1,96	1,96
3,2	30	2,80	7,84	7,84
3,2	32	4,80	23,04	23,04
3,2	34	6,80	46,24	46,24
3,3	33	5,20	27,04	27,04
3,4	30	1,60	2,56	2,56
		31,20	3,66	135,28

a=	7	b=	8	
x	y	MAF	MLF	MQF
2,8	27	0,60	0,36	0,36
2,9	23	5,30	28,09	28,09
3	30	1,00	1,00	1,00
3,1	28	1,70	2,89	2,89
3,2	30	0,40	0,16	0,16
3,2	32	1,60	2,56	2,56
3,2	34	3,60	12,96	12,96
3,3	33	1,90	3,61	3,61
3,4	30	1,80	3,24	3,24
		17,90	1,10	54,87



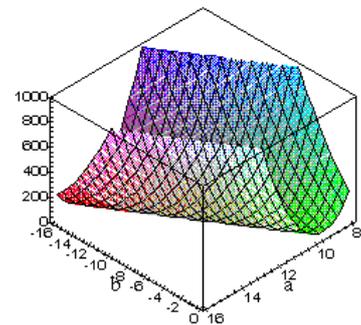
Geht man von dem „allgemeinen Geradenterm“ $a \cdot x + b$ aus, so erhält man den MQF als Funktion der Variablen a und b :

$$\text{MQF} = -1674,4 \cdot a - 534 \cdot b + 9 \cdot b^2 + 56,2 \cdot a \cdot b + 88,03 \cdot a^2 + 8011.$$

Die Strategie ist, diesen Fehler zu minimieren, also die „tiefste Stelle“ des elliptischen Paraboloids zu finden.

Dazu können die Ableitungen nach a bzw. b gebildet und null gesetzt werden:

$$\begin{cases} -1674,4 + 56,2b + 176,06a = 0 \\ -534 + 18b + 56,2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \approx 12,07 \\ b \approx -8,01 \end{cases}$$



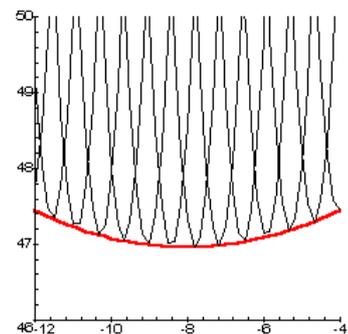
Schülerinnen und Schüler stellen normalerweise nicht das Gleichungssystem auf, sondern gehen schrittweise vor:

$$176,06a + 56,2b - 1674,4 = 0 \Leftrightarrow a_{\min} \approx -0,3192b + 9,5104$$

$$\Rightarrow \text{MQF}(b) \approx 0,0302b^2 + 0,4842b + 48,8980$$

$$0,0604b + 0,4842 = 0 \Leftrightarrow b \approx -8,01 \Rightarrow a \approx 12,07$$

- Gehen Sie entsprechend unter Benutzung des MAF bzw. des MLF vor.



Die Theorie

Ist $y = a \cdot x + b$ die Gleichung der (zukünftigen) Regressionsgeraden, so soll der mittlere quadratische Fehler $\text{MQF} = \sum_i (y_i - (a \cdot x_i + b))^2$ minimiert werden. Dazu werden die (partiellen) Ableitungen von MQF berechnet und a und b so bestimmt, dass sie null werden. (Das Ganze ist analytisch „unproblematisch“, da MQF ein nach oben geöffnetes, elliptisches Paraboloid ist.)

Also ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} -2 \sum_i (y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ -2 \sum_i (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_i y_i x_i - a \sum_i x_i^2 - b \sum_i x_i = 0 \\ \sum_i y_i - a \sum_i x_i - n \cdot b = 0 \end{cases}$$

zu lösen:

Die Lösungen sind $a = \frac{n \sum y_i x_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2}$, $b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum y_i x_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2}$.

Fehlerabschätzungen

Messwerte sind stets mit einem gewissen Fehler behaftet, der sich wiederum auf die Regressionsgerade auswirkt.

Man kann mithilfe eines Zufallszahlengenerators verschiedene Tabellen erzeugen, bei denen die Messwerte in den Messfehlerintervallen schwanken, und damit den Bereich abschätzen, in dem die Regressionsgerade schwankt.

Nimmt man einen Messfehler der Dichte von 2% und einen Messfehler des Eisengehaltes von 0,5% an, so kann man z.B. folgende Daten erhalten:

Die Originaldaten

X	2,8	2,9	3	3,1	3,2	3,2	3,2	3,3	3,4
Y	27	23	30	28	30	32	34	33	30

Daten mit Fehlerrauschen

X	2,75	2,93	2,96	3,11	3,24	3,24	3,18	3,36	3,39
Y	27,03	23,01	30,13	27,9	29,94	31,95	33,99	32,88	30,09

Erzeugt man viele solche Regressionsgeraden mit Fehlerrauschen, kann man die Größe der Schwankungen der Parameter abschätzen. Bei 100 Versuchen ergab sich für die Steigung:

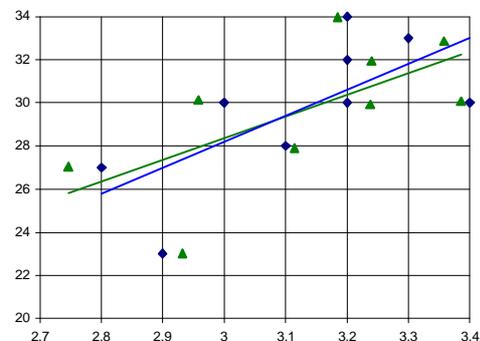
Mittelwert = 11.52

Standardabweichung = 1.33

1_sigma_Umgebung = [10.20, 12.85]

2_sigma_Umgebung = [8.87, 14.17]

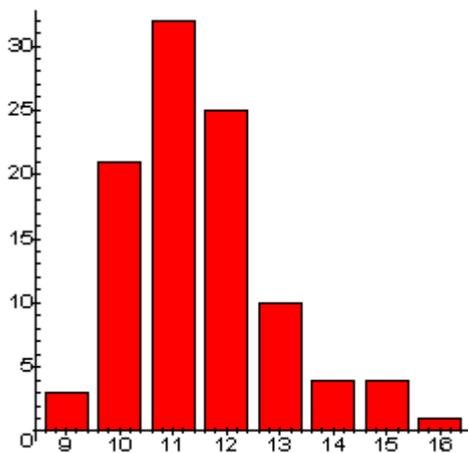
3_sigma_Umgebung = [7.55, 15.50]



Um ein Konfidenzintervall für die Steigung (den Regressionskoeffizienten) abzuschätzen, wird aus den erzeugten Regressionskoeffizienten eine Verteilung (durch Klassenbildung) erzeugt:

Steigung	Anzahl
9	3
10	21
11	32
12	25
13	10
14	4
15	4
16	1

Aus ihr kann man ablesen, in welchem Bereich z.B. 95% der Ausfälle liegen.

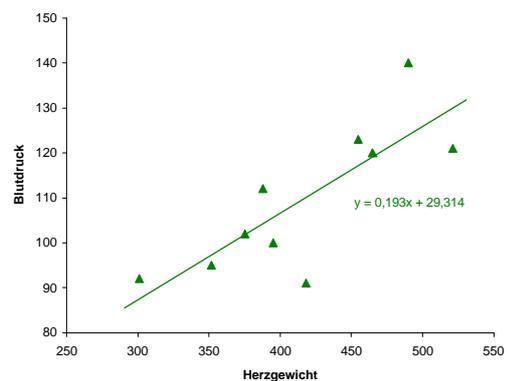
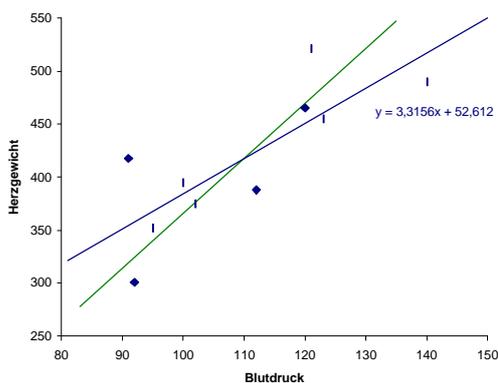


Die zweite Regressionsgerade und der Korrelationskoeffizient

Diastolischer Blutdruck (x in mmHg) und Herzgewicht [y in g] von 10 an Gehirnblutung gestorbenen Männern (*Gibson, Jowett, Appl. Statistics 6, 1957, 115*):

X	121	120	95	123	140	112	92	100	102	91
Y	521	465	352	455	490	388	301	395	375	418

Welche der beiden Größen als x - und welche als y -Wert betrachtet wird, ist im Grunde willkürlich. Werden die Zeilen so belassen, wird der MQF in Herzgewicht-Richtung minimiert, werden sie vertauscht, findet die Minimierung in Blutdruck-Richtung statt. So gehören immer zwei Regressionsgeraden zu einer Messreihe. Hier sind es $y = 3,3156 \cdot x + 52,6119$ und $x = 0,1930 \cdot y + 29,3143$. Invertiert man die zweite Gerade zu $y = 5,1815 \cdot x - 151,8917$, so erhält man die zwei Regressionsgeraden in einem Diagramm:



Der Kosinus des Winkels zwischen den beiden Regressionsgeraden

$$\frac{m_{xy} + m_{yx}}{\sqrt{1+m_{xy}^2} \cdot \sqrt{1+m_{yx}^2}}$$

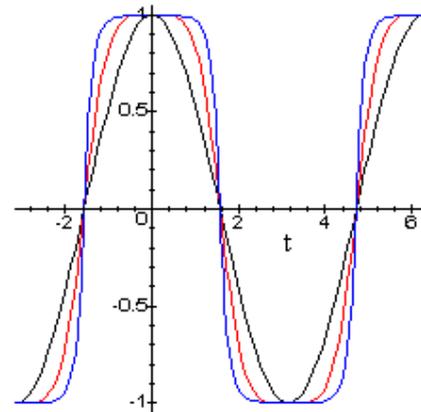
kann als Maß für die „Linearität“ dienen. Der „rechentechnisch einfachere“ Pearsonsche Korrelationskoeffizient wird zwar ebenfalls als Kosinus, aber als der des Winkels zwischen den n-dimensionalen Vektoren $[x_1-x_-,x_2-x_-,...]$ und $[y_1-y_-,y_2-y_-,...]$ festgelegt, wobei $[x_-,y_-]$ der Schwerpunkt der Punktwolke ist:

$$r = \frac{\sum_i (x_i - x_-)(y_i - y_-)}{\sqrt{\sum_i (x_i - x_-)^2 \cdot \sum_i (y_i - y_-)^2}}$$

Beide Maße sind nicht direkt ineinander überführbar. Es gilt aber $r^2 = m_{xy} \cdot m_{yx}$ und mit

$$r = \cos(t) \text{ auch } m_{xy} = \cos(t) \cdot \kappa \text{ und } m_{yx} = \frac{\cos(t)}{\kappa}$$

Für beide Maße erhält man so eine funktionale Darstellung in Abhängigkeit von t (und κ) (in der Abbildung für $\kappa=1$ und $\kappa=5$):



Nichtlineare Regression

Radioaktiver Zerfall

Absorption von beta-Strahlung (Yttrium90, 2.274 MeV) in Aluminium:

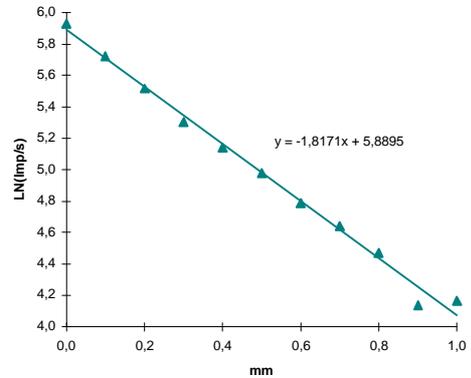
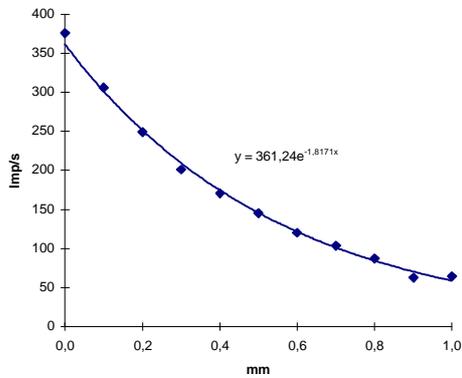
Dicke in mm	Imp/s	Imp/s	Imp/s	Imp/s	Imp/s	MW Imp/s
0,0	369	376	378	383	373	375,8
0,1	304	314	306	305	301	306,0
0,2	252	252	252	244	245	249,0
0,3	197	206	207	193	201	200,8
0,4	177	179	163	166	169	170,8
0,5	142	142	145	149	149	145,4
0,6	118	122	122	120	118	120,0
0,7	100	105	105	103	104	103,4
0,8	89	89	84	88	87	87,4
0,9	8	74	78	78	75	62,6
1,0	60	67	65	64	66	64,4

Stellt man die Mittelwerte in Abhängigkeit von der Dicke dar, so erhält man eine „abfallende Kurve“, die Anlass zur Hypothese eines exponentiellen Absorptionsgesetzes $N = N_0 \cdot e^{-L \cdot d}$ gibt.

Die logarithmische Skalentransformation $\ln(N) = \ln(N_0) - L \cdot d$ müsste dann auf eine Gerade führen:

Dicke in mm	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
LN(MW_ Imp/s)	5,9291	5,7236	5,5175	5,3023	5,1405	4,9795	4,7875	4,6386	4,4705	4,1368	4,1651

Tatsächlich ergibt sich „ziemlich gut“ die Regressionsgerade $y = -1,8171 \cdot x + 5,8895$ mit dem Absorptionsgesetz $N \approx 361 \cdot e^{-1,8 \cdot d}$.



Zuckerrüben

Wachstum von Zuckerrüben:

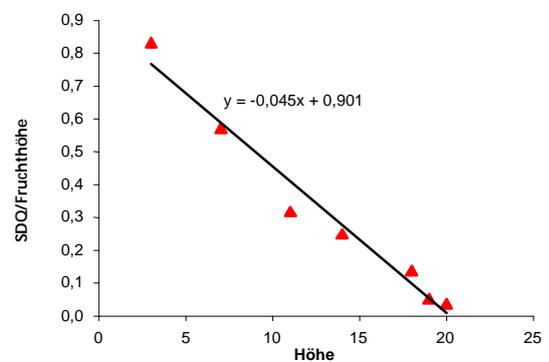
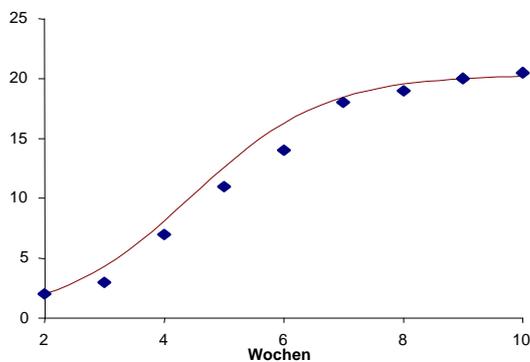
Wochen	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fruchthöhe in cm	2	3	7	11	14	18	19	20	20,5

Trägt man die Daten graphisch auf, so lässt sich ein logistischer Wachstumsvorgang vermuten. Die Wachstumsfunktion wäre dann vom Typ $FH(t) = \frac{A}{B + e^{-k \cdot t}}$. Die zugehörige Wachstumsdifferenzial-

gleichung müsste von der Form $\frac{w'(x)}{w(x)} = a \cdot w(x) + b$ mit $b = k$, $aA + bB = 0$ sein. Berechnet man die

relative Ableitung näherungsweise mit dem symmetrischen Differenzenquotienten, erhält man folgende Werte:

Wochen	3	4	5	6	7	8	9
SDQ/Fruchthöhe	0,83	0,57	0,32	0,25	0,14	0,05	0,04



Die Regressionsgerade liefert $a = -0,045$ und $b = 0,901$. Zusammen mit der Anfangswertbedingung

$$2 = \frac{A}{B + e^{-k \cdot 2}} \text{ und } 0,901 = k, \quad -0,045 \cdot A + 0,901 \cdot B = 0 \text{ ergibt sich } FH(t) = \frac{0,366}{0,018 + e^{-0,901t}}.$$

Anhang

Moderation der Arbeitsgruppe und Endredaktion: *Rainer Kühl*

Ergebnisse der Arbeitsgruppe

Grundkurs Analysis

Einführung der Regression unter Verwendung des TI-92

1. Einordnung in den Unterrichtszusammenhang.
2. Vorkenntnisse.
3. Einführung in die Methode der kleinsten Quadrate am Beispiel der linearen Regression.
4. Anwendungen, auch im Zusammenhang mit nichtlinearen Regressionen.

zu 1.

Prinzipiell an jeder Stelle einführbar, günstig: möglichst frühzeitig, um z.B. im Rahmen der Integralrechnung darauf zurückgreifen zu können.

zu 2.

Ableitungsbegriff

Kurvenscharen (ganzrationale Funktionen genügen). Sofern keine Vorkenntnisse bzgl. des TI-92 bestehen, können die erforderlichen Befehle anhand des Einführungsbeispiels erlernt werden.

zu 3.

Einführungsbeispiel

Abhängigkeit des Eisengehaltes (y in %) kieseliger Hämatiterze von der Dichte (x in g/cm^3) nach *Bottge*, Bergbauwiss. 10, 1963, Seite 377.

x	2,8	2,9	3	3,1	3,2	3,2	3,2	3,3	3,4
y	27	23	30	28	30	32	34	33	30

Ein möglicher Unterrichtsgang wäre: Daten und Diagramm werden den Schülerinnen und Schülern als Arbeitsblatt vorgegeben. Diskussion verschiedener Auswertungsmöglichkeiten, Ziel: Findung einer „zufriedenstellenden“ Ausgleichsgeraden.

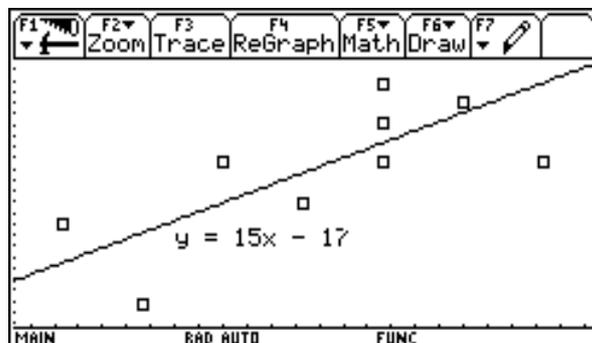
Die „nach Augenmaß“ ermittelten Ausgleichsgeraden dürften der Gleichung $y = 15x - 17$ nahekommen.

Allerdings wird die Behauptung, jemand habe „die beste Gerade“ gefunden, zu kontroversen Diskussionen über die Güte der Gerade führen. Anschließend wird auch ein Gütemaß gesucht werden müssen.

Diskussion verschiedener Gütemaße wie: Ordinatendifferenzen bzw. Abszissendifferenzen und ihrer Quadrate lotrechter Abstände.

Ziel: Minimierung ihrer Summen.

Einige Möglichkeiten sollen im Folgenden dargestellt werden.



a) Ordinatendifferenzen und ihre Quadrate

Ausgehend von der Geradengleichung $y = mx + b$ werden in Spalte c3 die Ordinatendifferenzen $y_i - mx_i - b$ durch die Eingabe $c3 = c2 - m \cdot c1 - b$ im Header (F4) berechnet. Die Berechnung der Summe der Abweichungen erfolgt in Spalte c4 durch den Befehl F4 cumsum (c3), wobei die Summe aller Abweichungen in der 9. Zeile in Spalte c4 erscheint. Den Inhalt dieser Zelle kann man über den Befehl (haematit[4])[9] im Homeeditor auslesen. Analog verfährt man mit den Quadraten der Abweichungen (Spalten c5 und c6). Als Beispiel wird im Folgenden die ausführliche Behandlung der quadratischen Abweichung dargestellt.

	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	dichte	eisen...	fehler	sum	c3	fehlqu
	c1	c2	c3	c4	c5	
1	2.8	27	-m*x-...	-m*x-...	(b+2...	
2	2.9	23	-m*x-...	-2*m*...	(b+2...	
3	3	30	-m*x-...	-3*m*...	(b+3...	
4	3.1	28	-m*x-...	-4*m*...	(b+3...	
5	3.2	30	-m*x-...	-5*m*...	(b+3...	
6	3.2	32	-m*x-...	-6*m*...	(b+3...	
7	3.2	34	-m*x-...	-7*m*...	(b+3...	

c3=c2-m*x-b

MAIN RAD AUTO FUNC

	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	eisen...	fehler	sum	c3	fehlqu	sum
	c2	c3	c4	c5	c6	c5
4	28	-m*x-...	-4*m*...	(b+3...	4*b^2...	
5	30	-m*x-...	-5*m*...	(b+3...	5*b^2...	
6	32	-m*x-...	-6*m*...	(b+3...	6*b^2...	
7	34	-m*x-...	-7*m*...	(b+3...	7*b^2...	
8	33	-m*x-...	-8*m*...	(b+3...	8*b^2...	
9	30	-m*x-...	-9*m*...	(b+3...	9*b^2...	

9c6=9*b^2+b*(56.2*m-534.)+8...

MAIN RAD AUTO FUNC

Eine für Schülerinnen und Schüler naheliegende Betrachtungsweise ist die Interpretation der Fehlerquadratsumme als Polynom 2. Grades mit der Variablen m und dem Parameter b . Das Polynom lautet vollständig:

$$f(m,b) = 9b^2 + b \cdot (56,2m - 534,0) + 88,0m^2 - 1674,4m + 8011,0.$$

(Anm.: automatische alphabetische Sortierung des TI-92 beachten.)

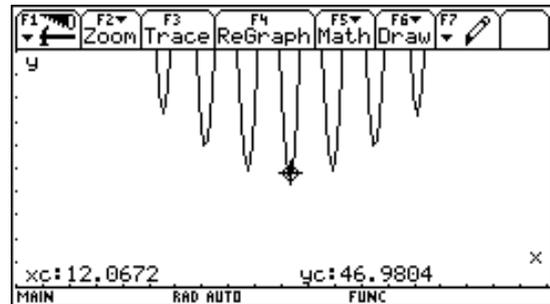
F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
Define f(m,b)=(haematit[6])[9] Done					
f(m,b)					
$9 \cdot b^2 + b \cdot (56.2 \cdot m - 534.0) + 88.0 \cdot m^2 - 1674$					
$\frac{d}{dm}(f(m,b))$ $176.1 \cdot m + 56.2 \cdot b - 1674.4$					
solve(176.06 · m + 56.2 · b - 1674.4 = 0, m)					
$m = -.3 \cdot (b - 29.8)$					

MAIN RAD AUTO FUNC B/30

Es liegt nahe, sich einige Kurven der Schar anzuschauen, wobei m und b im Bereich der zeichnerisch ermittelten Ausgleichsgeraden gewählt werden sollten. ($m \rightarrow x; b \rightarrow b$, etwa: $10 < x < 14$; $46,5 < y < 47,5$; $b = \{-11, -10, \dots, -5\}$).

(Anm.: Die Anwendung von ZoomFit ist hier nicht empfehlenswert, der Rechner benötigt sehr lange.)

Mithilfe der Trace-Funktion erhält man bereits gute Näherungswerte für m und b .



Eine genauere Bestimmung von m und b kann dann mit den üblichen Kriterien der Differenzialrechnung bestimmt werden. Die Vorgehensweise ist in der oberen und der nebenstehenden Abbildung dokumentiert.

Anschließend wird das Regressionsmodul des TI-92 eingeführt.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
$9 \cdot b^2 + b \cdot (56.2 \cdot m - 534.) + 88.03 \cdot m^2 - 1674$					
$3.0E-2 \cdot b^2 + .5 \cdot b + 48.9$					
$\frac{d}{db}(.0302169714871 \cdot b^2 + .48415312962 \cdot b$					
$6.0E-2 \cdot b + .5$					
solve(.0604339429742 · b + .48415312962 =					
$b = -8.0$					

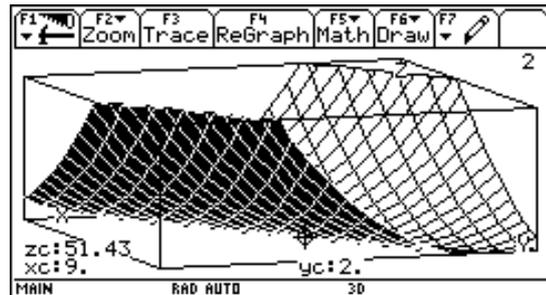
MAIN RAD AUTO FUNC 2/8

$m = -.3192093604453 \cdot (b - 29.79359430605)$					
$m = 12.1$					

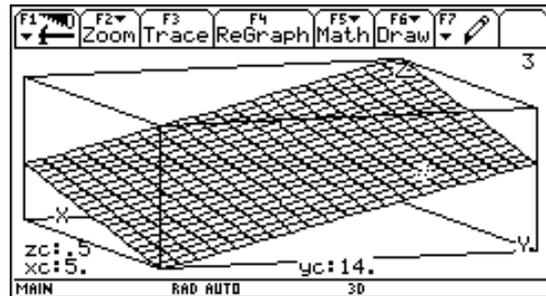
MAIN RAD AUTO FUNC B/30

Anmerkungen:

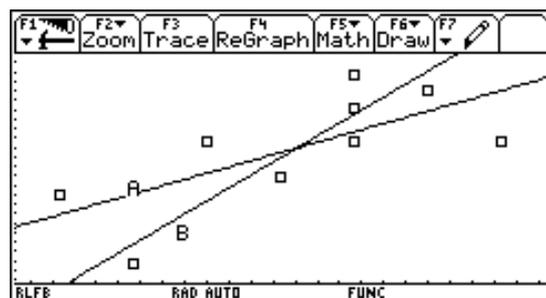
Alternativ, aber unseres Erachtens für Grundkurschülerinnen/-schüler schwieriger, ist die mit dem TI-92 mögliche 3D-Darstellung der zweiparametrischen Funktion $f(m,b)$. Die Suche des Minimums mithilfe der Trace-Funktion ist unbefriedigend (hohe Grid-Einstellung, hohe Rechenzeiten, Blickwinkel).



Die 3D-Darstellung der Summe der Ordinatenunterschiede ergibt eine Ebene, die augenscheinlich kein Minimum aufweist.

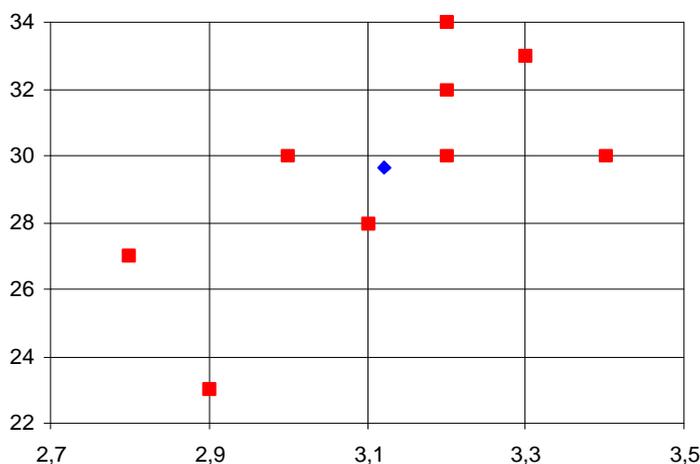


Es ist durchaus interessant bei Einsatz des Regressionsmoduls mit vertauschten Achsen zu arbeiten. Legt man die beiden Regressionsgeraden in die Punktwolke, so erhält man nebenstehende Abbildung. Der Kosinus des eingeschlossenen Winkels der Regressionsgeraden ist ein Maß für die Linearität der Punktwolke, die dem Korrelationskoeffizienten entspricht.



b) Ermittlung einer Ausgleichsgeraden

Abhängigkeit des Eisengehaltes (y in %) kieseliger Hämatiterze von der Dichte (x in g/cm^3) nach *Bottge, Bergbauwiss. 10, 1963, Seite 377.*

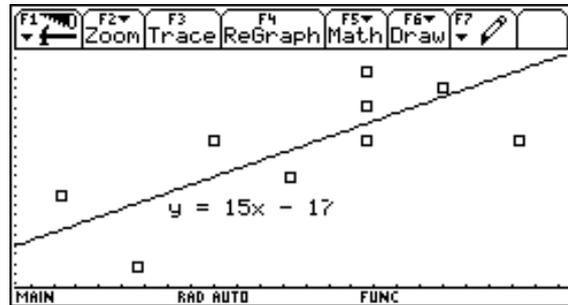


Arbeitsauftrag:

Bei dem gegebenen Beispiel (Hämatiterze) soll eine Gerade ermittelt werden, die die gegebenen Punkte „am besten“ annähert.

Die „nach Augenmaß“ ermittelten Ausgleichsgeraden dürften in etwa der Gleichung $y = 15x - 17$ genügen. Diese orientieren sich am gegebenen Quadratgitter und verwenden den geometrischen Abstandsbegriff unabhängig von den Einheiten der Achsen.

Ein Vorschlag zur Beurteilung der Güte dürfte sein, dass die Summe der lotrechten Abstände minimal sein soll. Hierbei werden allerdings die unterschiedlichen Einheiten der Achsen außer Acht gelassen.



Wenn dieser Weg trotzdem weiterverfolgt werden soll, wäre mit dem TI-92 folgendes Vorgehen zur rechnerischen Bestimmung dieser Geraden denkbar.

Ansatz der „Ausgleichsgeradengleichung“: $y = a \cdot x + b$.

Erfassung der Punkte $P_n(x_n / y_n)$ mit $1 \leq n \leq 9$ unter APPS6 als DATA-Listen in der Datei Haematit in den Spalten c1 und c2.

Die Gleichungen der Senkrechten zur gesuchten Geraden durch diese Punkte sind gegeben durch

$$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}x_n + y_n$$

Die Schnittpunkte von Gerade und der Senkrechten haben die Koordinaten

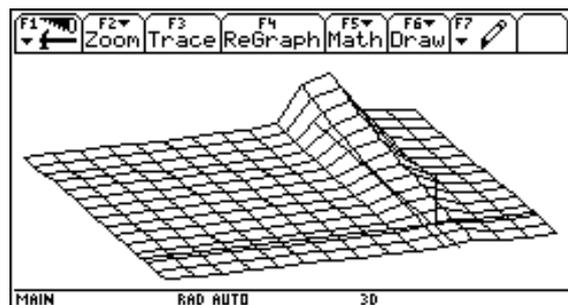
$$S_n \left(\frac{x_n + (y_n - b) \cdot a}{a^2 + 1} / \frac{x_n + (y_n - b) \cdot a}{a^2 + 1} \cdot a + b \right)$$

Diese Schnittpunktskoordinaten werden ebenfalls unter APPS6 in der Datei Haematit durch eine Formeleingabe (in Abh. von a und b) unter c3 und c4 spaltenweise errechnet und gespeichert.

Die Abstände $|P_n S_n|$ werden der Einfachheit halber quadriert (Betonung größerer Abstände, Vermeidung von Wurzeln und somit bessere Handhabbarkeit) und dann auch unter APPS in der Datei Haematit durch die entsprechende Formeleingabe $(c3-c1)^2 + (c4-c2)^2$ unter c5 errechnet und gespeichert. Die Summenermittlung erfolgt unter c6 mit der Formeleingabe $c6 = \text{cumSum}(c5)$. Somit ist der Term der Summe der quadrierten Abstände unter Haematit[6,9] in Abh. von a und b gespeichert und auch im HOME-Bildschirm verfügbar.

Im 3D-Bildschirm stellt sich der Zusammenhang so dar:

Diese Graphik lässt nur mit erheblichem Zeitaufwand und mit der TRACE-Funktion ein ungefähres Ermitteln der Minimalstelle für $a \approx 25$ und $b \approx -48$ zu. Diese Möglichkeit bleibt unbefriedigend und ist somit ungeeignet.



Eine andere Möglichkeit der Berechnung der Minimalstelle der entsprechenden Funktion f mit $f(a,b)=(\text{haematit}[6])[9]$ liefert die Analysis:

Mit $d(f(a,b),b) = 0$ ergibt sich als eine notwendige Bedingung die Beziehung $b = -3.12222 \cdot (a - 9.50178)$.

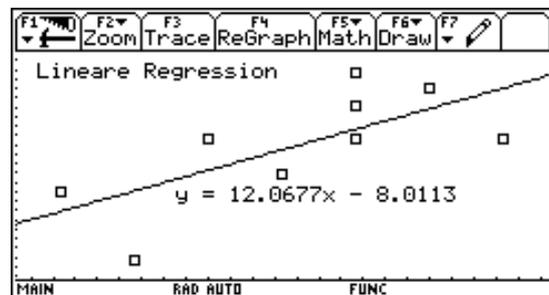
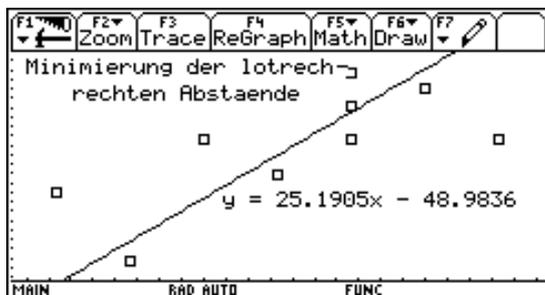
Mit $d(f(a,-3.12222 \cdot (a - 9.50178)),a) = 0$ ergeben sich als Lösungen dieser Gleichung $a = 25.1905$ oder $a = -0.039698$.

Somit kommen folgende Paare als Minimalstellen in Frage:

$a = 25.1905$ und $b = -48.9836$
 oder $a = -0.039698$ und $b = 29.7906$

Wegen $f(25.1905,-48,9836) = 0.1539$ und $f(-0.039698,29.7906) = 90.1416$ liefert das erste Paar den minimalen Wert.

Ergebnis: Die Summe der quadrierten Abstände ist dann minimal, wenn $a = 25.1905$ und $b = -48.9836$ ist. Die Summe beträgt dann in obigem Diagramm 0.1539.



Diese Gerade weicht stark von der linearen Regressionsgeraden ab, die der TI-92 auf Knopfdruck liefert.

Die Unterschiede fordern zur Diskussion und zu einer kritischen Beurteilung heraus (Bedeutung der Achsen, Skalierung der Achsen, Bedeutung des Fehlermaßes, Einheit des Fehlermaßes).

zu 4.

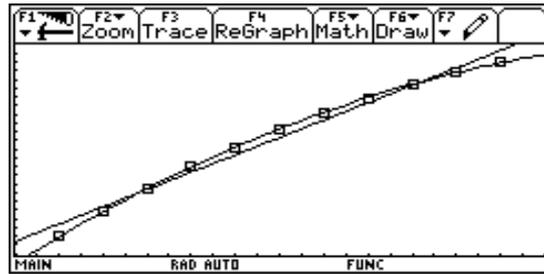
In den folgenden Beispielen ist die lineare Regression der Ausgangsdaten augenscheinlich wenig zweckmäßig. Die Beispiele regen dazu an, die verschiedenen Regressionsmöglichkeiten des TI-92 auszuprobieren, führen aber auch zu der Erkenntnis, dass auch diese Regressionsmöglichkeiten nicht immer ausreichend sind und eine befriedigende Analyse der Daten ohne Koordinatentransformation nicht möglich ist.

Beispiel 1:

Ausfluss von Wasser aus einem senkrechten Rohr durch einen Hahn mit etwa 4mm^2 Querschnitt; m gibt die Masse des ausgeflossenen Wassers an.

t in s	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
m in g	0	28,0	55,6	80,2	105,2	127,2	147,2	165,3	181,6	196,1	208,9	220,1

Die nebenstehende Abbildung zeigt neben den Originaldaten die Ergebnisse der linearen, quadratischen und exponentiellen Regression.



Beispiel 2:

Wachstum von Zuckerrüben (als Beispiel einer möglichen Klausuraufgabe)

Auf einem Versuchsfeld wird die Fruchthöhe von Zuckerrübenpflanzen in Abhängigkeit von der Zeit nach der Ausbringung gemessen.

- a) Ergänzen Sie die Tabelle um je eine Spalte mit einem geeigneten Differenzenquotienten und dem zugehörigen relativen Differenzenquotienten.

Mit $x = \text{Zeit}$ und $y = \text{Fruchthöhe}$ ist der geeignete Differenzenquotient $\Delta y / \Delta x$ und der relative Differenzenquotient $(\Delta y / \Delta x) / y$. Zusammen mit $x = c1$ und $y = c2$ werden sie als $c3$ und $c4 = c3 / c2$ in die Tabelle eingetragen. $c3$ wird als 2-Wochen-Differenz per Hand bestimmt und der jeweils mittleren Woche zugeordnet.

- b) Stellen Sie die durch die Tabelle gegebenen Zusammenhänge graphisch dar.

Die Originaldaten lassen logistisches Wachstum vermuten. In diesem Fall gilt: $y' / y = r + sy$; $s < 0$. Das Diagramm $c2$ gegen $c4$ zeigt folgerichtig eine Ansammlung von Datenpunkten, die eine lineare Regression rechtfertigen. Man erhält als Regressionsgerade $y = -0,045x + 0,901$. Damit ist $y' / y = -0,045y + 0,901$ der gesuchte Zusammenhang.

- c) Führen Sie bei geeigneten Graphen eine Funktionsanpassung durch und interpretieren Sie die von Ihnen gefundenen Zusammenhänge.

Die Funktionsanpassung ist zunächst einmal die Regressionsgerade. Offenbar nimmt das relative Wachstum der Zuckerrüben mit zunehmender Größe der Pflanze ab.

- d) Führen Sie eine nichtlineare Regression mit den Ausgangsdaten durch. Gehen Sie davon aus, dass die ausgewachsenen Pflanzen eine Höhe von 21 cm erreichen.

Es handelt sich offenbar um kleine Zuckerrüben (Nachtrag zu c). Die Lösung der Wachstums-Differenzialgleichung ist $f(t) = (ab) / (a + (b - a)e^{-kt})$. Es ist $a = f(0)$; b : Grenzwert des Wachstums.

Eine Zuordnung der Variablen r, s aus der Differenzialgleichung zu den Variablen a, b, k war uns nicht möglich. Deshalb ein anderer Weg:

$$1/f(t) = (a + (b - a)e^{-kt}) / ab = 1/b + [(b - a) / ab]e^{-kt}$$

$$1/f(t) - 1/b = [(b - a) / ab]e^{-kt}$$

Jetzt kann eine exponentielle Regression angewendet werden. Mit $b = 21$ ist $c5 = 1/c2 - 1/21$ die entsprechende Transformation. Die exponentielle Regression $c5$ gegen $c1$ ergibt

$$y = 2,182 \cdot 0,466^x = [(b - a) / ab]e^{-kt}$$

Man erhält $f(t)$ daraus direkt durch $f(t) = (y + 1/21)^{-1} = 21 \cdot 2,146^x / (2,146^x + 45,817)$.

Diese Darstellung auf dem TI-92 ist sehr schlecht, da die normalerweise verwendete Form nicht erkennbar ist. Die Konstanten a und k lassen sich besser an y bestimmen:

$$b = 21; (b - a) / (ab) = (21 - a) / (21a) = 2,182; a = 0,449; e^{-kb} = e^{-21k} = 0,466; k = 0,036.$$

Dieser letzte Aufgabenteil ist zwar nett, aber er erscheint uns nicht GK-geeignet.

Einführung in die Integralrechnung mit dem TI-92

Moderation und Endredaktion: *Wilhelm Weiskirch*

Vorbemerkungen

Die Einführung in die Integralrechnung wird üblicherweise anhand eines Problems aus der Flächenberechnung durchgeführt, und auch in den Übungsaufgaben treten überwiegend Flächenberechnungen auf. Hier soll unter dem Motto „rund um die Vase“ ein neuer Zugang zur Integralrechnung vorgestellt werden, der von Beginn an auch andere Anwendungen wie Volumina, Mantelflächen und Bogenlängen einbezieht. Das Objekt impliziert Fragen, die neue mathematische Inhalte erfordern, gibt aber auch ausreichend Spielraum zu verschiedenen Ansätzen und Modellen, führt zu Ergebnissen, die eine kritische Überarbeitung der Modelle geradezu erzwingen. Das Objekt Vase hat eine Leitfunktion für die Unterrichtseinheit.

Mit dem Ansatz wird das Lernangebot zu einem Handlungsangebot, das der Schülerin/dem Schüler Raum gibt für Sinnkonstitution und Eigentätigkeit. Heuristisches Denken, methodisches Denken und argumentatives Denken sind keine Lernziele, die automatisch im Mathematikunterricht zu haben sind, sondern sie können nur verlässlich gefördert werden, wenn unterrichtsdidaktisch und unterrichtsmethodisch diese Fähigkeiten auch zwingend verlangt werden.

Einstieg

- Präsentation einer mitgebrachten Vase oder eines ähnlichen Objekts.
- Sammlung von Schülervorschlägen zu möglichen Fragestellungen (z.B. Berechnung des Volumens der Mantelfläche, der Länge der Seitenlinie (Bogenlänge), des Materialverbrauchs oder der Lage von Eichstrichen (z.B. bei Gläsern)).

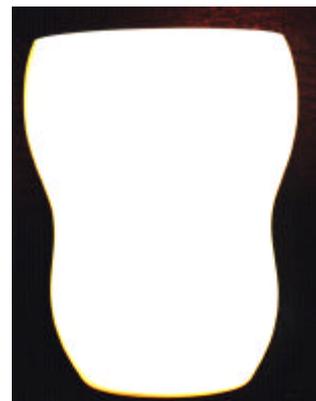


Abb. 1

Entwicklung einer Untersuchungsstrategie

Nahe liegend ist es, zuerst das Volumen experimentell (durch Füllen mit Wasser) zu bestimmen. Für die von uns benutzte Vase ergab sich ein Volumen von 2,7 l.

Eine zweite durchaus nahe liegende Variante kann sein, die Vase durch elementargeometrische Körper anzunähern. Hier bietet sich eine Annäherung durch vier Kegelstümpfe an.

Für eine mathematische Behandlung ist zunächst eine Funktion zu bestimmen, die die Randlinie der Vase beschreibt. Anschließend kann das aus der Mittelstufe bekannte Näherungsverfahren mit ein- und umbeschriebenen Treppenkörpern aus Zylinderscheiben angewandt werden. Für beide Alternativen ist jedoch eine Datenerfassung für die Vasenkontur nötig.

Datenerfassung und Modellierung der Randfunktion

Datenerfassung

Mit Hilfe von Lineal und Faden lässt sich der Vasenumfang (und damit der Radius) an verschiedenen Stellen bestimmen. Alternativ bietet sich die Erstellung und Vervielfältigung eines Schattenrisses zur Vermessung der Vase an.

Hierzu kann ein OHP- oder Diaprojektor verwendet werden.

An den End- und Extrempunkten des Profils wird der Radius der entlang der x-Achse liegenden Vase ermittelt und in eine Tabelle (über Apps-Data/Matrix) übertragen. Ein zugehöriges Scatterdiagramm (über Plot Setup) gibt grob den Verlauf des Profils wieder.



Abb. 2

	c1	c2	c3	c4	c5
1	0.	4.75			
2	5.8	6.6208			
3	10.7	5.65			
4	17.	7.73			
5	23.1	6.95			
6					
7					

r1c1=0.

Abb.3

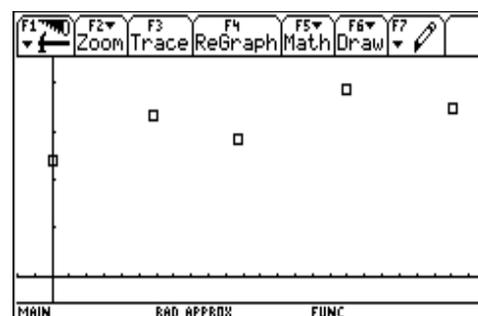


Abb. 4

Datenanalyse mit dem TI-92

Der TI-92 bietet zur Bestimmung einer zugehörigen Randkurve das Werkzeug der Regression an, das entsprechende Ausgleichsfunktionen für die Datenpunkte ermitteln kann. Dieses Werkzeug enthält eine Vielzahl von Regressionstypen, die der Datenmenge zunächst im Sinne einer Auswahl modellhaft angepasst werden müssen. Der Rechner führt dann eine Regressionsanalyse durch und ermittelt die zugehörigen Parameter. Dieses Werkzeug ist über F5 (calc) aus dem Tabelleneditor heraus zugänglich. Um eine möglichst gute Anpassung zu erzielen, wird vermutet, dass ein Regressionspolynom 4. Grades die Vasenkontur optimal beschreibt. Die Ausgleichsfunktion ist in diesem Fall ein Interpolationspolynom, das zwar alle Punkte interpoliert, aber systembedingt nicht die lokalen Eigenschaften der Vasenkontur berücksichtigt. Die Qualität des Ergebnisses war daher für die untersuchte Vase nicht befriedigend, da Ort und Höhe der Extrempunkte zum Teil deutlich von denen der Vase abwichen.

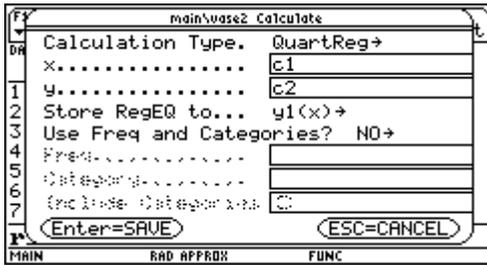


Abb. 5

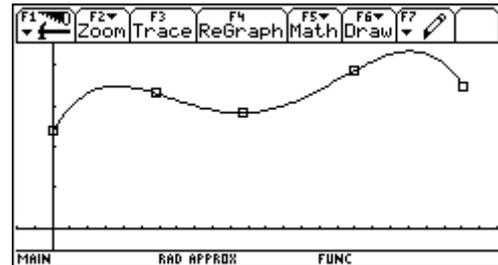


Abb. 6

Es bietet sich daher an, den Kurvenverlauf durch zusätzliche Messwerte genauer festzulegen. Eine in Zentimeterschritten durchgeführte Vermessung des Profils ergibt für die verwendete Vase folgende akzeptable Anpassung:

$$Y_1(x) = -2,942 \cdot 10^{-4} x^4 + 0,01339 x^3 - 0,1928 x^2 + 1,013 x + 4,704, \quad 0 \leq x \leq 23,1$$

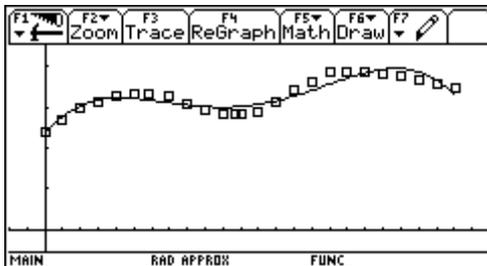


Abb. 7

Modellbildung durch Polynome dritten Grades

Sofern die nötigen Vorkenntnisse aus dem Unterricht der Vorstufe zu Verfügung stehen, kann das Vasenprofil auch abschnittsweise durch Polynome dritten Grades beschrieben werden.⁵ Die drei Extremstellen des Profils legen eine Zerlegung in vier Teilstücke nahe. Für das erste Teilstück $y(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} y(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y(0) &= 4.75 \\ y'(0) &= 0.75 \text{ (graphisch ermittelt)} \\ y(5.8) &= 6.62 \\ y'(5.8) &= 0 \end{aligned}$$

Die folgenden Teilstücke werden entsprechend analysiert. Die hierdurch gewonnene Näherungskurve entspricht dem Vasenprofil sehr genau.

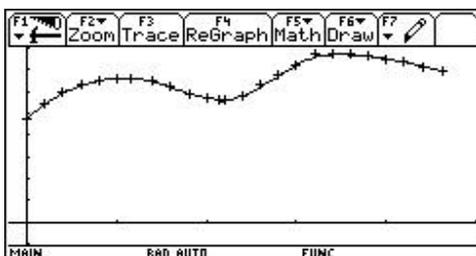


Abb. 8

⁵ Die Weiterführung dieser Idee führt auf das Problem der Splinefunktionen, das in einem separaten Kapitel beschrieben wird.

Auswahl der Vase

Sofern die Bearbeitung mit den Regressionsmitteln des TI-92 vorgesehen ist, sollte die Vase von vornherein so ausgewählt werden, dass ihre Randfunktion nicht mehr als zwei Extremstellen aufweist und somit gut durch ein Polynom 4. Grades approximiert werden kann. Das folgende Diagramm zeigt die Güte der Regressionsanalyse des TI-92, wenn eine einfachere Vasenform gewählt wird.

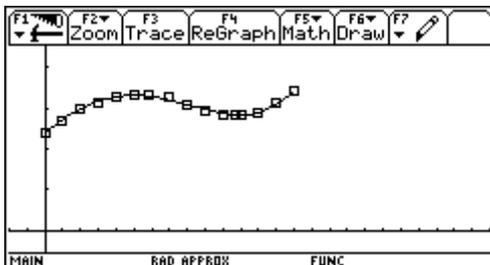


Abb. 9

Alle Rechnungen werden deutlich einfacher, wenn die Randfunktion monoton steigend ist.

Das Volumen der Vase

Der Außenrand wird durch die oben bestimmte Funktion y_2 beschrieben. Der Innenrand wird durch die Funktion y_3 mit $y_3(x)=y_1(x)-0,5$ und $0,5 \leq x \leq 23,1$ angenähert (bei einer als konstant angenommenen Materialdicke von 0,5 cm).



Abb.10

Das Bild zeigt, dass man zur Bestimmung des Volumens einer einbeschriebenen Zylinderscheibe im Allgemeinen je nach Monotonieverhalten der Funktion mit der rechten oder linken Intervallgrenze zu rechnen hat.

Zwar kann der Rechner das jeweilige Minimum $\min(y_3(x_i), y_3(x_{i+1}))$ bestimmen, aber bei den weiteren Rechnungen kann er die Terme dann nicht hinreichend stark vereinfachen, so dass man hier auf die Grenzen des Rechners stößt. Ein weiteres Problem ist auch, dass sich das Minimum oder Maximum des Intervalls nicht immer durch einen der Randwerte ergeben muss. Daher sollte man die Randfunktion zunächst in streng monotone Abschnitte teilen, das Volumen abschnittsweise ermitteln und dann die Summe bilden. Exemplarisch soll das für den ersten Abschnitt gezeigt werden.

Die von uns ermittelte Funktion y_3 ist für $0,5 \leq x \leq 4,335$ streng monoton steigend. Für dieses Teilintervall beträgt das Volumen eines einbeschriebenen Treppenkörpers aus n gleich hohen Zylinderscheiben

$$\frac{4,335 - 0,5}{n} \cdot \pi \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(y_3\left(0,5 + \frac{4,335 - 0,5}{n} \cdot i\right) \right)^2$$

Dieser Ausdruck wird in den TI-92 eingegeben und vereinfacht. Der vereinfachte Summenterm wird als Untersummenfunktion $\text{unters}(n)$ gespeichert. Der TI-92 kann nun den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{unters}(n)$ bestimmen. Man erhält den Wert 375,9.

Die Annäherung an den Grenzwert kann auf folgende Weise visualisiert werden:

- Es wird eine Tabelle angelegt (Apps, Data/Matrix Editor).
- In der Spalte c1 (Überschrift: n) erzeugt man mit $\text{seq}(100n, n, 1, 20)$ die Zahlenfolge 100; 200; 300; ...; 2000.
- In der Spalte c2 (Überschrift: unters) werden nach der Definition $c2 = \text{unters}(c1)$ die entsprechenden Untersummen berechnet. Mit wachsendem n stabilisiert sich der Wert deutlich erkennbar.
- Mit den so erzeugten Wertepaaren wird ein Plot angelegt(Plot, Define x c1, y c2) und gezeichnet.

Das Volumen des umbeschriebenen Scheibenkörpers wird beschrieben durch:

$$\frac{4,335 - 0,5}{n} \cdot \pi \cdot \sum_{i=1}^n \left(y \cdot 3 \left(0,5 + \frac{4,335 - 0,5}{n} \cdot i \right) \right)^2$$

Wie oben beschrieben lassen sich jetzt auch Werte für die Obersummen für verschiedene n berechnen, in der Tabelle speichern und plotten.

	n	unters	obers	diffe...
1	100	375.11	376.76	1.6551
2	200	375.52	376.35	.82756
3	300	375.66	376.21	.5517
4	400	375.73	376.14	.41378
5	500	375.77	376.1	.33102
6	600	375.8	376.07	.27585
7	700	375.82	376.05	.23644

c1=seq(100*n,n,1,20)

Abb. 11

	n	unters	obers	diffe...
14	1400	375.88	376.	.11822
15	1500	375.88	375.99	.11034
16	1600	375.88	375.99	.10344
17	1700	375.89	375.98	.09736
18	1800	375.89	375.98	.09195
19	1900	375.89	375.98	.08711
20	2000	375.89	375.98	.08276

Ar20c1=2000

Abb. 12

Die folgende Graphik zeigt die Konvergenz gegen einen Grenzwert.

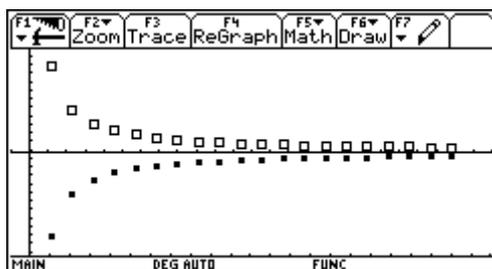


Abb. 13

Führt man das Verfahren für die nächsten Abschnitte entsprechend durch und bildet dann die Summe, so erhält man einen Wert, der überraschend gut mit dem „gemessenen“ Volumen übereinstimmt.

Bestimmung der Mantelfläche

Nahe liegender (aber falscher) Ansatz: Annäherung durch Zylinderscheiben.

Vom Sek. I her ist die Formel für die Mantelfläche des Zylinders bekannt: $M = 2\pi rh$.

Bei der Unterteilung der Höhe h in n Teilintervalle liefert dieser Ansatz für unsere Randfunktion y_1 :

$M_u =$

$$\frac{2\pi}{n} \cdot \left(4,34 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_1\left(\frac{i \cdot 4,34}{n}\right) + 5,7 \cdot \sum_{i=1}^n y_1\left(4,34 + \frac{i \cdot 5,7}{n}\right) + 9,71 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_1\left(10,04 + \frac{i \cdot 9,71}{n}\right) + 3,35 \cdot \sum_{i=1}^n y_1\left(19,75 + \frac{i \cdot 3,35}{n}\right) \right)$$

$M_o =$

$$\frac{2\pi}{n} \cdot \left(4,34 \cdot \sum_{i=1}^n y_1\left(\frac{i \cdot 4,34}{n}\right) + 5,7 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_1\left(4,34 + \frac{i \cdot 5,7}{n}\right) + 9,71 \cdot \sum_{i=1}^n y_1\left(10,04 + \frac{i \cdot 9,71}{n}\right) + 3,35 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_1\left(19,75 + \frac{i \cdot 3,35}{n}\right) \right)$$

M_u und M_o sind mit dem TI-92 numerisch bestimmbar, auch die direkte Grenzwertbestimmung ist möglich (mit obiger Randfunktion y_1 und $h = 23,1$).

TI-92 screen showing the limit calculation for M_o . The expression is $\frac{2 \cdot \pi}{n} \cdot \left(4,34 \cdot \sum_{i=1}^n y_1\left(\frac{i \cdot 4,34}{n}\right) + 5,7 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_1\left(4,34 + \frac{i \cdot 5,7}{n}\right) \right) \cdot \frac{1}{n^4}$. The limit as $n \rightarrow \infty$ is 960.74.

Abb.14

TI-92 screen showing the limit calculation for M_u . The expression is $\frac{2 \cdot \pi}{n} \cdot \left(\frac{9,71}{n} + 3,35 \cdot \sum_{i=1}^n y_1\left(19,75 + \frac{i \cdot 3,35}{n}\right) \right) \cdot \frac{1}{n^4}$. The limit as $n \rightarrow \infty$ is 960.74.

Abb.15

Beim Rechnen mit Termen der Form

$$\min\left(f\left(i \cdot \frac{h}{n}\right), f\left((i+1) \cdot \frac{h}{n}\right)\right) \quad \max\left(f\left(i \cdot \frac{h}{n}\right), f\left((i+1) \cdot \frac{h}{n}\right)\right)$$

stößt man jedoch an „schon erwähnte“ Grenzen des Rechners.

Überprüfung des Ansatzes

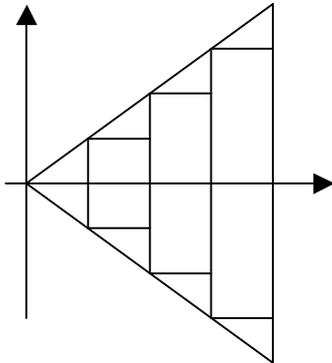
Oben wurde für die verwendete Vase als Näherungswert der Mantelfläche 960,74 cm² bestimmt. Ist dies Ergebnis hinreichend genau? Zur Überprüfung des Zylinderscheibenansatzes wird ein einfacher Kegel betrachtet. Seine Spitze liege im Ursprung, die Mantellinie werde beschrieben durch $y = 0,5 x$. Die bekannte Formel für den Kegelmantel lautet $M = \pi r s$.

Mit $h = 5$ und $r = 2,5$ ergibt sich nach Pythagoras $s = \sqrt{31,25}$ und $M \approx 87,8$. Die Anwendung des obigen Ansatzes, die Mantelfläche durch Zylinderscheiben anzunähern, liefert jedoch $M \approx 39,27$.

Abb. 16

TI-92 screen showing the limit calculation for a cone. The expression is $\frac{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_3\left(\frac{i \cdot 5}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$. The limit as $n \rightarrow \infty$ is 39.2699.

Der Unterschied ist so groß, dass ein Fehler vorliegen muss. Berechnet man aus dem letzten Wert die Mantellinie des Kegels $\frac{39,2699}{\pi \cdot 2,5}$ so erhält man exakt 5, also die Kegelhöhe.



Wie ist der Fehler zu erklären? Zunächst macht man sich geometrisch klar, dass sich bei jeder noch so feinen Unterteilung für jede Zylinderscheibe stets ein Höhenabschnitt, aber nie ein Mantellinienabschnitt ergibt. Daneben lassen sich die obigen Summenformeln so verstehen, dass die Summe, multipliziert mit $1/n$, den Mittelwert der verwendeten Funktionswerte ergibt. Der Gesamtterm stellt dann einen Zylindermantel dar, dessen Radius gleich dem genannten Mittelwert ist.

Abb. 17

Zweiter Ansatz: Annäherung über Kegelstümpfe

Anstelle der Zylinderscheiben wird jetzt mit Kegelstümpfen gearbeitet, deren Mantelfläche sich nach

$$M = (r_1 + r_2) \pi s$$

ergibt. Falls es erforderlich ist, kann diese Formel mit Hilfe der Strahlensätze hergeleitet werden.

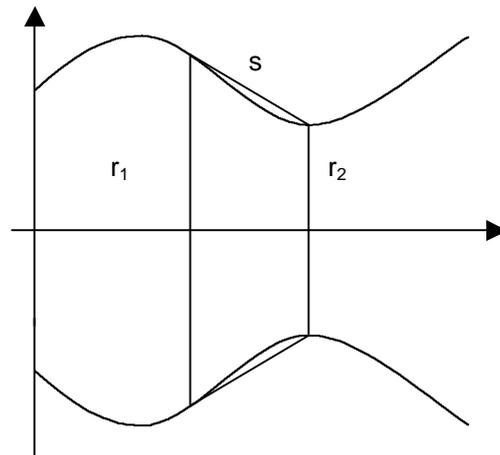


Abb. 18

Bei Unterteilung der Höhe in n Teilintervalle hat der i -te Kegelstumpf die Mantelfläche

$$M_i = \pi \cdot \left(f\left(i \frac{h}{n}\right) + f\left((i+1) \frac{h}{n}\right) \right) \cdot \sqrt{\left(f\left((i+1) \frac{h}{n}\right) - f\left(i \frac{h}{n}\right) \right)^2 + \left(\frac{h}{n} \right)^2}$$

Die gesamte Mantelfläche erhält man als Grenzwert einer Summe

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} M_i$$

Vom TI-92 ist der Grenzwert in dieser Form nicht direkt berechenbar, auch nicht, wenn man versucht, vor der Grenzwertbildung einen Summenterm zu bestimmen. Möglich ist die numerische Berechnung einzelner Summenwerte für konkret gegebene n. Diese Werte lassen sich dann im Data/Matrix-Editor erfassen und plotten.

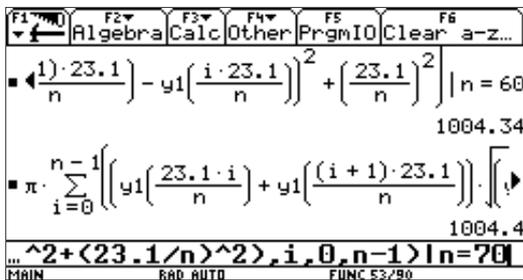


Abb.19

DATA	Unterte...	Mantelfl	Unterte...	Bogenl
	c1	c2	c3	c4
1	10	995.604	10	24.1105
2	20	1002.35	20	24.1832
3	30	1003.59	30	24.1965
4	40	1004.02	40	24.2012
5	50	1004.23	50	24.2034
6	80	1004.44	60	24.2046
7	100	1004.49	70	24.2053

Abb.20

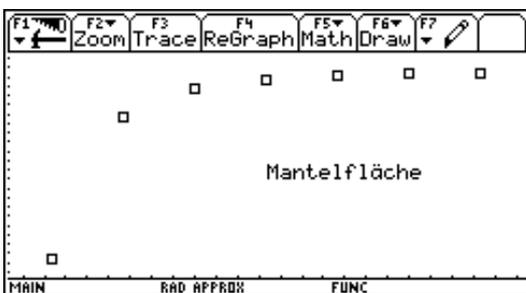


Abb.21

Bestimmung der Bogenlänge

Aus der Entwicklung des numerischen Zugriffs auf die Mantelfläche ergibt sich gleichzeitig eine Methode, auch die Bogenlänge numerisch zu bestimmen. Der gesamte Graph wird durch einen Streckenzug angenähert, wobei die Längen der einzelnen Teilstrecken durch den Wurzelterm der Mantelflächenformel gegeben sind. Für die Bogenlänge gilt dann

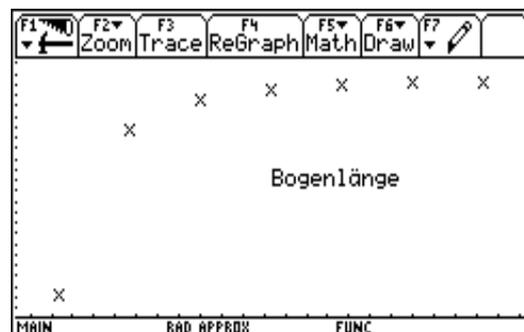


Abb.22

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(f\left(\left(i+1\right)\frac{h}{n}\right) - f\left(i\frac{h}{n}\right) \right)^2 + \left(\frac{h}{n}\right)^2}$$

Zusätzlich ist es möglich, den Term analytisch zu vereinfachen. Dies wird aus folgender Umformung für ein Polygonstück b_i deutlich:

$$\begin{aligned} b_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \Delta x_i \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \end{aligned}$$

Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung ergibt sich:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(x_j) \quad , \quad x_j \in [x_i; x_{i+1}]$$

Damit folgt
$$b_i = \Delta x_i \cdot \sqrt{1 + (f'(x_j))^2}$$

Übergang zur analytischen Betrachtungsweise: „Wie kriegen wir die Kurve zu den klassischen Inhalten?“

Motivation:

- Rechenzeit zu lang.
- Eingabe zu aufwendig.
- Insbesondere bei der Variation der Füllhöhe werden bei der Rechnung mit einem Parameter a die Grenzen des Rechners erreicht. Die Grenzwertbestimmung führt der TI-92 bei den gegebenen Funktionen nicht mehr durch (wie auch bei der Mantelfläche).
Eine numerische Lösung für n=10, n=100, n=1000 ist zwar zeitaufwendig, aber möglich.

Folgerung: Wir beschränken uns auf einfache Potenzfunktionen und versuchen eine analytische Lösung des Volumenproblems zu finden.

Eine solche, einfachere Form eines Gefäßes könnte folgendes Beispiel sein, das sich auch als Einstiegproblem insbesondere in Grundkursen eignet.

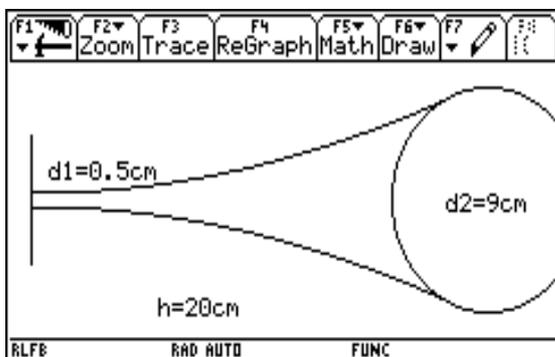


Abb. 23

Aus der Skizze ergibt sich (bei Vorgabe einer quadratischen Grundform) $f(x) = 0,010625 x^2 + 0,25$. Die Volumenberechnung wird wie vorher mit dem TI-92 durchgeführt, nur dass als Randfunktionen einfache Potenzfunktionen gewählt werden.

Die Ergebnisse sind alle ohne Schwierigkeiten mit dem TI-92 zu erhalten.

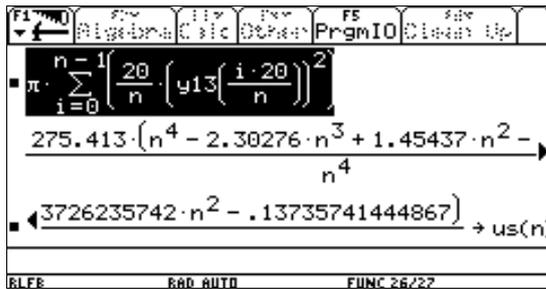


Abb. 24

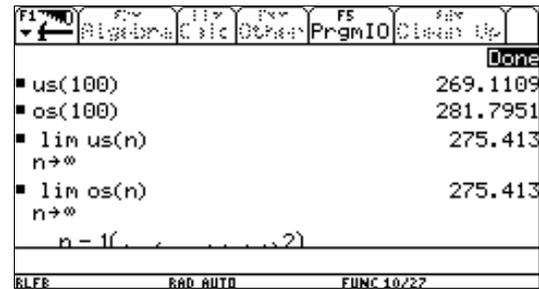


Abb. 25

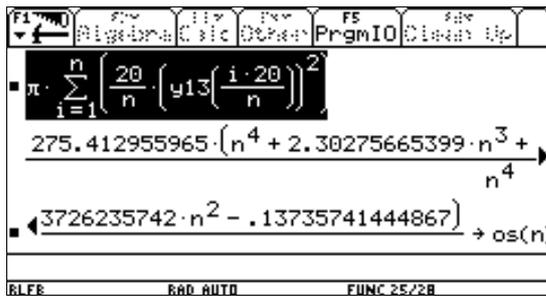


Abb. 26

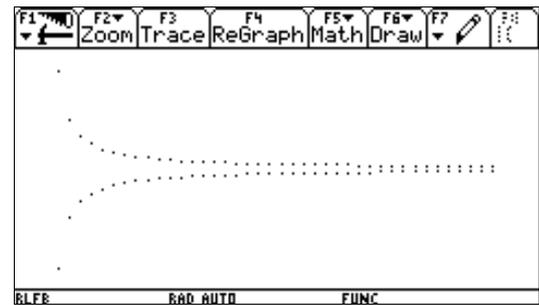


Abb. 27

Bei Funktionen dieser Güte bieten sich Erweiterungen der Aufgabenstellung an. Beispielsweise:

- Volumenbestimmung für verschiedene Füllhöhen,
- Bestimmung der Füllhöhe für vorgegebene Volumina.

Dies führt z.B. für ein halbvolles Glas mit der Grenze b zu dem Ergebnis:

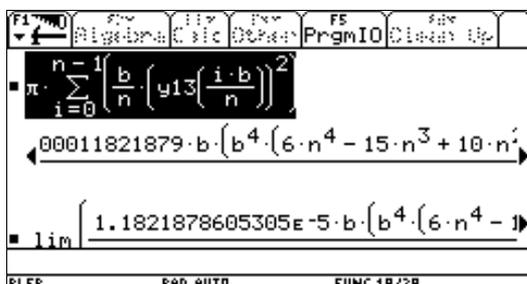


Abb. 28

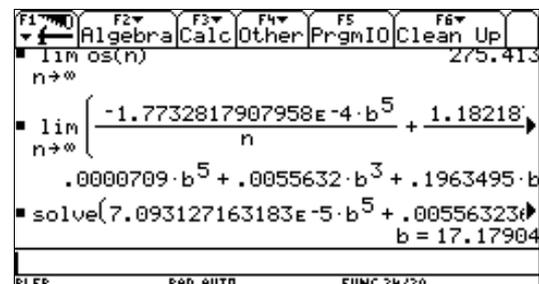


Abb. 29

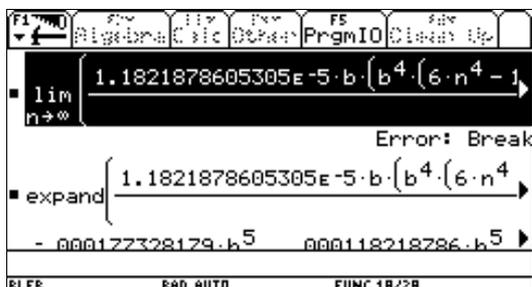


Abb. 30

Bei einer Füllhöhe $b = 17,18$ cm ist das Kelchglas zur Hälfte gefüllt. Bei obigem Beispiel und auch bei weiteren einfacheren Potenzfunktionen zeigt sich, dass die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \pi \left(f\left(\frac{a}{n} \cdot i\right) \right)^2 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \pi \left(f\left(\frac{a}{n} \cdot i\right) \right)^2$$

für die Ober- und Untersumme

jeweils existieren und übereinstimmen und gleich dem Volumen $V(a)$ sind.

In den Termen der Ober- und Untersumme stellt $\pi \cdot \left(f\left(\frac{a}{n} \cdot i\right) \right)^2$ stets die Grundfläche der Zylinderscheiben dar. In der folgenden Tabelle werden jeweils die Randfunktionen, die Funktion, die die Zylinderscheiben bestimmt, und das Volumen $V(a)$ festgehalten.

RANDFUNKTION $f(x)$	GRUNDFLÄCHE DER ZYLINDERSCHEIBE	VOLUMEN $V(a)$
x	πx^2	$\frac{1}{3} \pi a^3$
x^2	πx^4	$\frac{1}{5} \pi a^5$
x^3	πx^6	$\frac{1}{7} \pi a^7$
x^4	πx^8	$\frac{1}{9} \pi a^9$
....

Es ergibt sich eine Vermutung, die zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung führt.

Weiterführung:

Entweder man verlässt die bisher bearbeiteten Beispiele und wendet die gewonnenen Methoden auf die Berechnung von Flächeninhalten an oder man untersucht die vereinfachten Summenterme $\frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{a}{n} \cdot i\right)$ und $\frac{a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{a}{n} \cdot i\right)$ und ihre Grenzwerte. Dies führt dann zu folgender Definition des bestimmten Integrals:

Ist die Funktion stetig auf dem Intervall $[0, a]$, dann nennt man den gemeinsamen Grenzwert der Ober- und Untersumme das bestimmte Integral der Funktion f mit der unteren Grenze 0 und der oberen Grenze a und schreibt dafür $\int_0^a f(x) dx$.

Die Interpretation der Summenterme als Summen von Rechtecksflächen führt zur traditionellen Einschränkung des Integralbegriffs (Integralrechnung \Leftrightarrow Flächenberechnung).

Als weitere Möglichkeiten sind denkbar:

- die Behandlung von Regressionsverfahren, die bisher als Black-Box benutzt wurden,
- Flächenberechnungen mit Hilfe des Rechteckverfahrens bzw. des Trapezverfahrens.

Autoren: Baumert, Euler, Klöpfer, Thiemann, Weiß, Weiskirch

Vergleich numerischer Integrationsverfahren mit dem TI 92

Moderation und Endredaktion: *Markus Eberle*

Die Arbeitsgruppe arbeitete mit Materialien von Rainer Kühl und Markus Eberle; Zusammenfassung der Arbeitsgruppenergebnisse: *Ulrich Niehoff*

Diese Unterrichtseinheit setzt nach der Erarbeitung eines tragfähigen Integralbegriffs ein. Für die Durchführung dieser Einheit werden Begriffe und Verfahren zur Unter- und Obersummenbildung sowie der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung als bekannt vorausgesetzt.

Während im klassischen Unterricht sich jetzt mannigfaltige Übungen zur Berechnung von Integralen und Flächeninhalten anschließen würden, ist dies in einem Mathematikunterricht mit einem Computer-Algebra-System zumindest im bisherigen Umfang nicht mehr sinnvoll.

Als Vertiefung der Integralrechnung bietet sich neben den klassischen Themen wie Oberfläche und Bogenlänge auch numerische Integrationsverfahren an. Viele anwendungsorientierte Problemfelder gestatten keine geschlossenen Lösungen, man muss vielmehr numerische Näherungslösungen finden. Im Bereich der Differenzialrechnung lassen sich zu vielen höheren Gleichungen keine exakten Lösungen bestimmen, sondern man wird sich hier mit numerischen Näherungen zufrieden geben müssen. In der Integralrechnung kann man zu vielen Funktionen keine geschlossene Form der Stammfunktion angeben.

Ein zentraler Aspekt der folgenden Unterrichtseinheit ist es, qualitative und quantitative Aussagen über die Güte numerischer Verfahren zu gewinnen. Diese Gütekriterien werden üblicherweise auf algebraischem Wege hergeleitet. In dieser Unterrichtseinheit werden diese Gütekriterien anhand von Tabellen, Graphiken und Regressionsbildungen („rule-of-the-three“-Prinzip) gewonnen.

Einstiegsproblem

Der TI-92 berechnet (sofern der Rechenmodus nicht auf „EXACT“ steht) zwar ein bestimmtes Integral über $f(x) = e^{-x^2}$, bei der Bestimmung des unbestimmten Integrals kommt er natürlich nicht über die Integraldarstellung der Stammfunktion hinaus.

Das zeigt die Abb. 1, bei der mit „MODE“ die „Display Digits“ zur Anzeige von 12 Stellen auf „E:FLOAT“ gesetzt worden sind.

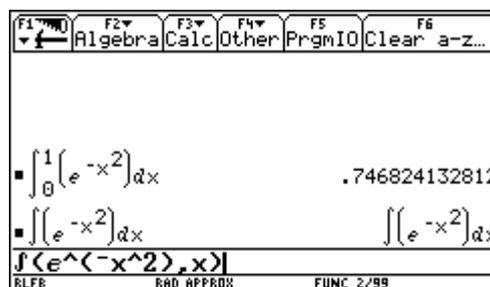
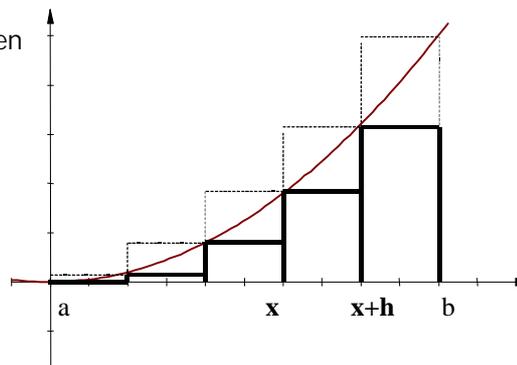


Abb. 1

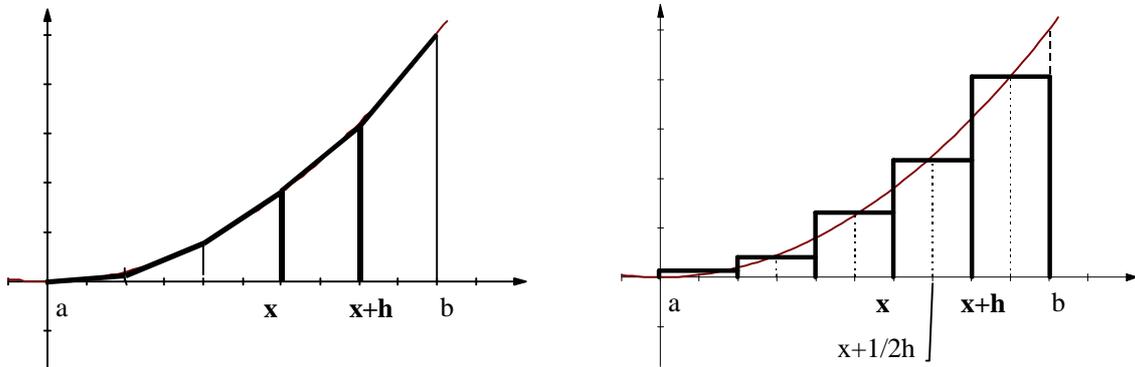
Diese Erfahrung führt auf die Frage, wie Geräte wie der TI-92 oder auch PC-Software bestimmte Integrale berechnen, wenn keine Stammfunktion (expliziter Art) vorhanden ist.

Phase 1: Gängige Näherungsverfahren

Die bereits behandelten Unter- und Obersummen werden wieder aufgegriffen.



Hinzu kommen die (evtl. bereits am Anfang der Integralrechnung von den Schülerinnen und Schülern vorgeschlagene) Trapezmethode (auch Sehnen Trapezverfahren genannt) und das Mittenrechtecksverfahren (auch Tangententrapezverfahren genannt).



Hierbei wird zunächst eine Beschränkung auf die Randfunktion f mit $f(x)=x^2$ und das Intervall $[0;1]$ vorgenommen.

Konkrete Vorgehensweise mit dem TI-92

Im „Home-Fenster“ wird die Funktion f festgelegt, und die folgenden Summenformeln werden eingegeben:

$$x^2 \rightarrow f(x)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) \right) \rightarrow u(n)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2n} \cdot \left(f\left(\frac{i}{n}\right) + f\left(\frac{i+1}{n}\right) \right) \right) \rightarrow \text{trap}(n)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) \right) \rightarrow o(n)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{i+0,5}{n}\right) \right) \rightarrow \text{mitt}(n)$$

Als Alternative dazu die Formeln für ein allgemeines Integrationsintervall $[a;b]$. a , b und der (monoton steigenden) Funktion f müssen dann vorher Inhalte zugewiesen werden.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n} \cdot f\left(a+i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \right) \rightarrow u(n)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{2n} \cdot \left(f\left(a+i \cdot \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a+(i+1) \cdot \frac{b-a}{n}\right) \right) \right) \rightarrow \text{trap}(n)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{b-a}{n} \cdot f\left(a+i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \right) \rightarrow o(n)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n} \cdot f\left(a+\frac{(i+0,5) \cdot (b-a)}{n}\right) \right) \rightarrow \text{mitt}(n)$$

Diese Verallgemeinerung könnte in einem LK z.B. eine Hausaufgabe sein.

Auf dem TI-92 sieht das dann folgendermaßen aus (Abb. 2):

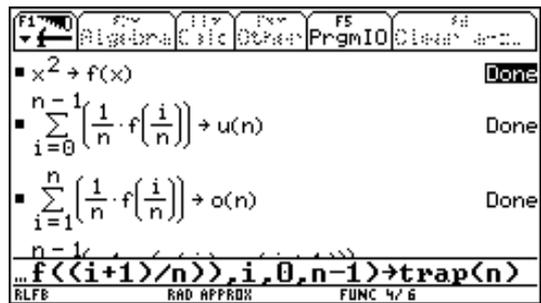


Abb. 2

Erstellen der Tabelle

Nach Drücken der „APPS“-Taste wird „6:Data/Matrix Editor“ gewählt und dann „New“. Als „Type“ wird „Data“ gewählt, als „Folder“ kann „main“ genommen werden (oder ein anderer vorher eingerichteter „Folder“) und für die „Variable“ wird ein Name gewählt (z.B. „numint“). In der sich dann öffnenden Tabelle werden in der ersten Spalte („c1“) die Werte n der Anzahl der Intervallunterteilungen eingegeben und in der zweiten Spalte die Werte h der Breiten der einzelnen Intervallunterteilungen, also $h=1/n^6$. In den weiteren Spalten folgen die Werte für die Untersumme, die Obersumme, das Trapezverfahren und das Mittenrechteckverfahren jeweils in Abhängigkeit von n.

Die Überschriften werden dabei folgendermaßen erzeugt: Man geht mit dem Cursor in das oberste Feld z.B. der ersten Spalte. Dadurch erscheint in der Eingabezeile „c1,Title=“. Man gibt z.B. „n“ ein und bestätigt mit „ENTER“.

Die Werte in den einzelnen Spalten werden folgendermaßen erzeugt: Mit dem Cursor geht man in das Feld „c1“, gibt ein: „seq(i,i,10,100,10)“ und bestätigt es mit „ENTER“. Für „c2“ wird analog eingegeben: „c2=1/c1“⁷. Für die weiteren Spalten gibt es verschiedene Möglichkeiten, deren Vor- und Nachteile hier kurz beschrieben werden sollen:

1. Man kann jeweils von Hand in den einzelnen Zellen „u(10)“, „u(20)“, „u(30)“,; „o(10)“, „o(20)“, usw. eingeben.
2. Im Feld „c3“ gibt man ein: „seq(u(i),i,10,100,10)“ und analog so weiter.
3. Schon bei der Eingabe der Formeln im „Home-Fenster“ geht man etwas anders vor. Zum Beispiel bei der Untersumme wird $\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) \right) \rightarrow \text{usum}$ eingegeben. Dadurch wird ein Term berechnet. Dieser Term wird in die Eingabezeile kopiert und von dort aus als u(n) abgespeichert. Das ermöglicht in der Tabelle dann im Feld „c3“ die Eingabe: „c3=u(c1)“, d.h. man arbeitet ganz analog zur Vorgehensweise bei einer Tabellenkalkulation.

Das erste Verfahren erscheint zunächst im Vergleich zum zweiten zu aufwendig. Der deutlich geringere Tippaufwand beim zweiten Verfahren lohnt sich auf längere Sicht jedoch nicht unbedingt, denn mit dem Befehl „seq“ kann man nur arbeiten, wenn aus der Tabelle heraus mit „F1“ und „9: Format“ die „Auto-calculate“-Funktion auf „ON“ gestellt ist. Dann aber wird bei sukzessiver Erweiterung der Tabelle oder z.B. beim Wechsel zwischen „Home-Fenster“ und Tabelle jedesmal die gesamte Tabelle mit allen bereits berechneten Spalten neu berechnet, was zu längeren Wartezeiten führt. (Die Berechnung der ersten sechs Spalten aus der Phase 1 dauert bereits mehr als zwei Minuten). Außerdem ist ein Vergleich eines Verfahrens bei unterschiedlichen Randfunktionen nicht mehr möglich, weil die geänderte Funktion für die gesamte Neuberechnung der Tabelle gültig ist, und so die Werte der vorangegangenen Funktion, mit denen man vergleichen will, nicht mehr zur Verfügung stehen.

⁶ Bei der verallgemeinerten Version $h=(b-a)/n$

⁷ Bei der verallgemeinerten Version $c2=(b-a)/c1$

Das dritte Verfahren ist ebenfalls nur mit der „Auto-calculate“-Funktion auf „ON“ möglich und führt zu angenehm kurzen Berechnungszeiten in der Tabelle (im Vergleich zur „seq“), aber es ergeben sich bei komplizierteren Verfahren und Randfunktionen wie dem Simpson-Verfahren bei $f(x) = e^{-x^2}$ (vgl. Phase 2) so aufwendige Terme, dass der TI-92 dabei dann in der Tabelle die Werte nicht mehr alle konkret berechnen kann.

Als Kompromiss ist es möglich, zunächst mit der zweiten Methode zu arbeiten und dann, wenn die Rechenzeiten zu lang werden, die „Auto-calculate“-Funktion auf „OFF“ zu stellen und mit der ersten Methode weiterzuarbeiten.

Um in der Tabelle immer Dezimalzahlen und nicht teilweise Brüche zu bekommen, muss der Rechenmodus durch Drücken von „MODE“, dann „F2“ für „Page 2“ auf „APPROX“ eingestellt werden (vgl. die Statuszeile in Abb. 3).

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	n	h	u(n)	o(n)	trap...	mitt...
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
1	10.	.1	.285	.385	.335	.3325
2	20.	.05	.3088	.3588	.3338	.3331
3	30.	.0333	.3169	.3502	.3335	.3332
4	40.	.025	.3209	.3459	.3334	.3333
5	50.	.02	.3234	.3434	.3334	.3333
6	60.	.0167	.325	.3417	.3334	.3333
7	70.	.0143	.3262	.3405	.3334	.3333

c1=seq(i,i,10,100,10)
 RLFB RAD APPROX FUNC

Abb. 3

Zur Veranschaulichung des Verhaltens der Spaltenwerte in Abhängigkeit von h und zur graphischen Grenzwertbildung für h gegen Null sollen nun diese Abhängigkeiten graphisch durch Plots dargestellt werden.

Erstellen der Plots

Von der Tabelle aus wird „F2(=Plot Setup)“ aufgerufen, der gewünschte Plot in der Liste markiert und „F1(=Define)“ gewählt. In dem sich nun öffnenden Fenster wird als „Plot Type“ die Voreinstellung „Scatter“ übernommen, als „Mark“ z.B. „Box“ und für „x“ und „y“ die gewünschten Spalten aus der Tabelle ausgewählt, also z.B. für „x“ „c2“ und für „y“ „c3“ für den Plot zur Untersumme eingegeben. Mit „ENTER“ werden die Eingaben abgeschlossen und der Plot gleichzeitig damit aktiviert.

Zum Ansehen der Graphik wird „GRAPH“ (also „♦“ und „R“) gewählt. Dabei kann es passieren, dass nichts Sinnvolles zu sehen ist, weil das „window“ nicht auf die Lage der Datenpunkte angepasst ist. Dann drückt man „F2(=Zoom)“ und „9: Zoom-Data“, wodurch das Fenster automatisch auf die Daten der aktiven Plots angepasst wird. In Abb. 4 sind die Plots 1 bis 4 für u(n), o(n), trap(n) und mitt(n) über den Werten von h auf der waagerechten Achse aufgetragen sowie zum Vergleich die Gerade mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx .$$

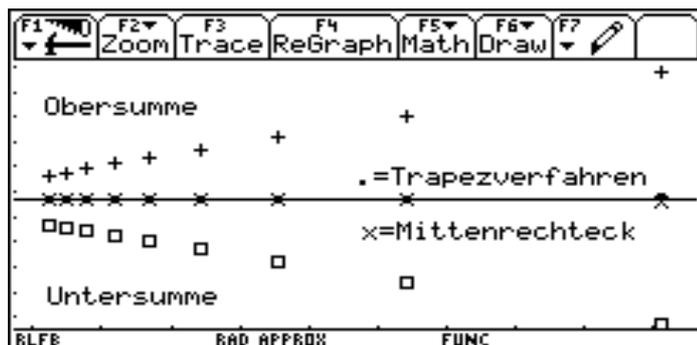


Abb. 4

Die „window“-Werte für dieses Fenster lauten $x_{\min} = 0,0078$, $x_{\max} = 0,0523$, $y_{\min} = 0,308$ und $y_{\max} = 0,361$. Als „Mark“ wurden bei der Untersumme „Box“, bei der Obersumme „Plus“, beim Trapezverfahren „Square“ und beim Mittenrechteckverfahren „Cross“ verwendet.⁸

⁸ Der Kommentartext wird mittels „F7“ und dann „7: Text“ an den Stellen in die Graphik hineingesetzt, an denen man den Cursor positioniert hat.

Bei diesem Maßstab sind zwar alle vier Verfahren im Vergleich zu sehen, der Punkt zur Kennzeichnung des Trapezverfahrens liegt jedoch nur ganz wenig oberhalb des Zentrums von dem Kreuz, das jeweils zur Kennzeichnung des Mittenrechteckverfahrens verwendet wurde (vgl. auch die Tabellenwerte der beiden Verfahren). Die Werte des Trapezverfahrens nähern sich dem Wert $1/3$ von oben, da die Trapezfläche immer größer als die gesuchte Fläche ist. Anders ist es beim Mittenrechteckverfahren, was man z.B. leicht sieht, wenn man es als Tangententrapezverfahren deutet.

Bearbeitung der Regression

Zur Beurteilung der Qualität des betrachteten Näherungsverfahrens, speziell seiner Fehlerordnung, kann man den TI-92 zu den Wertepaaren aus h und den Werten des jeweiligen Verfahrens eine Regressionsfunktion berechnen und deren Graph im Vergleich zu den oben dargestellten Punkten zeichnen lassen.

Von der Tabelle aus wird „F5(=Calc)“ eingegeben, in dem sich dann öffnenden Fenster der „Calculation Type“ ausgewählt, z.B. „5: Line-Reg“ für eine lineare Regression beziehungsweise „9: QuadReg“ für eine quadratische Regression und dann für „x“ „c2“ und für „y“ die gewünschte Tabellenspalte (z.B. „c3“ für die Untersumme oder „c5“ beim Trapezverfahren) eingegeben. Bei „Store RegEQ to“ wählt man z. B. „y1(x)“ aus, wenn man die Regressionsfunktion für die Untersumme im Funktionseditor („Y=“) abspeichern will, die dann auch automatisch aktiv ist. Nach „ENTER“ wird ein Fenster mit den Koeffizienten der Regressionsfunktion, dem Korrelationskoeffizienten $corr$ bei linearer Regression und dem Bestimmungskoeffizienten R^2 gezeigt. Die Abb. 5 zeigt das entsprechende Beispiel für die Regression zum Trapezverfahren.



Abb. 5

Dabei wird man nach Abb. 4 für die Unter- bzw. Obersumme eine lineare Regression ansetzen, diese evtl. aber auch für die beiden anderen Verfahren vermuten. Hier sollte man das Fenster sinnvoller wählen, indem man die Plots für Unter- und Obersumme zusammen mit ihren Regressionsfunktionen „y1“ und „y2“ im „Y= Editor“ mittels „F4“ deaktiviert und dann in der Graphik mit „F2(=Zoom)“ und „9: ZoomData“ das „window“ automatisch auf die Daten des Trapez- und des Mittenrechteckverfahrens anpasst. Hier kann man sich dann zusätzlich noch mit „F2(=Zoom)“ und „1: ZoomBox“ ein geeignetes Fenster um die jeweils neun letzten Punkte zu den beiden Verfahren legen, damit die Annäherung an den Flächeninhaltswert noch deutlicher wird und in diesem Ausschnitt auch die quadratische Regression motiviert wird. In der Abb. 6 sind dann diese beiden Verfahren mit ihren Plots (Nr. 3 und 4) und den zugehörigen Regressionskurven sowie die Gerade mit $y=1/3$ wiedergegeben. Die „window“-Werte für dieses Fenster lauten $x_{\min} = 0,0078$, $x_{\max} = 0,0523$, $y_{\min} = 0,3330$ und $y_{\max} = 0,3339$.

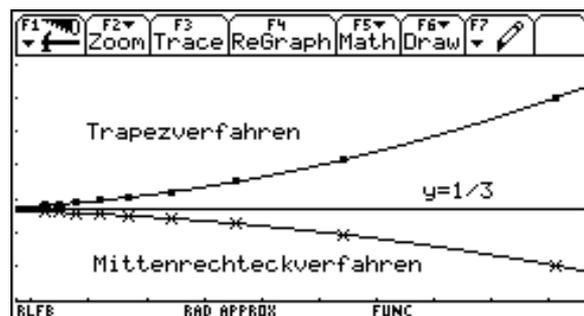


Abb. 6

Es ergeben sich für die ersten vier Verfahren folgende Regressionsfunktionen:

Untersumme:
 $y_1(x) = -0,48208727085015 \cdot x + 0,33306696980498$

Obersumme:

$$y_2(x) = 0,51791272914986 \cdot x + 0,33306696980498$$

Trapezverfahren:

$$y_3(x) = 1,6666666667438 \cdot x^2 - 9,977 \cdot 10^{-13} \cdot x + 0,33333333333336$$

Mittenrechtecksverfahren:

$$y_4(x) = -0,083333333324587 \cdot x^2 - 1,1187 \cdot 10^{-12} \cdot x + 0,33333333333336$$

Das absolute Glied zeigt jeweils die Annäherung für x bzw. h gegen Null.

Bringt man in den obigen Gleichungen dieses absolute Glied auf die linke Seite, so liefert die verbliebene rechte Seite der Gleichung eine Beschreibung des globalen Fehlers, also z.B.

$$y_4(h) - 0,33333333333336 = -0,083333333324587 \cdot h^2 - 1,1187 \cdot 10^{-12} \cdot h$$

oder

$$y_4(h) - 0,33333333333336 \approx -0,083333333324587 \cdot h^2$$

unter Vernachlässigung des linearen Anteils. Das Mittenrechteckverfahren arbeitet also mit der Fehlerordnung zwei.

Auswertung der Regression

Mittenrechteckverfahren und Trapezverfahren (quadratische Regression) sind dem Unter- bzw. Obersummenverfahren (lineare Regression) deutlich überlegen, da sie den exakten Wert viel schneller annähern. Das Mittenrechteckverfahren wiederum ist bei ausgewähltem n bzw. h dem Trapezverfahren von der Fehlergröße her überlegen. Dies zeigt die Abb. 4 zum Vergleich aller Verfahren bzw. die Abb. 6 zum Vergleich zwischen Trapez- und Mittenrechteckverfahren.

Phase 2: Die Suche nach einem besseren Näherungsverfahren

Dazu wird auf das Trapezverfahren zurückgegriffen und das Integrationsintervall $[x; x+h]$ betrachtet. In diesem Intervall wird die Fläche angenähert durch

$$A \approx \frac{1}{2} \cdot h \cdot (f(x) + f(x+h)).$$

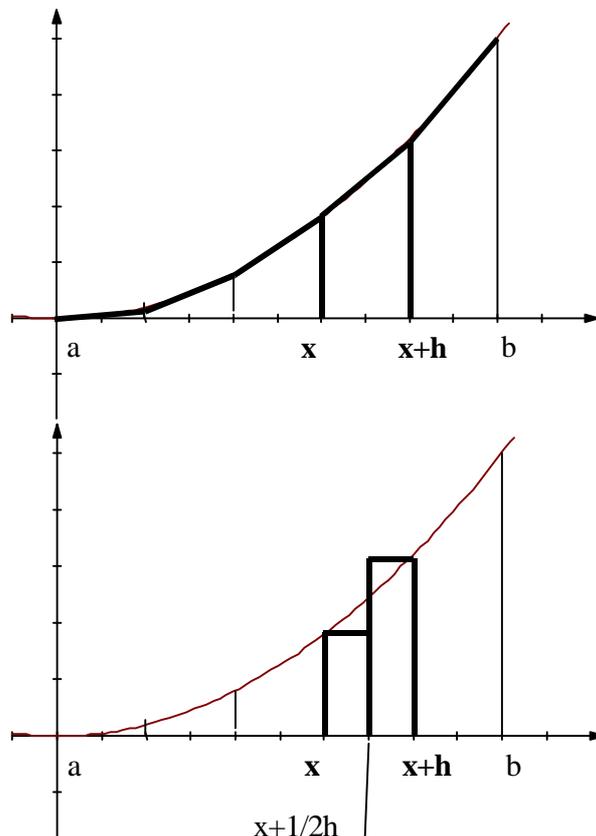
Man kann obigen rechten Term auch in der Form

$$A \approx \frac{1}{2} \cdot h \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot h \cdot f(x+h)$$

schreiben, d.h. den Trapezinhalt durch die Inhalte zweier Rechtecke mit jeweils der Breite $\frac{1}{2} \cdot h$ und der Höhe $f(x)$ bzw. $f(x+h)$ interpretieren.

Obige Gleichung kann aber auch in der Form

$$A \approx h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot f(x+h) \right)$$



geschrieben werden, d.h. die Funktion f wird im Intervall der Breite h linearisiert mit den zwei Stützstellen $(x/f(x))$ und $(x+h/f(x+h))$, wobei die Koeffizienten vor den Funktionswerten die sogenannten Gewichtungsfaktoren sind, deren Summe 1 ist.

Um nun ein Verfahren zu finden, das eine höhere als die Fehlerordnung zwei hat, kann man im Intervall $[x;x+h]$ drei äquidistant liegende Stützstellen verwenden, sodass als Ansatz mit den noch zu bestimmenden Gewichtungsfaktoren γ_0, γ_1 und γ_2 entsteht:

$$A \approx h \cdot \left[\gamma_0 \cdot f(x) + \gamma_1 \cdot f\left(x + \frac{1}{2} \cdot h\right) + \gamma_2 \cdot f(x+h) \right]$$

Für die zunächst einmal verwendete Randfunktion f mit $f(x) = x^2$ kann man die Gewichtungsfaktoren durch folgenden Ansatz bestimmen:

$$\int_x^{x+h} x^2 dx - h \cdot \left[\gamma_0 \cdot x^2 + \gamma_1 \cdot \left(x + \frac{1}{2} h\right)^2 + \gamma_2 \cdot (x+h)^2 \right] = 0$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren und Integrieren:

$$x^2 \cdot h \cdot (1 - \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2) + x \cdot h^2 \cdot (1 - \gamma_1 - 2\gamma_2) + h^3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \gamma_1 - \gamma_2 \right) = 0$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt dann das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 - \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2 &= 0 \\ 1 - \gamma_1 - 2\gamma_2 &= 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \gamma_1 - \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann mit dem TI-92 gelöst werden, indem man das Gleichungssystem in die Matrixform überträgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Im Data-Matrix-Editor erzeugt man eine Matrix mit 3 Zeilen und 4 Spalten – mit z.B. dem Namen `koeff` – und löst dieses Gleichungssystem im Home-Editor mit `rref(koeff)`.

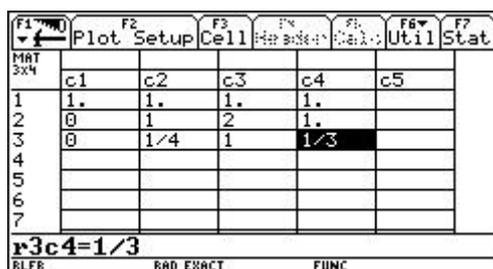


Abb. 7

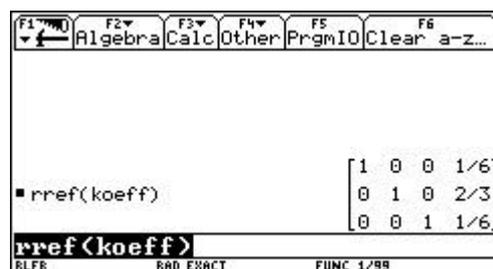


Abb. 8

Die Lösungen $\gamma_0 = 1/6$, $\gamma_1 = 2/3$ und $\gamma_2 = 1/6$ sind in der letzten Spalte der Ergebnismatrix zu ersehen. Für die Darstellung der Ergebnisse in Brüchen wurde allerdings vorher der Rechenmodus durch Drücken von „MODE“, dann „F2“ für „Page 2“ auf „EXACT“ eingestellt. Die Bedingung, dass die Summe der Gewichtungsfaktoren 1 ergeben muss, ist auch hier wieder erfüllt. Als Ergebnis erhalten wir

$$A = \int_x^{x+h} x^2 \cdot dx = h \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot f(x) + \frac{2}{3} \cdot f\left(x + \frac{1}{2} \cdot h\right) + \frac{1}{6} \cdot f(x+h) \right] \quad \text{mit } f(x) = x^2.$$

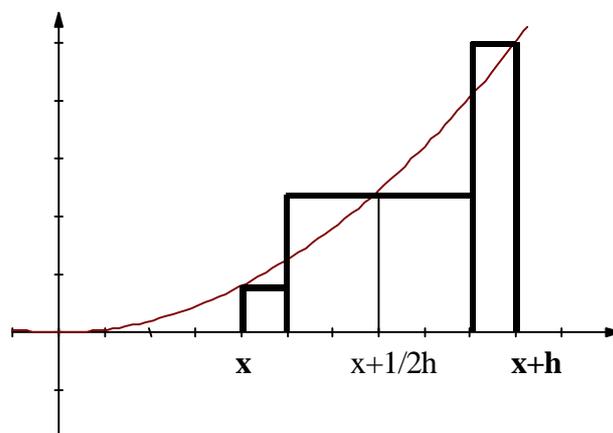
Der Flächeninhalt unter der krummlinigen Normalparabel ist also sogar exakt durch drei Rechtecke beschreibbar.

Diese Beschreibung einer krummlinigen Fläche durch diese 3 Rechtecke gilt sogar bei (beliebigen) Polynomfunktionen dritten Grades.

Zur Visualisierung dieser Regel wird der rechte Term wiederum anders geschrieben:

$$A = \frac{1}{6}h \cdot f(x) + \frac{2}{3}h \cdot f\left(x + \frac{1}{2} \cdot h\right) + \frac{1}{6}h \cdot f(x+h)$$

(Hinweis: Aus Gründen des besser Zeichnens ist rechts das betrachtete Intervall breiter ausgefallen als bei den Skizzen vorher.)



Für andere Randfunktionen ist die obige Formel eine bessere Annäherung als das Rechteck- oder Trapezsumimationsverfahren (Fehlerordnung 4) und ist unter dem Namen SIMPSON-Regel oder KEPLERsche Faßregel bekannt.

Im Folgenden soll nun diese Fehlerordnung durch die Fortsetzung der Arbeit mit dem TI-92 verifiziert werden.

Die Randfunktion f mit $f(x) = x^2$ und das Integrationsintervall $[0;1]$ werden zunächst einmal beibehalten, um das neue Verfahren an bekannten Inhalten testen zu können. Im „Home-Fenster“ wird dazu die folgende Summenformel eingegeben:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{2}{3n} \cdot f\left(\frac{i+0.5}{n}\right) + \frac{1}{6n} \cdot f\left(\frac{i+1}{n}\right) \right) \rightarrow \text{sim}(n)$$

bzw. wieder alternativ für ein allgemeines Integrationsintervall $[a;b]$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{6n} \cdot f\left(i \cdot \frac{b-a}{n}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{b-a}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{2n}\right) + \frac{b-a}{6n} \cdot f\left(\frac{(i+1) \cdot (b-a)}{n}\right) \right) \rightarrow \text{sim}(n)$$

Um zu zeigen, dass das Simpsonverfahren bei $f(x) = x^2$ exakte Werte liefert, kann man Beispielwerte berechnen lassen. Abb. 9 zeigt je zwei im „APPROX-“ und zwei im „EXACT-MODE“ berechnete Werte. In die Eingabezeile ist zusätzlich noch das Ergebnis von $\text{sim}(20)$ hineinkopiert worden, da man so sehen kann, dass der mit max. 12 Nachkommastellen angezeigte Wert 0,333333333333 intern durch Rundungsfehler in der 14. oder 13. Nachkommastelle von diesem Wert abweichen kann. Der „EXACT-MODE“ ist hier aufschlussreicher.

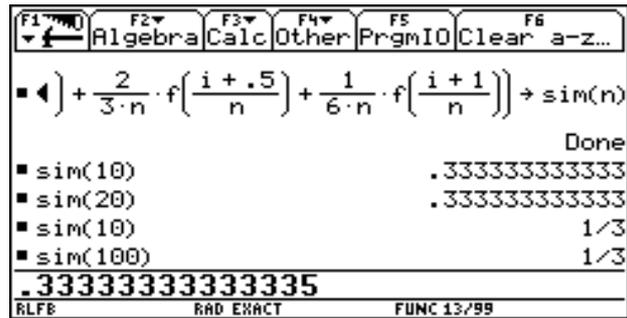


Abb. 9

Für eine Fehlerabschätzung zum Simpsonverfahren ist aber das Beispiel der Funktion f mit $f(x)=x^2$ nicht geeignet. Deshalb wird es jetzt auf weitere Potenzfunktionen angewendet, da hier einerseits das Simpsonverfahren eine echte Näherung darstellt und andererseits schnell eine exakte Flächeninhaltsbestimmung als Vergleich herangezogen werden kann. Dazu wird im „Home-Fenster“ $x^4 \rightarrow f(x)$ eingegeben und dadurch die alte Festlegung $x^2 \rightarrow f(x)$ überschrieben. Das Intervall $[0;1]$ (bzw. in der alternativen Version $[a;b]$) bleibt erhalten.

Fortsetzung der Tabelle

Mit „APPS“, „6: Data/Matrix Editor“ und „1: Current“ geht man wieder in die vorhandene Tabelle hinein, um sie um die Werte des Simpsonverfahrens bei x^4 zu erweitern, die in der Spalte „c7“ eingetragen werden. Die Abb. 10 zeigt die Wertetabelle hierzu im Vergleich zu den Werten des Mittenrechteckverfahrens in der Anwendung auf $f(x)=x^2$. Hier werden schon die Unterschiede in der Annäherungsgeschwindigkeit an die jeweiligen Grenzwerte deutlich.

DATA	mitt(n)	sim bei x^4
	c6	c7
1	.3325	.20000083333
2	.333125	.20000005208
3	.33324074074	.20000001029
4	.33328125	.20000000326
5	.3333	.20000000133
6	.33331018519	.20000000064
7	.33331632653	.20000000035

RLFB RAD APPROX FUNC

Abb. 10

Die „Cell Width“ wurde hierfür aus der Tabelle heraus mit „F1“, „9: Format“ auf den Maximalwert 12 eingestellt. Aus den Spalten „c7“ und „c2“ wird der Plot Nr. 5 erstellt, bei dem in der Abb. 11 außer den Werten des Simpsonverfahrens in Abhängigkeit von h die Gerade zu $y=1/5$ dargestellt ist.

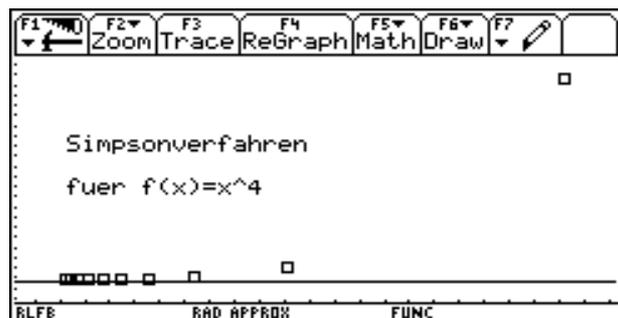


Abb. 11

Regression zum Simpsonverfahren

Der Verlauf der Punkte in Abb. 11 zeigt die schnelle Annäherung an den exakten Flächeninhaltswert $1/5$. Diese schnelle Annäherung ermutigt zu dem Ansatz einer Regression vierter Ordnung für das Simpsonverfahren. Von der Tabelle aus wird „F5(=Calc)“ eingegeben, in dem sich dann öffnenden Fenster der „Calculation Type“ ausgewählt, hier also „A: QuartReg“ für eine Regression vierter Ordnung und dann für „x“ „c2“ und für „y“ die Tabellenspalte „c7“. Der TI-92 liefert jedoch die Fehlermeldung „Singular matrix“. Die Regression vierter Ordnung muss also anders bearbeitet werden. Der Ansatz für das Regressionspolynom lautet: $p(h) = a \cdot h^4 + b \cdot h^3 + c \cdot h^2 + d \cdot h + e$.

Als Stützstellen werden die Werte $\frac{1}{10}, \frac{1}{30}, \frac{1}{50}, \frac{1}{70}$ und $\frac{1}{100}$ für h verwendet, entsprechend den Werten 10, 30, 50, 70, und 100 für n. Das ergibt dann das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{10}\right)^4 & \left(\frac{1}{10}\right)^3 & \left(\frac{1}{10}\right)^2 & \frac{1}{10} & 1 \\ \left(\frac{1}{30}\right)^4 & \left(\frac{1}{30}\right)^3 & \left(\frac{1}{30}\right)^2 & \frac{1}{30} & 1 \\ \left(\frac{1}{50}\right)^4 & \left(\frac{1}{50}\right)^3 & \left(\frac{1}{50}\right)^2 & \frac{1}{50} & 1 \\ \left(\frac{1}{70}\right)^4 & \left(\frac{1}{70}\right)^3 & \left(\frac{1}{70}\right)^2 & \frac{1}{70} & 1 \\ \left(\frac{1}{100}\right)^4 & \left(\frac{1}{100}\right)^3 & \left(\frac{1}{100}\right)^2 & \frac{1}{100} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sim}(10) \\ \text{sim}(30) \\ \text{sim}(50) \\ \text{sim}(70) \\ \text{sim}(100) \end{bmatrix}$$

Dieses LGS kann wiederum mithilfe des Befehls rref gelöst werden. Hier wird als Variante mit einer anderen vom TI-92 standardmäßig angebotenen Möglichkeit, dem Befehl „simult“, gearbeitet. Konkrete Eingabe auf dem TI-92: Nach dem Befehlsword „simult“ werden eine runde und dann eine eckige Klammer geöffnet. Danach werden die einzelnen Werte der Koeffizienten, jeweils durch Kommata voneinander abgetrennt, eingegeben. Dabei wird zeilenweise verfahren und die Koeffizienten einer Zeile durch ein Semikolon von denen der nächsten Zeile abgetrennt. Ist dies geschehen, wird die eckige Klammer geschlossen, ein Komma gesetzt und dann in einer neuen eckigen Klammer die Elemente des Ergebnisvektors, jeweils durch Semikolon voneinander abgetrennt, eingegeben. Nach dem Schließen der runden Klammer wird das Ergebnis in der Variablen loesvek abgespeichert. Also:

`simult([1/10000,1/1000,1/100,1/10,1;1/(30)^4,1/(30)^3,.....],[sim(10);sim(30);....]) → loesvek`

Dieses Gleichungssystem kann der TI-92 sogar im exakten Rechenmodus lösen (siehe den Lösungsvektor in Abb. 12) und man erhält als Regressionspolynom :

$$p(h) = \frac{1}{120} \cdot h^4 + \frac{1}{5}$$

Damit ist die Regression vierter Ordnung gelungen. Man kann auch schreiben:

$$\text{sim}(h) - 0,2 = \frac{1}{120} \cdot h^4 ,$$

d.h. beim Simpsonverfahren hat man einen Fehler vierter Ordnung. Die Abb. 13 zeigt , wie der Graph dieses Regressionspolynoms durch die schon in der Abb. 11 vorhandenen Punkte des Plots zum Simpsonverfahren verläuft (außerdem dargestellt: die Gerade zu $y=1/5$).

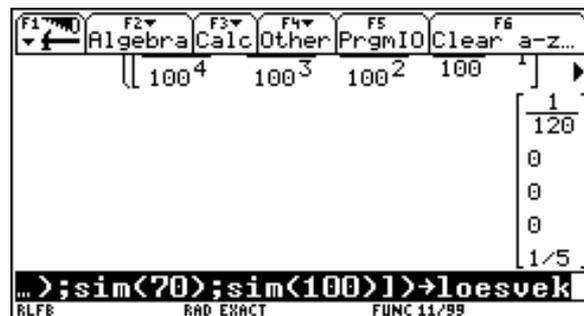


Abb. 12

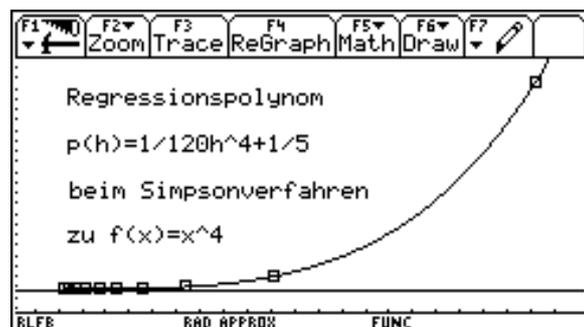


Abb. 13

Das Simpsonverfahren bei $f(x) = e^{-x^2}$:

Wie oben mehrfach beschrieben wird im „Home-Fenster“ $e^{-x^2} \rightarrow f(x)$ eingegeben und dann damit die Tabellenspalte „c10“ berechnet. Aus „c2“ und „c10“ wird der Plot Nr. 8 gebildet. Auch hier wird analog zu dem auf Seite 9 beschriebenen Verfahren mit Hilfe eines 5x5 LGS das Regressionspolynom 4. Grades bestimmt. Dazu muss nur der entsprechende „simult“-Befehl aus dem „History“-Bereich mit „ENTER“ in die Eingabezeile kopiert werden und dort durch „ENTER“ nochmals ausgeführt werden.

Bei dieser Funktion kann der TI-92 das Gleichungssystem nicht mehr exakt, sondern nur noch im „APPROX-MODE“ lösen. Die Koeffizienten des Regressionspolynoms zeigt der in Abb. 14 dargestellte Lösungsvektor. Unter Vernachlässigung der sehr kleinen Koeffizienten b, c und d kann man dann für das Regressionspolynom schreiben:

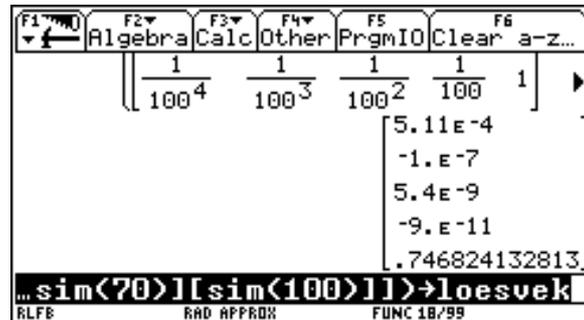


Abb. 14

$$p(h) \approx 5,11 \cdot 10^{-4} \cdot h^4 + 0,746824132813$$

bzw.

$$\text{sim}(h) \approx 5,11 \cdot 10^{-4} \cdot h^4 + 0,746824132813$$

d.h. die Fehlerordnung vier für das Simpsonverfahren wird bestätigt und als

Näherungswert für $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ergibt sich hier der Wert 0,746824132813

im Vergleich zur direkten Integralberechnung (vgl. Abb.1 auf S. 85): 0,746824132812.

Vertiefung

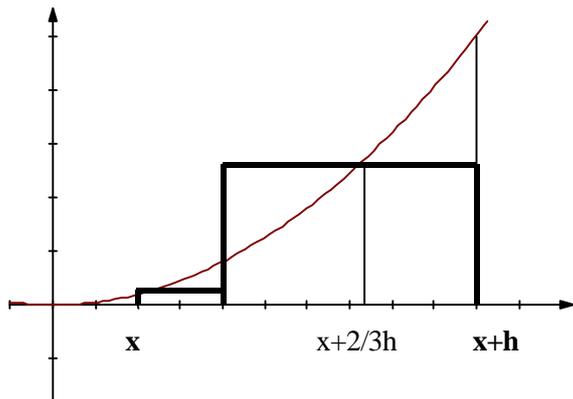
- 1.) Das Verfahren von Heun arbeitet im Gegensatz zum Simpsonverfahren mit nur zwei Stützstellen, die aber nicht mehr äquidistant liegen. Der Ansatz zur Berechnung der Fläche unter dem Graphen der Funktion f im Intervall $[x; x+h]$ lautet dann:

$$\int_x^{x+h} f(x) dx \approx h \cdot [\gamma_0 \cdot f(x) + \gamma_1 \cdot f(x + \alpha \cdot h)]$$

Führt man den auf der Seite 6 für die Herleitung der Gewichtungsfaktoren bei der Simpsonregel beschriebenen Ansatz an der Funktion f mit $f(x)=x^2$ durch, so erhält man $\gamma_0 = 1/4$, $\gamma_1 = 3/4$ und $\alpha = 2/3$, also

$$\int_x^{x+h} x^2 \cdot dx = h \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{3}{4} \cdot \left(x + \frac{2}{3} \cdot h\right)^2 \right].$$

Dies ist die Formel von HEUN, die wiederum visualisiert werden kann.



Mit dem Integrationsintervall $[0;1]$ führt dies zu folgender Eingabe in den TI-92:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{3}{4n} \cdot f\left(\frac{i}{n} + \frac{2}{3n}\right) \right) \rightarrow \text{heu}(n).$$

Die entsprechenden Werte ergeben die Spalte „c11“ der Tabelle. Aus „c11“ und „c2“ entsteht der Plot Nr. 9, zu dem mit „F5(=Calc)“ als „Calculation Type“ „3: CubicReg“ und dann für „x“ „c2“ und für „y“ die Tabellenspalte „c11“ ausgewählt werden. Die Abb. 15 zeigt die Ausgabe der zugehörigen Regressionsfunktion und die Abb. 16 den Plot Nr. 9 mit den Werten zum Heunverfahren bei $f(x) = e^{-x^2}$ sowie den Graphen der gerade zuvor berechneten und als „y9“ automatisch abgespeicherten Regressionsfunktion. Das Verfahren von Heun hat also bei nur zwei Stützstellen einen globalen Fehler der Ordnung drei.



Abb. 15

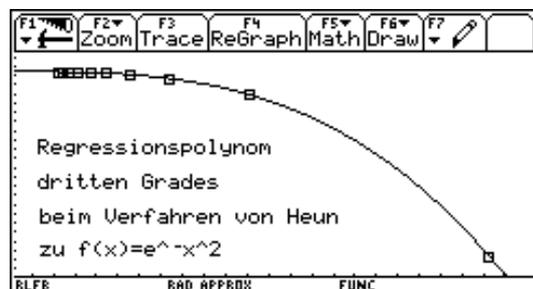


Abb. 16

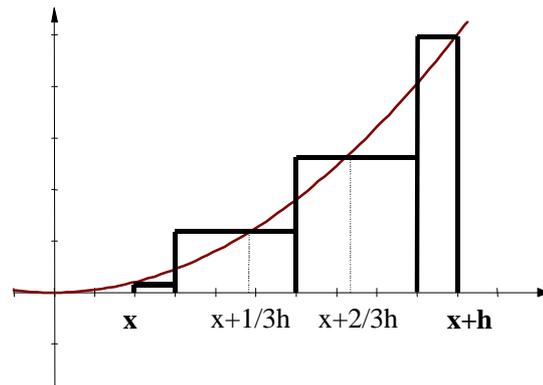
2.) Bei der 3/8-Regel (die von Newton „pulcherrima“ genannt wurde) wird im Unterschied zur Simpsonregel mit vier statt drei (aber immer noch äquidistanten) Stützstellen gearbeitet. Der Ansatz zur Berechnung der Fläche unter dem Graphen der Funktion f im Intervall $[x; x+h]$ lautet dann:

$$A \approx h \cdot \left[\gamma_0 \cdot f(x) + \gamma_1 \cdot f\left(x + \frac{1}{3} \cdot h\right) + \gamma_2 \cdot f\left(x + \frac{2}{3} \cdot h\right) + \gamma_3 \cdot f(x+h) \right]$$

Führt man den auf der Seite 91 für die Herleitung der Gewichtungsfaktoren bei der Simpsonregel beschriebenen Ansatz an der Funktion f mit $f(x) = x^3$ durch, so erhält man $\gamma_0 = 1/8$, $\gamma_1 = 3/8$, $\gamma_2 = 3/8$ und $\gamma_3 = 1/8$, also

$$A = \int_x^{x+h} x^3 \cdot dx = h \cdot \left[\frac{1}{8} \cdot f(x) + \frac{3}{8} \cdot f\left(x + \frac{1}{3} \cdot h\right) + \frac{3}{8} \cdot f\left(x + \frac{2}{3} \cdot h\right) + \frac{1}{8} \cdot f(x+h) \right] \quad \text{für } f(x) = x^3.$$

Die Fläche unter der kubischen Normalparabel ist wiederum exakt durch Rechtecke beschreibbar, was wiederum visualisiert werden kann. (Hinweis: Aus Gründen des besseren Zeichnens ist unten das betrachtete Intervall wiederum breiter ausgefallen als bei den Skizzen vorher.)



Für andere Randfunktionen ist diese Formel wiederum eine Näherungsformel, die allerdings keine Verbesserung gegenüber der Simpson-Regel bedeutet.

Mit dem Integrationsintervall $[0;1]$ führt dies zu folgender Eingabe:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{8n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{3}{8n} \cdot f\left(\frac{i}{n} + \frac{1}{3n}\right) + \frac{3}{8n} \cdot f\left(\frac{i}{n} + \frac{2}{3n}\right) + \frac{1}{8n} \cdot f\left(\frac{i}{n} + \frac{1}{n}\right) \right) \rightarrow \text{drei}(n)$$

Die entsprechenden Werte ergeben mit der immer noch im TI-92 gültigen Funktion f mit $f(x) = e^{-x^2}$ die Spalte „c12“ der Tabelle. Aus „c12“ und „c2“ wird erneut der Plot Nr. 9 erzeugt (und somit der schon bestehende überschrieben, da der TI-92 nur maximal 9 Statistik-Plots bietet). Da das Simpsonverfahren schon die Fehlerordnung vier hat, ist nicht zu erwarten, dass hier eine kleinere Fehlerordnung vorliegt. Die „Powerregression“ wäre allerdings wieder nur möglich, wenn man z.B. den Wert $\text{sim}(100)$ von allen Werten der Spalte „c12“ subtrahiert. Wir verfahren anders und versuchen, wie beim Simpsonverfahren auch, ein Regressionspolynom vierter Ordnung mit Hilfe des „simult“-Befehls.

`simult([1/10000,1/1000,1/100,1/10,1;1/(30)^4,1/(30)^3,.....],[drei(10);drei(30);....])` ~~→loesvek~~

Die Abb. 17 zeigt die Koeffizienten des Regressionspolynoms im ausgegebenen Lösungsvektor. Unter Vernachlässigung der sehr kleinen Koeffizienten b, c und d kann man dann für das Regressionspolynom schreiben:

$p(h) \approx 2,267 \cdot 10^{-4} \cdot h^4 + 0,746824132812$ bzw.
 $\text{drei}(h) \approx 2,267 \cdot 10^{-4} \cdot h^4 + 0,746824132812$,
 womit die Fehlerordnung vier für die 3/8-Regel bestätigt wird.

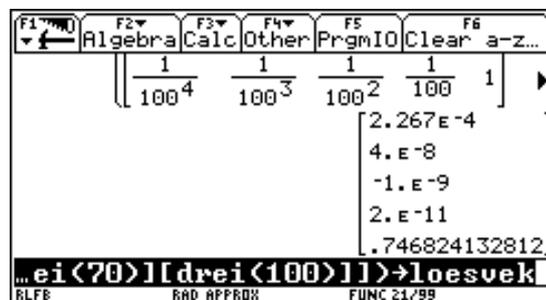


Abb. 17

Die Erhöhung der Stützstellenanzahl hat also im Vergleich zum Simpsonverfahren keine Erhöhung der Fehlerordnung gebracht.

Mögliche Aufgaben

1) Bestimmen Sie die Fehlerordnungen des Untersummen-, Trapez- und Simpsonverfahrens. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse an einem konkret gewählten Beispiel (z.B. die Anzahl der Unterteilungen von 10 auf 20 verdoppeln...).

2) Das Integral $\int_0^1 x^2 dx$ soll näherungsweise durch das Trapezverfahren auf 5 Stellen nach dem

Komma genau bestimmt werden. Wie viele Unterteilungen des Intervalls $[0;1]$ sind nötig? Wie groß ist der gemachte, sogenannte globale Fehler?

- 3) $\int_0^1 x^4 dx$ soll analog Aufgabe 2) bearbeitet werden.
- 4) $\int_0^1 x^4 dx$ soll wiederum analog Aufgabe 2) berechnet werden, jetzt mit dem Simpson-Verfahren!
- 5) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ soll wiederum mit dem Trapez- und dem Simpsonverfahren analog Aufgabe 2) berechnet werden! Was ist hier anders?
- 6) Das Simpsonverfahren ergibt für $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ bereits bei einer Unterteilung einen Wert auf zwei Nachkommastellen genau an. Skizzieren Sie - visualisieren Sie - das Simpsonverfahren, indem Sie entsprechende Rechtecke zeichnen und weiterhin das zugehörige Polynom 2. Grades bestimmen und zeichnen (lassen).
- 7) Demonstration des „Pröpper-Programm's“ (w.proepper@wpro.franken.de).
- 8) Wieso hat das Trapezverfahren die Fehlerordnung zwei, obwohl es der Mittelwert aus Unter- und Obersummenverfahren ist und diese jeweils die Fehlerordnung eins haben?

Literatur

- [1] **Kühl, R.:** Bemerkungen zum Thema Differentialgleichungen, Script zur NLI-Fortbildung.
- [2] **Zurmühl, R.:** Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Springer-Verlag, Berlin 1965, 229 ff sowie 388 ff..
- [3] **Hämmerlin, G., Hoffmann, K.-H.:** Numerische Mathematik. Springer-Verlag, Berlin 1989, 288 ff..
- [4] **Stoer, J., Burlisch, R.:** Numerische Mathematik 1. Springer-Verlag, Berlin 1989, 114 ff..
- [5] **Maess, G.:** Vorlesungen über numerische Mathematik, II. Analysis. Birkhäuser-Verlag, Basel 1988, 183 ff..
- [6] **Hotop, H.-J.:** Numerische Methoden. In: Inf & Ing, Vorlesungen zum Informatik- und Ingenieurstudium, Band 3, verlegt bei Dr. B. Wißner, Augsburg 1993, 35 ff..
- [7] **Stiefel, E.:** Einführung in die numerische Mathematik, Band 2. Teubner-Verlag, Stuttgart 1976, 128 ff..
- [8] **Tischel:** Angewandte Mathematik (Schulbuch). Diesterweg Salle Verlag, Frankfurt/Main, 68 ff..
- [9] **Buch und Zeit Verlagsgesellschaft:** Großes Handbuch der Mathematik. Köln 1969, 606 ff..
- [10] **Schmidt, T. und G.:** Numerische Verfahren mit dem TI-92, Texas Instruments.

Wozu kann man Matrizen gebrauchen?

Moderation und Endredaktion: *Reimund Vehling*

Vorbemerkungen

Mit dem vorliegenden Beitrag wird ein Vorschlag vorgestellt, welcher sich wesentlich an dem Matrizenkalkül als „rotem Faden“ orientiert. Wir erhoffen uns mit diesem Ansatz neue Impulse für den Unterricht im Grundkurs Mathematik:

Weg von

- sturer Rechnerei,
- der Überbetonung von Schnittproblemen,
- der zu detaillierten Behandlung von Vektorräumen.

Hin zu

- einer weitgehenden Verwendung von Matrizen als Hilfsmittel für theoretische Fragen und in Anwendungsaufgaben,
- problemorientierten Fragestellungen aus einem weiten Bereich der Anwendungen,
- abwechslungsreichen Aufgabenstellungen aus verschiedenen Bereichen,
- einer stärkeren Berücksichtigung experimentellen Arbeitens und von Schüleraktivitäten,
- Einsatz moderner Hilfsmittel wie Computer für den Matrizenkalkül, bei der Lösung linearer Gleichungssysteme (LGS), zur Veranschaulichung in der analytischen Geometrie und in der Abbildungsgeometrie/Computergrafik,
- Fragestellungen, die zu gebietsübergreifenden Aspekten führen.

Inhalte eines solchen Kurses können folgenden Gebieten entnommen werden:

- Matrizenrechnungen mit diversen Anwendungsgebieten,
- Lineare Gleichungssysteme und ihre Anwendungen,
- Analytische Geometrie/Abbildungsgeometrie,
- Kegelschnitte.

Schon der Einstieg in den Kurs soll mit einem Anwendungsbeispiel für Matrizen beginnen, an dem einige Grundlagen des Matrizenkalküls erarbeitet werden. Danach können Matrizen als durchgehendes Hilfsmittel benutzt werden. Dabei sollten die Kenntnisse bei Bedarf immer wieder erweitert werden. Matrizen müssen also nicht in einer kompakten Einheit unterrichtet werden.

Überblick über einen möglichen Lehrgang

- Tabellen und Matrizen
Beispiele für das Auftreten von Tabellen/Matrizen in vielerlei Anwendungen
Einführung grundlegender Begriffe und ansatzweise „Berechnung“
- Matrizenmultiplikation
Materialverflechtungsprobleme und Kaufverhalten
Matrizen in der Abbildungsgeometrie
Gesetze für das Rechnen mit Matrizen (Summen, Skalarprodukt, Matrizenprodukt)
- Lineare Gleichungssysteme
Probleme, die auf LGS führen
GAUSS-Algorithmus und Lösungskriterien für LGS
Probleme bei der Lösung von LGS

- Analytische Geometrie
Matrizen - Vektoren - Geraden - Ebenen - Linearkombinationen
Skalarprodukte - Abstands- und Winkelberechnungen
Abbildungen mit Matrizen/Grundlagen der Computergrafik
- Vektorräume - Lineare Abhängigkeit - Basis
Magische Quadrate - Vektorräume
Lineare Abhängigkeit - Lineare Unabhängigkeit, Basis
- Inverse Matrizen
Begriff - Berechnung - theoretische Überlegungen
Anwendungsbeispiele: Rückgängigmachen von Abbildungen
Codierung/Decodierung, Input - Output – Analyse, Stücklistenprobleme
- Matrizenpotenzen - Mehrstufige Prozesse
Maschinenüberwachungen
Populationsdynamiken
Stochastische Matrizen (MARKOW-Ketten), Verteilungen
langfristiges Verhalten: stationäre und zyklische Verteilung, Fixvektor, Grenzmatrix, Grenzverteilung

Im Folgenden soll an einigen ausgewählten Beispielen ein möglicher Unterrichtsgang illustriert werden. Es handelt sich hierbei um Beispiele

- zur Materialverflechtung,
- zu Matrizenpotenzen am Beispiel von Kaufverhalten mit Ausblicken zur Analysis und Stochastik,
- zur Codierung, Decodierung, inversen Matrix,
- zum Vorschlag für eine Klausur,
- einer Abituraufgabe .

Aufgabe zur Materialverflechtung

Ein Hersteller von Modelleisenbahnen bietet für die Spur H0 Anfangs- und Ergänzungspackungen an. Aus den Ausgangsprodukten Schwellen, Schienen und Gleisverbinder sollen über die Zwischenprodukte - gerade und gebogene Gleise - die beiden Packungen zusammengestellt werden. Für ein gerades Gleisstück benötigt man 40 cm Schienen und 10 Schwellen, während ein gebogenes Gleisstück aus 30 cm Schienen und 6 Schwellen besteht. Beide Gleise benötigen jeweils 2 Gleisverbinder. Eine Anfangspackung besteht aus 6 geraden und 16 gebogenen, eine Ergänzungspackung aus 4 geraden und 8 gebogenen Gleisen.

Aufgabe

Es sollen für eine Lieferung 1000 Anfangs – und 500 Ergänzungspackungen bereitgestellt werden. Wie viele Ausgangsprodukte benötigt man?

Dieses Problem der Materialbedarfsplanung lässt sich mit Hilfe des Produkts zweier Matrizen lösen.

Abbildung 1 zeigt die Verflechtungen der einzelnen Bauteile. Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:

R1: Schwellen, R2: Schienenstränge, R3: Gleisverbindungen, Z1: gerade Gleise, Z2: gebogene Gleise, E1: Anfangspackung, E2: Ergänzungspackung.

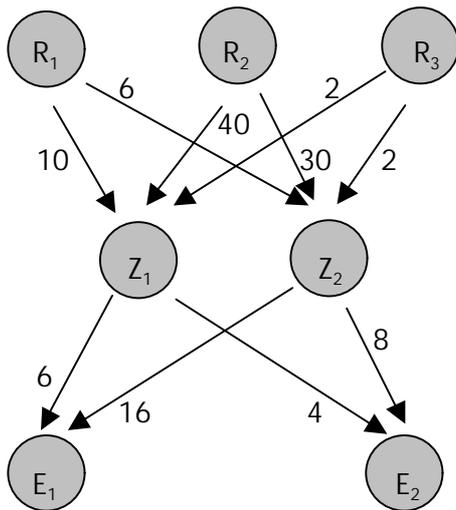


Abb. 1 Zweistufiger Produktionsprozess

Dabei liefert die Darstellung der Mengenbeziehungen in Form von Tabellen die Einführung der Matrixschreibweise. Die Multiplikation von Matrizen sollte mit der Multiplikation reeller Zahlen verglichen werden. Dabei sollte die Verträglichkeitsbedingung der Matrizenmultiplikation sowie das Falksche Schema erläutert werden.

Die Lösung des oben gestellten Problems, welche Rohstoffmengen bei der Bestellung erforderlich sind, ist nun sehr einfach. Man muss die Matrix C mit dem „Bestellvektor“ multiplizieren.

	Z ₁	Z ₂
R ₁	10	6
R ₂	40	30
R ₃	2	2

Tab. 1

	E ₁	E ₂
Z ₁	6	4
Z ₂	16	8

Tab. 2

Schreibt man die Mengenstücklisten als Matrizen, so ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 40 & 30 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$$

und für die Mengenbeziehung zwischen den Rohstoffen und den Endprodukten

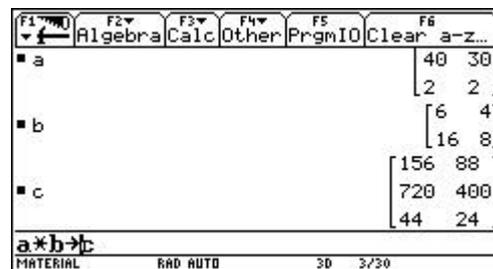
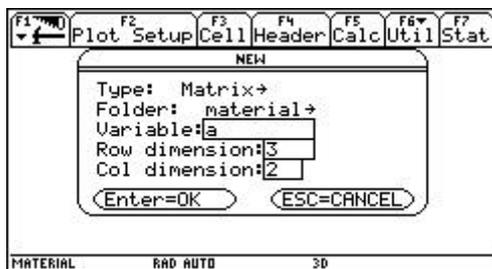
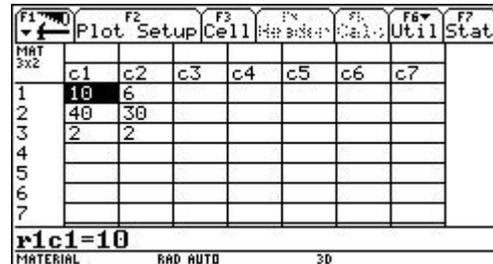
$$\begin{pmatrix} 10 \cdot 6 + 6 \cdot 16 & 10 \cdot 4 + 6 \cdot 8 \\ 40 \cdot 6 + 30 \cdot 16 & 40 \cdot 4 + 30 \cdot 8 \\ 2 \cdot 6 + 2 \cdot 16 & 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 156 & 88 \\ 720 & 400 \\ 44 & 24 \end{pmatrix} = C = A \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} 156 & 88 \\ 720 & 400 \\ 44 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200000 \\ 920000 \\ 56000 \end{pmatrix} = \bar{p}$$

\vec{p} , der sogenannte Produktionsvektor, gibt an, wie viele Rohstoffe in die Produktion eingehen müssen, um den Bestellvektor \vec{y} erfüllen zu können.

Erläuterungen zur Eingabe mit Hilfe des TI-92:

Die prinzipielle Eingabe von Matrizen ergibt sich aus den folgenden Bildern. Eine Matrix lässt sich in der Kommentarzeile eingeben, die Eingabe über das APPS- Menü ist aber wesentlich komfortabler.



Mit diesem System lassen sich die verschiedensten Verflechtungen – auch mit mehreren Zwischen- und Endprodukten – bearbeiten. Problematisch wird es erst, wenn Ausgangsprodukte direkt in die Endprodukte eingehen. Dieses lässt sich aber durch eine einfache Erweiterung des obigen Modells darstellen. Da Schienenverbinder leicht verloren gehen, hat sich die Firma entschlossen, jeder Ergänzungspackung noch sechs einzelne Schienenverbinder als Ersatzteile beizulegen. Dieses führt zu folgender Erweiterung des Verflechtungsdiagramms:

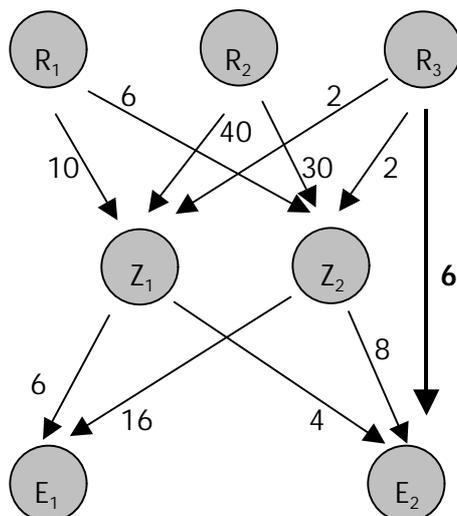


Abb. 2 Zweistufiger Produktionsprozess mit direktem Eingang eines Ausgangsproduktes in ein Endprodukt

Durch den zusätzlichen Pfeil von R_3 nach E_2 ist eine Darstellung mit zwei getrennten Matrizen nicht mehr möglich. Dies führt zum sogenannten Gozinto-Verfahren. Der Name Gozinto geht auf den ungarischen Mathematiker ANDREY VAZSONYI zurück, der ihn dem „gefeierten italienischen Mathematiker Zepartzat Gozinto“ zuschrieb - eine Verballhornung von „that part that goes into“. Der Begriff hat sich trotz dieses Scherzes in der wissenschaftlichen Literatur festgesetzt. Hier werden die Mengenbeziehungen in einer einzelnen Matrix dargestellt (vgl. etwa Lit. [12], S. 212 ff.).

Das Verfahren ist sehr trickreich und sicherlich nicht für jeden Grundkurs geeignet. Das Gozinto-Verfahren stellt in einem $n \times n$ Schema dar, mit welchen Anteilen ein Produkt des Produktionsprozesses in ein anderes Produkt eingeht. In unserem Beispiel ergibt sich folgendes Schema:

	R1	R2	R3	Z1	Z2	E1	E2
R1	0	0	0	10	6	0	0
R2	0	0	0	40	30	0	0
R3	0	0	0	2	2	0	6
Z1	0	0	0	0	0	6	4
Z2	0	0	0	0	0	16	8
E1	0	0	0	0	0	0	0
E2	0	0	0	0	0	0	0

Überträgt man dieses Schema in eine 7×7 – Matrix, erhält man die Matrix T . Die Schwierigkeit besteht in der Interpretation dieser Matrix und des Produktes von T mit dem neuen Bestellvektor, der nun

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix} = \bar{y} \text{ lautet.}$$

Die Matrix T gibt nur die unmittelbaren Mengenbeziehungen wieder, während T^2 die Mengenbeziehungen zeigt, die nicht unmittelbar, sondern über genau eine Zwischenproduktstufe bestehen. T^3 würde dann die Beziehung über genau zwei Zwischenstufen angeben usw.. Diese Erkenntnis folgt zwar unmittelbar aus der Definition der Matrizenmultiplikation, ist aber nicht trivial. Es erfordert eine sehr genaue Analyse des Problems und sollte möglicherweise einem Leistungskurs vorbehalten sein, ebenso wie die Bestimmung des vollständigen Produktionsvektors $\bar{p} = (E + T + T^2 + T^3 + \dots) \bar{y}$. Die komplexe Problematik kann hier nur ansatzweise angesprochen werden. Zur Vertiefung wird die weiterführende Literatur ([1], [12]) empfohlen. Es ist offensichtlich, dass der Produktionsvektor \bar{p} eine Verknüpfung zur geometrischen Reihe bietet. Analogiebetrach-

tungen zur geometrischen Reihe liefern $\sum_{i=1}^{\infty} T^i = (E - T)^{-1}$, sofern es ein n gibt, mit $T^n = 0$ (Nullmatrix). Hingewiesen werden sollte hier noch darauf, dass sich an dieser Stelle eine Verknüpfung zur Gleichungslehre und zum Invertieren von Matrizen bietet (vergleiche [1], S 163). Mit der Gleichung $(E - T) \cdot \bar{p} = \bar{y} \Leftrightarrow \bar{p} = \bar{y} \cdot (E - T)^{-1}$ schließt sich der Kreis.

Übergangsmatrizen/stochastische Matrizen

Standardbeispiel in der Literatur ist das Zeitschriftenproblem (hier nach [7]):

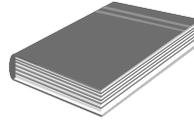
Ein Marktforschungsinstitut wurde von einem Verlag damit beauftragt, das Kaufverhalten der Käufer von zwei neu aufgelegten, wöchentlich erscheinenden Computerzeitschriften A und B des eige-

nen Verlagen zu untersuchen, um so Hilfen für spätere Produktions- und Vertriebsentscheidungen zu liefern.

Das Institut ermittelt mit Hilfe statistischer Untersuchungen, dass zwischen den beiden Zeitschriften wöchentliche Wechsel der Käufer stattfinden, die sich durch die Übergangstabelle S wie folgt schreiben lassen:

Übergang von Woche n zu Woche n+1, Wechsel zwischen den Zeitschriften:

		zu	A	B
von	A		80 %	20 %
von	B		5 %	95 %



Anfangs (Woche 0) kauften 2000 Kunden die Zeitschrift A und 3000 Kunden die Zeitschrift B.

Problemstellungen: Wie entwickeln sich die Käuferzahlen (in den nächsten Wochen, langfristig, wann wird Zeitschrift A eingestellt)?

Hinweise zu möglichen Bearbeitungen:

- a) Berechnung der Käuferzahlen von Hand/mit TI-92/mit Tabellenkalkulation für die nächsten Wochen, um „Trends“ zu erkennen. Beispiel mit TI-92: (Stichwort „Rekursion“).

Mode / Sequence / $\Delta y =$

```

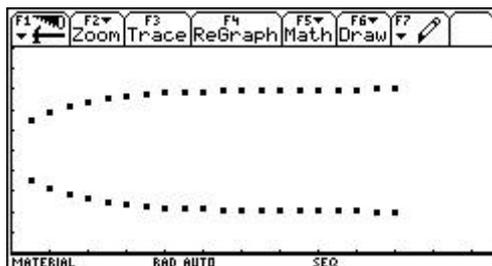
F1 [Left Arrow] F2 Zoom F3 Edit F4 [Check] F5 All F6 Style F7 Axes...
PLOTS
u1=.8·u1(n-1)+.05·u2(n-1)
u1=2000
u2=.95·u2(n-1)+.2·u1(n-1)
u2=3000
u3=
u3=
u4=
u4=
u5=
u5=
u3(n)=
MATERIAL RAD AUTO SEQ
    
```

Δ Window

```

F1 [Left Arrow] F2 Zoom
nmin=0.
nmax=20.
plotstrt=2.
plotstep=1.
xmin=0.
xmax=25.
xsc1=2.
ymin=0.
ymax=5000.
ysc1=500.
MATERIAL RAD AUTO SEQ
    
```

Δ Graph



Δ Table

n	u1	u2			
0.	2000.	3000.			
2.	1563.	3438.			
4.	1316.	3684.			
6.	1178.	3822.			
8.	1100.	3900.			
10.	1056.	3944.			
12.	1032.	3968.			
14.	1018.	3982.			
n=0.					

Man erkennt eine Stabilisierung.

- b) Matrizenpotenzen

Definition der Matrix M als Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$A(n) = 0,8 \cdot A(n-1) + 0,05 \cdot B(n-1)$$

$$B(n) = 0,2 \cdot A(n-1) + 0,95 \cdot B(n-1)$$

und des Startvektors $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 2000 \\ 3000 \end{pmatrix}$ liefert für die Untersuchung der zeitlichen Entwicklung die folgende Rekursionsformel: $\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$. Hieraus erhält man die einzelnen Zustandsvektoren:

$$\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0, \quad \vec{v}_2 = M \cdot \vec{v}_1 = M^2 \cdot \vec{v}_0, \quad \vec{v}_3 = M \cdot \vec{v}_2 = M^3 \cdot \vec{v}_0, \quad \dots$$

Allgemein: $\vec{v}_n = M \cdot \vec{v}_{n-1} = M^n \cdot \vec{v}_0$. Die Berechnung beschränkt sich somit auf Matrizenmultiplikation, die sehr gut mit dem TI-92 durchgeführt werden kann. Die langfristige Verteilung kann graphisch als Punktfolge dargestellt werden.

- c) Der „Grenzzustand“ kann z. B. aus dem LGS $M \cdot \vec{v} = \vec{v}$ (von Hand, mit TI-92,...; Stichwort: Lösen eines LGS) zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 4000 \end{pmatrix}$ bestimmt werden.
Mögliche Erweiterungen: Eigenwerte, Eigenvektoren.
- d) Ketzerische Nebenbemerkung: Wenn Klasse 7 nicht so lange her gewesen wäre, hätte man dies mit Dreisatz auch gekonnt:
Im „Gleichgewichtszustand“ muss ja die Zahl der Wechsler von A nach B genauso groß sein wie die Zahl der Wechsler von B nach A, also $0,2 \cdot A = 0,05 \cdot B$, d.h. $\frac{A}{B} = \frac{1}{4}$. Wegen $A+B=5000$ also $A=1000$ und $B=4000$.
- e) Erweiterung, Ergänzung, Klausuraufgaben (z. B. Lit. [1], Seite 170-174)
- Zyklische Matrizen (z.B. Entwicklung einer aus Eiern, Larven und Käfern bestehenden Population, wobei sich etwa 25 % der Eier zu Larven, 50 % der Larven zu Käfern entwickeln und jeder Käfer 8 Eier legt; die 3x3-Übergangsmatrix ist zyklisch, d.h. nach jeweils (hier drei) endlich vielen Durchgängen tritt wieder der Ausgangszustand auf.
 - Ein komplexeres Beispiel aus der Biologie findet sich in Lit. [13]. Hier wird das Langzeitverhalten eines realen Biotops mit Methoden der Materialverflechtung untersucht. Dabei wird aus sogenannten Ökotypen (Fluß, Polder, Gras, Gestrüpp, Ufer, Böschung, Aue, Wäldchen) eine Übergangsmatrix aufgestellt. Folgende Fragen könnten untersucht werden:
 - Wie verändert sich das Gebiet im Laufe der Zeit?
 - Welche Annahmen stellt man an das Modell?
 - Gibt es einen Gleichgewichtszustand?
 - Kann ein möglicher Grenzzustand durch Maßnahmen geändert werden?
 - Kann die Übergangsmatrix vereinfacht werden?
 - Wieso sterben einige Ökotypen aus?
 - Diffusionsmodelle (z.B. diffusionsfähige Membran mit gegebenen Ausgangskonzentrationen und Übergangswahrscheinlichkeiten).
 - Methodik: graphische Darstellung der Zustandsvektoren im x-y-Koordinatensystem als Punktfolge, für n gegen unendlich „sieht“ man den Grenzpunkt bzw. Grenzvektor.
- f) Geometrische Interpretation von Matrizen
- Es erscheint sinnvoll, auch Grundkurschülerinnen und -schülern aufzuzeigen, dass der „Matrizenkalkül“ eine relativ einheitliche Beschreibung und Bearbeitung von zumindest auf den ersten Blick verschiedenen Problemstellungen ermöglicht. In diesem Sinne sollte auch die geometrische Interpretation angesprochen werden.
 - Visualisierung eines Vektors (x,y) als Punkt in der Ebene bzw. (x,y,z) im Raum.
 - Die Anwendung einer Matrix auf einen Vektor lieferte früher z.B. einen neuen Zustandsvektor, jetzt also einen neuen (Bild-)Punkt. Man kann z.B. eine 30°-Drehmatrix vorgeben und die Bilder des Einheitsquadrates (von Hand) ausrechnen und zeichnen lassen, vgl. zyklische Matrizen; hier ist sogar als Ergänzung die Invertierung anschaulich klar.
 - Erweiterung ins dreidimensionale, im Grundkurs sicher nur Drehungen um eine der Koordinatenachsen, evtl. Erweiterung zu einfachster Computergraphik möglich.
 - In Lit. [1] wird die Geometrie der Matrizen auf etwa 15 Seiten sehr schön und vollständig (mit Fixgraden, Existenzbeweis für Grenzwert, Eigenwerte, Eigenvektoren,...) behandelt.

Codierverfahren

Sicherlich hat jeder schon einmal Nachrichten verschlüsselt. Ein ganz einfaches Verfahren kennen wir noch aus unseren Kindertagen:

Eine Nachricht wird in eine Liste von Ziffern übersetzt, indem jeder Buchstabe seine Platznummer im Alphabet erhält (wer es moderner will, kann gerne auch den ASCII-Code verwenden). Aus *Mathematik mit CAS* wird dann 13 1 20 8 5 13 1 20 9 11 0 13 9 20 0 3 1 19. Bildet man nun neue Ziffern gemäß der Beziehung $c = (a+3) \bmod 26$, erhält man 16 4 23 11 8 16 4 23 12 14 3 16 12 23 3 6 4 22. Ein leicht zu durchschauendes Verfahren!

Besser geht es unter Verwendung von Matrizen. Wir übertragen unsere Nachricht (im Zahlencode) in eine Matrix mit fester Spaltenzahl und einer Zeilenzahl, die von der Länge der Nachricht abhängt (eventuell muss mit Nullen aufgefüllt werden). Es könnte sich dann im Falle einer $n \times 3$ -Matrix fol-

gende Nachrichtenmatrix N ergeben:

$$\begin{pmatrix} 13 & 1 & 20 \\ 8 & 5 & 13 \\ 1 & 20 & 9 \\ 11 & 0 & 13 \\ 9 & 20 & 0 \\ 3 & 1 & 19 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix multiplizieren wir mit der Kodiermatrix C , die folgendes Aussehen haben könnte:

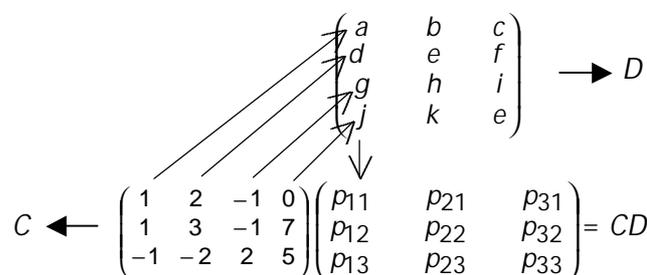
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Das eigentliche Kodierverfahren besteht nun in der Multiplikation der beiden Matrizen. Für die verschlüsselte Nachricht V gilt: $V = N \cdot C$. In unserem Fall lautet die verschlüsselte Nachricht:

$$V = \begin{pmatrix} -6 & -11 & 26 & 107 \\ 0 & 5 & 13 & 100 \\ 12 & 44 & -3 & 185 \\ -2 & -4 & 15 & 65 \\ 29 & 78 & -29 & 140 \\ -15 & -29 & 34 & 102 \end{pmatrix}$$

Dieses Codierverfahren ist nicht selbstverständlich, man wird es den Schülerinnen und Schülern wohl mitteilen müssen. Die Dekodierung einer so verschlüsselten Nachricht wird wohl nur noch dann gelingen, wenn man im Besitz einer Dekodiermatrix D ist, für die gilt: $N = V \cdot D$, also $N \cdot C \cdot D = V \cdot D$. Es gilt also $C \cdot D = E$ (mit der Einheitsmatrix E). Diese Matrixgleichung führt auf ein Gleichungssystem mit 12 Variablen.

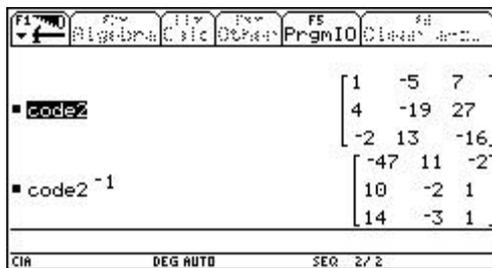
Für die Matrizenmultiplikation ist das Anordnungsschema von FALK hilfreich.



Z.B. steht an Position p_{11} : $a + 2d - g + 0j$. (Das Skalarprodukt aus der ersten Zeile von C mit der ersten Spalte von D ergibt p_{11} .)

Leider ist das entstehende Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar, es gibt *vielen* Dekodiermatrizen! Eindeutig lösbar wäre das Problem, wenn die letzte Zeile der Dekodiermatrix fehlen würde. Dieses erfordert dann aber auch eine quadratische Kodiermatrix C . Die Gleichung $C \cdot D = E$ zeigt, dass D

damit die inverse Matrix zu C ist. Natürlich ließe sich D mit obigem Gleichungssystem manuell bzw. unter Ausnutzung der Fähigkeiten eines GTR lösen. Eleganter ist es, hier die Fähigkeiten des TI-92 zum Invertieren von Matrizen auszunutzen.



An dieser Stelle bietet es sich dann an, auf das Lösen von LGS mit dem Matrizenverfahren zu sprechen zu kommen. Dieses Verfahren bietet eine elegante Methode zum Lösen auch umfangreicher LGS, wie sie zum Beispiel bei der Bearbeitung von Splines auftreten. Sofern nur GTR zur Verfügung stehen, ist dieses die einzige Möglichkeit, umfangreiche LGS überhaupt zu behandeln.

Klausurvorschlag

Die Bearbeitung jeder Aufgabe erfordert einen erläuternden Text.

1. Für einen Betrieb gelten die folgenden Verflechtungsmatrizen:

$$\begin{array}{c}
 Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \quad Z_4 \quad Z_5 \\
 R_1 \left(\begin{array}{ccccc} 10 & 12 & 20 & 15 & 4 \\ 20 & 5 & 8 & 25 & 6 \\ 8 & 5 & 25 & 20 & 5 \end{array} \right), \quad \begin{array}{c} E_1 \quad E_2 \quad E_3 \\ Z_1 \left(\begin{array}{ccc} 10 & 12 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \\ 15 & 10 & 12 \\ 0 & 8 & 5 \\ 12 & 20 & 15 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

- Veranschaulichen Sie die Verflechtungszusammenhänge durch einen Graphen.
- Wie viele Einheiten der Rohstoffe werden für je eine Einheit der Endprodukte und wie viele Ein-

heiten werden für die durch den Outputvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$ gegebene Bestellung benötigt?

- Es gibt drei Fernsehzeitschriften: HÖRWEG, GLOTZE und BOING, die sich die Käufer untereinander teilen. Die Kunden verhalten sich nicht alle markentreu, sondern kaufen zum Teil in der nächsten Woche eine andere Zeitschrift:
 - 50 % der HÖRWEG-Käufer kaufen dieselbe Zeitschrift wieder, 20 % von ihnen kaufen in der nächsten Woche GLOTZE und 30 % schwenken zu BOING über.
 - 70 % der GLOTZE-Käufer verhalten sich markentreu, 10 % dieser Schicht werden HÖRWEG-Kunden und 20 % werden BOING kaufen.
 - 60 % der BOING-Käufer bleiben bei ihrer Zeitschrift, 10 % werden Kunden von HÖRWEG und 30 % wechseln zu GLOTZE.

Stellen Sie die Käuferwanderungen graphisch dar.

Untersuchen Sie die mittel- und langfristige Käuferentwicklung, und bestimmen Sie gegebenenfalls den „stationären Zustand“.

- Im Juni legt ein Malkäferweibchen etwa 60 Eier und stirbt dann bald darauf. Im Juli schlüpfen die Larven (Engerlinge). Nach einem Jahr lebt von diesen noch ein Drittel, nach zwei Jahren von diesen wiederum noch ein Fünftel. Nach drei Jahren verpuppen sich die Larven. Ein Viertel wird

zu weiblichen Käfern, die dann noch in der Erde überwintern und im Mai ins Freie kommen. Bei einer „Zählung“ im Juni waren 30000 Eier, 20000 einjährige Larven, 1600 zweijährige Larven und 8000 Käfer vorhanden.

Stellen Sie die Populationsentwicklung graphisch dar und untersuchen Sie die zeitliche Entwicklung der Population. Begründen Sie das spezielle Langzeitverhalten dieser Population (und vergleichen Sie es mit den im Unterricht behandelten Beispielen).

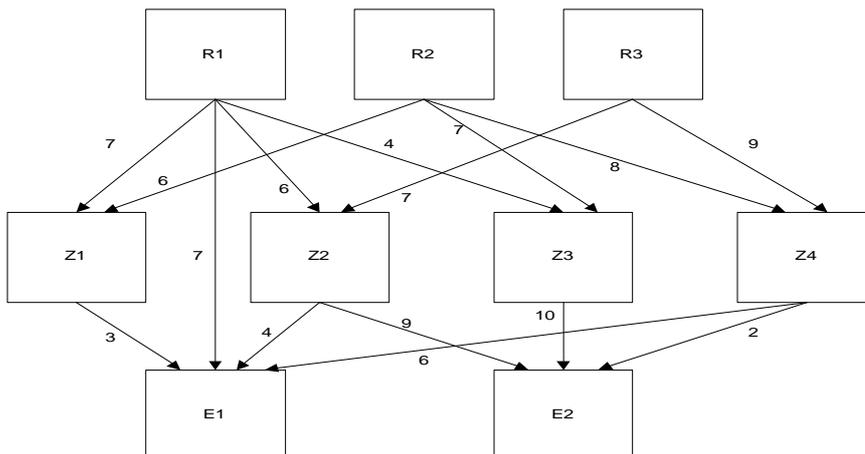
Alternativaufgabe

Erfinden Sie einen Produktionsprozess mit jeweils zwei bis drei Ausgangs-, Zwischen- und Endprodukten.

Stellen Sie die Materialverflechtung des Produktionsprozesses graphisch und mit Matrizen dar.

Aufgabe aus einem Abiturvorschlag 1999

Das folgende Diagramm verdeutlicht die Materialverflechtung bei Fertigungsprozessen innerhalb eines Werkes zwischen Rohstoffen sowie Zwischen- und Endprodukten und zeigt die jeweils benötigten Mengeneinheiten (ME) an.



- a) Zeigen Sie auf, dass die folgende Matrix, die Sie im TI-92 unter „goz“ aufrufen können, die zum Diagramm gehörige Gozinto-Matrix ist.

Erläutern Sie dabei wesentliche Strukturelemente einer solchen Matrix. Kommentieren Sie insbesondere die erste Zeile und die letzte Spalte.

$$\text{goz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & 4 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Dem Werk liegt folgende Bestellung vor:
 R_1 : 100 ME, R_2 : 200 ME, R_3 : 150 ME, Z_1 : 350 ME, Z_2 : 400 ME, Z_3 : 100 ME, Z_4 : 250 ME,
 E_1 : 500 ME, E_2 : 400 ME.
 Ermitteln Sie sowohl den dazugehörigen Bedarfsvektor als auch die dazugehörige Bedarfsmatrix.
 Kommentieren Sie unter Angabe von Beispielen die unterschiedliche Aussagekraft bei der Bedarfsermittlung.
- c) Untersuchen Sie, ob zu der obigen Bestellung noch zusätzlich eine Bestellung von Z_3 und Z_4 angenommen werden kann, wenn die Kapazitäten von R_1 , R_2 und R_3 jeweils mit 80.000 ME begrenzt sind.



Erlaubte Hilfsmittel

Taschencomputer TI-92 mit Handbuch sowie der gespeicherten Funktion $kr(x)$ und der Matrix goz ,
 wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengerät.

Teil-aufg	Erwartete Leistung	Gewichtung			Bemerkungen	
		I	II	III		
a)	Quadratische Matrix; in „technischer Reihenfolge“ aufgebaut; Elemente beeinflussen ausschließlich die höherer Ordnung; deshalb Rechtecke mit Nullen und ausschließlich Nullen unter der Hauptdiagonalen; $R_1 \rightarrow E_1$ kann günstig integriert werden. 1. Zeile: Zuführung von R_1 zu letzte Spalte: E_2 enthält als Teile ...	4	2	2	ausführlicher Text	
		4	4			
b)	(E + goz + goz^2) zeigt die Gesamtverflechtung auf. Bestellvektor: Bestellung in Spalten Bestellmatrix: quadratische Matrix mit Bestelldaten auf der Hauptdiagonalen, sonst Nullen; (E + goz + goz^2) X Bestell-Matrix zeigt detailliert den Bedarf von Teilen der Bestellung an Elementen niedrigerer Ordnung auf. (E + goz + goz^2) X Bestell-Vektor klärt den Gesamtbedarf.	6	2	4	schwierige Interpretation	
		4	1	3		
		4	1	3		
		4	2	2		
c)	Veränderung der Komponenten von Z_3 und Z_4 im Bestellvektor führt zu linearen Ungleichungen.	6	2	4	völlig neu	
	Summe	32	12	16	4	
	Gesamtsumme	100	37	51	12	

Literatur

- [1] **Kroll, W., Reiffert, H.P., Vaupel, J.:** Analytische Geometrie/Lineare Algebra; Grund- und Leistungskurs. Dümmler, Bonn 1997.
Schulbuch mit dem didaktischen Prinzip: Entwicklung einer erkennbar relevanten Mathematik anhand von Fragestellungen, die im Sinnhorizont des Schülers liegen.
- [2] **Griesel, H., Postel, H. (Hrsg.):** Mathematik heute; Leistungskurs Lineare Algebra/Analytische Geometrie. Schroedel, Hannover 1986.
Schulbuch, welches die Analytische Geometrie in den Vordergrund stellt. Das Buch enthält auch Beispiele der hier beschriebenen Art.
- [3] **Griesel, H., Postel, H. (Hrsg.):** Mathematik heute; Lineare Algebra/Analytische Geometrie. Schroedel, Hannover 1996.
Schulbuch, welches die Analytische Geometrie in den Vordergrund stellt. Das Buch enthält auch Beispiele der hier beschriebenen Art; Nachfolgewerk zu o. g..
- [4] **Lehmann, E.:** Lineare Algebra mit Vektoren und Matrizen. Metzler, Stuttgart 1990.
Schulbuch, welches explizit das Matrizenkalkül verfolgt.
- [5] **Lehmann, E.:** Fallstudien mit dem Computer, insbesondere MARKOW-Ketten. Teubner, Stuttgart 1983.
Das Buch enthält eine Fülle von Anwendungsaufgaben.
- [6] **Lehmann, E.:** Lineare Algebra mit dem Computer. Teubner, Stuttgart 1983.
Ein Buch, welches konzentriert auf Computereinsatz setzt; Vorläuferwerk zu Lit. [4].
- [7] **Lehmann, E.:** Problemorientierte Unterrichtseinheiten Wahrscheinlichkeitsrechnung. Volk und Wissen, Berlin 1997.
- [8] „Mathematik betrifft uns“, Hefte 4/94 und 5/94
Stochastik mit MARKOW – Ketten.
Diverse Anwendungsbeispiele mit Lösungen aus unterschiedlichen Blickwinkeln.
- [9] „Mathematik lehren“, 63 (1994), optimale Entscheidungen.
Interessante Anwendungen für den Einsatz von MARKOW-Ketten.
- [10] **Schwarze, J.:** Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler; Band 3: Lineare Algebra, Lineare Optimierung und Graphentheorie. Herne, Berlin 1996.
- [11] **Ohse, D.:** Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II; Lineare Wirtschafts algebra. Vahlen, München 1995.
- [12] **Tysiak, W.:** Multiplikation von Produktionsmatrizen und Gozinto-Verfahren. MNU, 51 (1998) 4, 212–217.
- [13] **Drijvers, P.:** Simulation ökologischen Wandels mit DERIVE: Vegetationen im Biesbosch. MU, (1995) 4, 48 ff.
- [14] **Lehmann, E.:** Lineare Algebra mit den TI-92, Texas Instruments.

Splines

Leitung des Workshops und Endredaktion: *Heiko Knechtel*

Funktionen sind das zentrale mathematische Instrument, um interessante Anwendungsprobleme z.B. aus der Physik oder den Ingenieurwissenschaften zu beschreiben und zu analysieren. In einigen wenigen Fällen sind die zugrunde liegenden Funktionen explizit bekannt, sodass man damit analytische Untersuchungen durchführen kann. Sehr oft ist es aber notwendig, mehr oder minder optimale Näherungsfunktionen zu konstruieren. Häufig stehen über diese Funktionen nur begrenzte Informationen zur Verfügung, die es in sinnvoller Weise zusammenzufügen gilt. Das zentrale Problem der Approximation ist die Konstruktion einer unbekannteren Funktion aus endlich vielen Datenpunkten. Neben innermathematischen Problemen kommt hinzu, dass die Daten häufig fehlerbehaftet sind, sodass die Funktion nicht eindeutig beschrieben werden kann.

Ein sinnvoller Weg, um ein sogenanntes Datafitting mittels unbekannter Funktionen durchzuführen, besteht in:

- Auswahl einer geeigneten Funktionenklasse,
- Auswahl einer geeigneten Funktion dieser Klasse aufgrund entsprechender Randbedingungen
 1. die Funktion soll relativ glatt sein,
 2. die Funktion soll einfach im PC zu speichern und zu bearbeiten sein,
 3. die Funktion mit ihren Ableitungen und Integralen soll einfach zu evaluieren sein,
 4. die Funktion soll das zugrunde liegende Problem in möglichst allgemeiner Form beschreiben und lösen.

Wenn man in den physikalischen bzw. ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen bleibt, ist die Bedingung 1 meist automatisch erfüllt. Bedingung 2 und 3 sind deshalb sehr wichtig, weil reale Probleme sich heute nicht ohne Rechner sinnvoll bearbeiten lassen. Bedingung 4 ist eine eher globale Forderung, die nur sehr eingeschränkt zu erfüllen ist.

In der Fachwissenschaft Mathematik werden im Rahmen der Approximationstheorie unterschiedliche Klassen von Näherungsfunktionen betrachtet, in der Numerischen Analysis werden effektive Algorithmen zur Bearbeitung dieser Funktionen entwickelt. Die Schulmathematik wird nur in kleinen Ausschnitten ihr Augenmerk auf einzelne Aspekte dieser fachwissenschaftlichen Disziplinen legen können. Hierbei kann der Fokus sowohl auf die Entwicklung eines Algorithmus zur Bearbeitung einer Näherungsfunktion als auch auf die Auswahl dieser Funktion gelegt werden. Die Optimierung der entsprechenden Algorithmen wird man häufig nur in Ansätzen beleuchten können, da aufgrund des eingeschränkten Datenmaterials die Notwendigkeit der Effizienzsteigerung nicht unmittelbar einsichtig ist. Computer-Algebra-Systeme täuschen darüber hinaus der Schülerin/dem Schüler im Rahmen seiner limitierten Untersuchungen vor, sämtliche derartige Probleme in einem angemessenen Zeitrahmen beherrschen zu können.

In diesem Aufsatz soll das Augenmerk auf eine spezielle Klasse von Näherungsfunktionen gelegt werden, die in der Literatur als Spline-Funktionen bekannt sind. Hierbei soll unter dem Einfluss moderner Taschencomputer ein einfacher Weg zur Behandlung dieser Funktionen im Grund- und im Leistungsfach Mathematik beschrieben werden, der nach Bedarf an vielen Stellen vertieft werden kann.

Einbettung in die Rahmenrichtlinien Mathematik

In der Jahrgangsstufe 11 werden nach der Einführung in die Differenzialrechnung unterschiedliche Problemkreise behandelt. Neben den Untersuchungen von Funktionen und ihren Graphen sind in den RRL die Behandlung von Anwendungen gefordert. Die Bestimmung von ganzrationalen Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften wird dabei explizit genannt.

In der Kursstufe wird im Kern bzw. als Erweiterung das Thema „Stetigkeit, Differenzierbarkeit“ und als Erweiterung „Krümmung“ angeboten. Außerdem wird auf Anwendungen aus der Geometrie sowie aus den Natur-, Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften hingewiesen.

Das Thema Spline-Funktionen verbindet unterschiedliche Aspekte, die neben der Modellbildung sowohl im Sinne der Einführung in Begriffe als auch der Anwendung von Methoden betrachtet werden können:

- Problemorientierung in unterschiedlichen Ebenen,
- Modellierung - reale Anwendung aus der Ingenieurwissenschaft,
- Anwendung bekannter Verfahren der Funktionsuntersuchung,
- Stetigkeit, Differenzierbarkeit (Einführung oder Anwendung/Vertiefung),
- Untersuchung abschnittsweise definierter Funktionen,
- Behandlung linearer Gleichungssysteme höherer Ordnung:
 - Algorithmisierung von 2x2 Gleichungssystemen, Verallgemeinerung,
 - Matrizenoperationen,
 - Lösungsverfahren des TC,
- Erweiterung auf Krümmungskreisproblematik,
- Vorüberlegungen für Realisierung auf modernen konstruktionsunterstützenden Programmpaketen (z.B. CAD/CAM).

Interpolationsprobleme treten in der Realität immer wieder auf. Die Tatsache, dass Splines dabei auch heute noch eine große Rolle spielen, lässt sich auf zwei wesentliche Aspekte zurückführen:

1. Die Bestimmung von Splines erscheint zunächst gegenüber der von Interpolationspolynomen als sehr aufwendig. Die zugehörigen linearen Gleichungssysteme lassen sich aber elementar vereinfachen, sodass die zugehörigen Matrizen fast in Dreiecksgestalt erscheinen (Optimierung des entsprechenden Algorithmus). Dieses Phänomen wird im Unterricht nur eine Randerscheinung bleiben, aber es bietet eine der zentralen Begründungen für den Einsatz von Splines. Auch bei großen Systemen wächst die Rechenzeit zur Lösung der LGS quasi nur linear, da es einen zeitlinearen Algorithmus zur Bestimmung der Splines gibt. Bei Polynomen ist dies nicht der Fall, der Rechenaufwand steigt fast quadratisch an.
2. Für die Verwendung von Splines spricht die Tatsache, dass sie nicht wie Polynomfunktionen zum oszillieren neigen. Der Grund liegt in der Definition der Splines bzw. ihrer Eigenschaften im Bereich der Stützpunkte. Polynome neigen dagegen bei ungünstiger Wahl der Stützwerte zur Oszillation. Dieses lässt sich im Unterricht anhand der entsprechenden Graphen gut darstellen.

Problemstellung

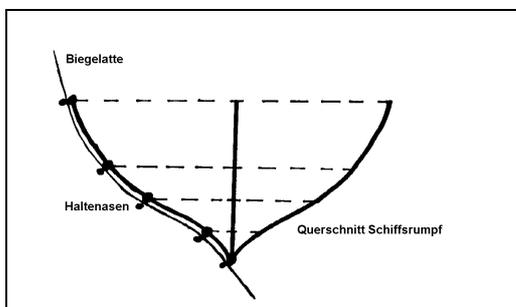


Abb. 1

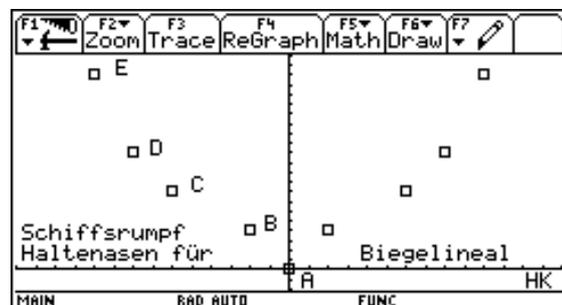


Abb. 2

Beim Bau eines Schiffes wirkt sich die Form des Rumpfquerschnittes sehr stark auf die Geschwindigkeit und den Energieverbrauch aus. Die Beschreibung des Querschnittes kann durch die Funktion der Außenhaut vorgenommen werden. Aus Symmetriegründen ist nur eine Teilfunktion für die Beschreibung notwendig (Abb. 1).

Wenn man die Haltenasen oder Stützpunkte digitalisiert, kann man sie als Daten in eine Liste übernehmen und auf dem Rechner darstellen (Abb. 2). Der Maßstab wurde hier so gewählt, dass das Zahlenmaterial ganzzahlig ist. Durch die vorgegebenen Punkte kann man nun zunächst per Anschauung eine Kurve legen, die den vorgegebenen Bedingungen genügt. In der Literatur wird diese Interpolationsfunktion als kubische Spline-Interpolation bezeichnet.

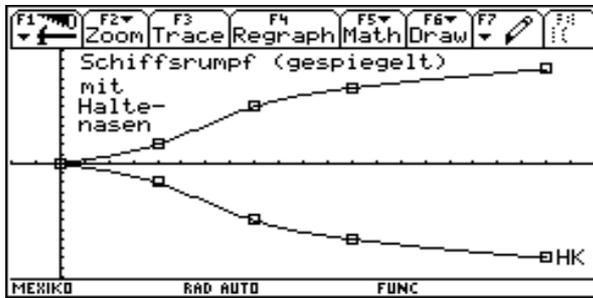


Abb. 3

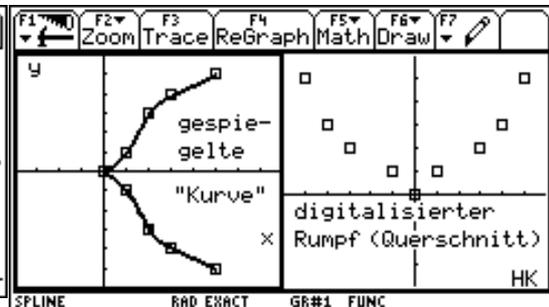


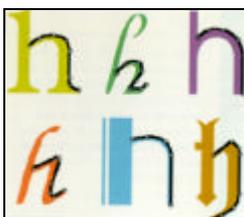
Abb. 4

Um sehr große Steigungswerte an den Rändern zu vermeiden, ist es sinnvoll, die Randfunktion an der Winkelhalbierenden zu spiegeln (Abb. 3). Daraus ergibt sich eine Kurve, die an den Rändern eher „flache“ Steigungen hat. Zur Darstellung auf dem TC wurde das ZoomData gewählt, um alle Daten optimal auf dem Display darzustellen. Es wurden die Achsen unterschiedlich gestreckt, sodass sich eine verzerrte Darstellung ergibt. Will man den Rumpf maßstabsgetreu darstellen, bietet sich ein Splitting des Displays an. Dadurch wird der Bildschirm in „quadratähnliche“ Bereiche aufgeteilt (Abb. 4).

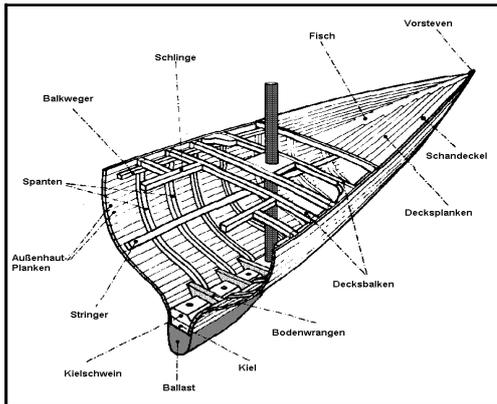
Will man das Problem graphisch aufarbeiten, haben sich biegsame Kurvenlineale (engl. spline) sehr gut bewährt. Zur zeichnerischen Interpolation wird das Biegelineal in sogenannten Haltenasen verankert. Durch die Elastizität des Materials stellt sich das Lineal so ein, dass seine Biegeenergie minimal wird. Dadurch werden glatte, wenig wellige Graphen erzeugt.

Spline-Funktionen sind aus den Ingenieurwissenschaften schon sehr lange bekannt. Aufgrund der Tatsache, dass ihre Bestimmung zu sehr umfangreichen linearen Gleichungssystemen führt, wurden sie in der Schule nur sehr selten behandelt. Reale Anwendungen, die über triviale Fälle hinausgehen, führen schnell zu Gleichungssystemen der Ordnung 16 und höher. Diese sind ohne Reibungsverluste für die Motivation in der praktischen Durchführung nur noch mit Computer-Algebra-Systemen zu bearbeiten. Eine Behandlung ohne CAS wird bei Kroll [2] vorgestellt. (Das durchgerechnete Beispiel führt allerdings auf ein nicht korrektes Ergebnis, was sich durch Ausnutzung von GTR oder TC schnell nachweisen läßt.) Unter Ausnutzung von CAS werden die umfangreichen Berechnungen auf den Computer delegiert, der Blick bleibt dadurch für die wichtigen Aspekte frei.

Die Bestimmung von Spline-Funktionen ist sehr arbeitsaufwendig. Nur durch Einsatz von CAS kann eine unangemessene Verlagerung der Aktivitäten im Unterricht auf das Lösen von umfangreichen LGS vermieden werden. Die Rückführung der Bestimmung von Splines auf einen zeitlinearen Algorithmus wird im Unterricht nur dann sinnvoll sein, wenn man im Anschluß den Algorithmus programmieren will. Dies wird aber nur in Ausnahmefällen möglich sein, wenn Informatikinhalte in den Kurs integriert werden sollen.

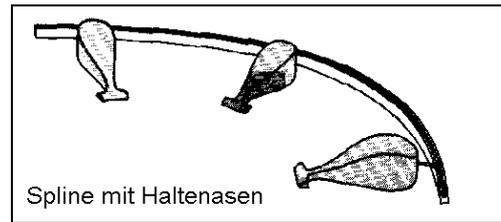


Anwendung von Splines bei PostScript™- und TrueType™-Schriftfonts: Die abschnittsweise definierten Kurvenzüge werden als Splines dargestellt. Die zugehörigen Parameter, die den Spline eindeutig bestimmen, werden für jeden Schrifttyp im Rechner gespeichert. In diesem Sachzusammenhang werden auch die mit den Splines eng verwandten Bezier-Kurven angewendet.



Blick ins Vorschiff eines konventionellen Holzbaus. Handbuch für den Yachtbau, DK

Abb. 5



Spline mit Haltenasen



Problem

- Bei der Entwicklung einer aerodynamischen Karosserie will man einen Längsschnitt bestimmen, der durch Befestigungspunkte fixiert ist.
- Bei der Konstruktion eines Schiffsrumpfes soll durch vorgegebene Spanten eine Beplankung erstellt werden. Diese Beplankung soll im Querschnitt gezeichnet werden.

- Bei der Planung einer neuen Teiltrasse für den Verkehr hat man durch äußere Gegebenheiten Fixpunkte festgelegt, durch die die neue Strecke verlaufen soll.
- Für den Entwurf neuer Schrifttypen sollen skalierbare Grundtypen möglichst einfach durch eine Funktion beschrieben werden.
-

Forderung: Die „Biegung“ (Biegeenergie) bzw. die „Krümmung“ der Gesamtkurve soll möglichst klein sein.

Phase 1

Erstellung eines mathematischen Modells: die Fixpunkte werden markiert und in ein geeignetes Koordinatensystem übertragen. Dadurch werden Bedingungen festgelegt, die zur Bestimmung einer Funktion führen. Der Ansatz wird hierbei möglichst einfach gewählt, d.h. es wird eine ganzrationale Funktion (höchstens) des Grades $n-1$ bei n vorgegebenen Punkten bestimmt.

Phase 2

Die zu bestimmende Funktion wird auf „Verträglichkeit mit dem Basisproblem“ untersucht.

Phase 3

Die Fixpunkte werden in einem realen Modell verankert und durch eine reale Biegelinie verbunden. Hierfür kann man ein Biegelineal verwenden, das sich aufgrund seiner hohen Elastizität den Fixpunkten in sogenannten Haltepunkten mit einer minimalen Biegeenergie anschmiegt.

Phase 4

Zu diesem realen Modell wird ein mathematisches Modell entwickelt, das mit möglichst einfachen Funktionstermen die Biegelinie beschreibt. Eine Möglichkeit hierfür sind kubische Spline-Funktionen.

Phase 5

Das Problem wird variiert. Man kann einzelne Stützstellen in vorgegebenen Bereichen variabel halten und nach optimalen „Kurven“ forschen.

Phase 6

Die Untersuchung der Spline-Funktionen kann als Motivation zur Herleitung allgemeiner Krümmungsfunktionen dienen. Anschließend kann das Ausgangsproblem unter diesen neuen Bedingungen betrachtet werden.

Man kann zeigen, dass sich die gesuchte Funktion aus Polynomen höchstens dritten Grades zusammensetzen lässt. Die Spline-Funktion stellt sich so ein, dass seine „Biegeenergie“ minimal wird. Dies lässt sich durch das zugehörige Modell visuell gut nachvollziehen. Der physikalische Nachweis ist bei Thode [3] dargelegt.

Für die zu bestimmende Funktion bedeutet dieses, dass man für jeweils zwei aufeinanderfolgende Stützstellen ein Polynom höchstens dritten Grades finden muss, das gewissen Bedingungen genügt. An den Randpunkten darf es zwischen den jeweiligen zwei zusammengesetzten Funktionen einerseits keine Knicke und andererseits keine „Krümmungssprünge“⁹ geben. Vereinfacht heißt das, dass die zusammengesetzte Funktion mindestens zweimal differenzierbar sein muss.

Ausgehend von einem realen Problem muss zunächst ein geeignetes Koordinatensystem gefunden werden, in dem einerseits die Stützpunkte oder Haken des Splines und andererseits die Funktion beschrieben werden können.

Mit diesen Bedingungen erhält man ein lineares Gleichungssystem der Ordnung 16, das sich nur mit sehr großem Aufwand per Hand lösen läßt. Mit dem TC ergeben sich hier völlig neue Möglichkeiten, weil die Lösung des Systems vollständig dem Rechner übertragen wird. Die Rechenzeiten hierfür sind erstaunlich gering (weniger als eine Minute) und beeinflussen den Unterricht nicht negativ. Die daraus resultierende abschnittsweise definierte Funktion ist zwar „unhandlich“, aber durch den Einsatz des TC ist die weitere Behandlung unproblematisch. (Zur Bestimmung der Splinefunktion siehe Anhang.)

⁹ Auf die Krümmungsfunktion wird erst in einer späteren Unterrichtseinheit eingegangen. Hier wird das Problem nur durch Betrachten der 2. Ableitung gelöst. Nachdem man die Krümmungsfunktion hergeleitet hat, kann man das Problem noch einmal aufgreifen und eine Plausibilitätsuntersuchung durchführen (siehe auch Kapitel Krümmung).

$$\text{Spline-Funktion } \text{spline}(x) = \begin{cases} \text{linear} & \text{für } x < 0 \\ \frac{57}{172} \cdot x^3 + \frac{115}{172} \cdot x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{113}{172} \cdot x^3 + \frac{255}{86} \cdot x^2 - \frac{395}{172} \cdot x + \frac{85}{86} & \text{für } 1 < x \leq 2 \\ \frac{51}{172} \cdot x^3 - \frac{237}{86} \cdot x^2 + \frac{1573}{172} \cdot x - \frac{571}{86} & \text{für } 2 < x \leq 3 \\ \frac{5}{344} \cdot x^3 - \frac{75}{344} \cdot x^2 + \frac{527}{344} \cdot x + \frac{335}{344} & \text{für } 3 < x \leq 5 \\ \text{linear} & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

Beschreibung der Unterrichtseinheit (LK Jahrgangsstufe 12)

Im Rahmen einer Einführungs- und Wiederholungsphase wurde zu Beginn der Klasse 12 das Thema Interpolation behandelt. Dabei wurden insbesondere die aus der Klasse 11 bekannten Interpolationspolynome wiederholt. Die bekannten Verfahren wurden hierbei vertieft, die Anwendbarkeit des TI-92 auf derartige Problemstellungen untersucht. Es wurde ein Algorithmus für die Lösung von LGS erarbeitet und das im TC verwendete Verfahren mittels Matrizen erläutert.

1. Stunde

Für die Modellierung eines Schiffsrumpfes werden aus einer vorgelegten Skizze Daten ermittelt und durch Wahl eines geeigneten Maßstabes entsprechend angepasst.

Für diese Daten wird ein Interpolationspolynom bestimmt:

- Die Interpolationsbedingungen werden aufgestellt, daraus ergibt sich ein LGS.
- Das LGS wird in eine entsprechende Matrix übertragen und dann vom TC gelöst (Abb. 6, 7).
- Das Interpolationspolynom wurde auf dem Rechner als abschnittsweise definierte Funktion dargestellt und in dem Graphikfenster gezeichnet (Abb. 8, 9).

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
1 3 9 27 81 4
1 5 25 125 625 5]
1 0 0 0 0 0]
1 1 1 1 1 1
1 2 4 8 16 3
1 3 9 27 81 4
1 5 25 125 625 5]
rref(pol4mat)
MAIN RAD AUTO FUNC 4/30

```

Abb. 6

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
0 0 0 1 0 -5/6
0 0 0 0 1 1/12
1 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 -2/3
0 0 1 0 0 29/12
0 0 0 1 0 -5/6
0 0 0 0 1 1/12
define f(x)=p1[1,6]+p1[2,6]*x...
MAIN RAD AUTO FUNC 7/30

```

Abb. 7

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
fpol4(x)
{undef,x < 0
{29/12*x^2 + 1/12*x^4 - 5/6*x^3 - 2/3*x,x >
{undef,else
fpol4(x)
x < 0
{x^2 + 1/12*x^4 - 5/6*x^3 - 2/3*x,x ≤ 5,else
,else
fpol4(x)
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30

```

Abb. 8

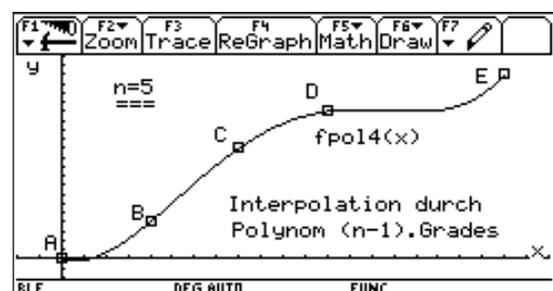


Abb. 9

In der ersten Stunde wird das vorgelegte Problem mit den bekannten Techniken, die in der Klassenstufe 11 erworben wurden, bearbeitet. Die Bestimmung eines Interpolationspolynoms führt auf ein lineares Gleichungssystem der Ordnung 5, das per Hand nur sehr mühevoll zu lösen ist. An dieser Stelle bietet es sich an, einen TC als nützliches Werkzeug entweder einzuführen oder ihn als bekanntes Hilfsmittel einzusetzen. Seine Funktion bleibt hier jedoch direkt auf die eines „Rechenknichtes“ beschränkt. Im Rahmen dieser Arbeit kann auch eine Einheit zur Bestimmung von Lösungsmengen von LGS ein- oder vorgeschaltet werden.

Bei der Darstellung des Interpolationspolynoms in dem relevanten Bereich wird die Schülerin/der Schüler indirekt angeleitet, sich mit dem Begriff der abschnittsweise definierten Funktion (wieder) vertraut zu machen. Die sehr klare und übersichtliche Struktur der WHEN-Funktion und die Darstellung im PRETTY-PRINT Modus tragen hier zur Übersichtlichkeit bei.

Sehr positiv hervorgehoben werden muss die Möglichkeit, Datenplots und Funktionsgraphen in einem gemeinsamen Bildschirm darzustellen. Erst hierdurch wird bewirkt, dass die Schülerin/der Schüler die Problemlösung auch „visuell kontrollieren“ kann. Die Erkenntnis, dass das gefundene Polynom die Punkte auch wirklich interpoliert, kann hier anschaulich unterstützt und auch mittels der TRACE-Funktion direkt nachgeprüft werden. Hier wird insbesondere der heute visuell stark geprägten Schüलगeneration ein Hilfsmittel an die Hand gegeben, das ihre „Begabung“ unterstützt und fördert. Gleichzeitig haben die Schülerinnen und Schüler aber auch die Möglichkeit, die Funktion analytisch zu betrachten. Neben der Kontrolle der Eingangsvoraussetzungen, dass die Funktion die gegebenen Werte interpoliert, können auch andere Kriterien untersucht und im Kontext bewertet werden.

2. Stunde

Das Interpolationspolynom wird mit Overheadfolie projiziert. Passend zu dieser Folie wird eine Plexiglasscheibe hergestellt, bei der die Stützpunkte durch Löcher markiert sind. Durch diese Löcher werden kleine Nägel gesteckt, die als Haltenasen dienen. „Durch“ diese Haltenasen wird ein Plastikstreifen gelegt, der aufgrund seiner Elastizität sich so ausrichtet, dass die Biegeenergie minimal ist (Abb. 12). Auf der Overheadprojektion ist klar zu erkennen, dass diese Linie von dem Polynom deutlich abweicht.

Die visuellen Beobachtungen werden in der Diskussion so weit möglich analysiert und führen zur ersten Forderung bzgl. der Eigenschaft der zu bestimmenden Funktion.

Der Name „Spline-Funktion“ als Biegelinie wird in diesem Sachzusammenhang eingeführt.

Der Vergleich des Interpolationspolynoms mit der Biegelinie ist der zentrale Impuls dieser Unterrichtseinheit. Hier wird mit einfachen Mitteln den Schülerinnen und Schülern das Problem visuell nahegebracht. Sie können unmittelbar **einsehen**, dass das vorher bestimmte Lösungspolynom bzgl. der vorgegebenen Problemstellung nur Teilbereiche abdeckt. Es interpoliert zwar die fünf Punkte, aber es ist in den Bereichen zwischen A und B bzw. D und E bzgl. der anschaulich zu kontrollierenden Biegung nicht optimal.

Die hieraus entwickelten Gedanken und Ideen sind das Maß der weiterführenden Arbeit. Die zu entwickelnden Verfahren sollen zu einer Beschreibung der Biegelinie führen, die anschließend mit dem realen Modell verglichen wird.

Die Erstellung einer entsprechenden Plexiglasscheibe ist nicht sehr anspruchsvoll und kann in Heimarbeit oder bei einem entsprechenden Handwerker in Auftrag gegeben werden. Wenn man die Scheibe so bohrt, dass durch die Löcher gleich ein entsprechendes Quadratgitter vollständig abgedeckt wird, lässt sie für die Problemstellung vielfältige Variationen zu. Die Tatsache, dass das Biege-lineal (Kunststoffstreifen) nicht zwischen zwei Haltenasen befestigt wird, kann vernachlässigt werden.

3. Stunde

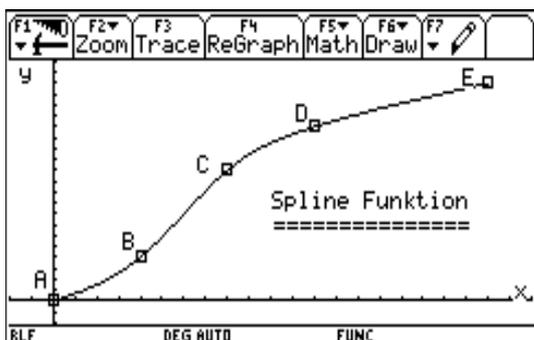


Abb. 10

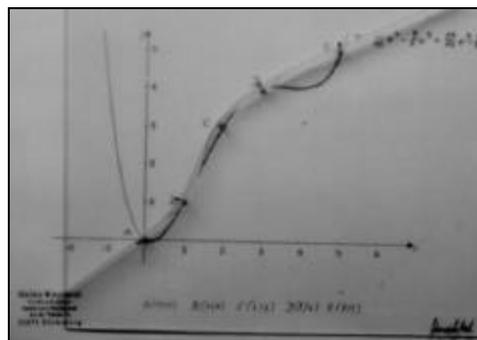


Abb. 11

Die Eigenschaften der Spline-Funktion werden bis auf die Randeigenschaften (Hinweis unten) entwickelt. Die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden in diesem Zusammenhang wiederholt (in Klasse 11 behandelt) und vertieft. Neben der Biegeenergie bzw. anschaulich der Krümmung wird die Länge der Kurve als Kriterium für die Beurteilung der optimalen Kurve diskutiert. Aufgrund der anschaulichen Darstellung des Daten-Polygons wird deutlich, dass dieses Kriterium nur sekundär im Sinne der Optimierung sein kann.

Die Entwicklung der Bedingungen für die Splines setzt gute Grundkenntnisse des Begriffes der Differenzierbarkeit voraus. Wenn dieser vorher noch nicht behandelt wurde, ist hier ein entsprechender Abschnitt (mit entsprechenden Zeitanteilen) einzuplanen. Wenn man den Begriff über den hier benötigten Umfang hinaus schärfen will, ist natürlich ein größerer Zeitraum dafür einzuplanen. Dieses kann aber auch im Anschluss in einer neuen Unterrichtseinheit geschehen. Die Diskussion über die Bewertungskriterien der beiden Linien kann unterschiedliche Aspekte beinhalten. Die Länge des Kurvenzugs wird durch Vergleich mit dem Polygonzug schnell als Hauptkriterium verworfen. Die Entwicklung der Bedingungen für die Spline-Funktion kann in Abhängigkeit von den Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler (GK, LK, Klasse 11) mehr Zeit in Anspruch nehmen.

Als Unterrichtsform bieten sich hier sowohl die Gruppenarbeit als auch das Klassengespräch an. Im Klassengespräch können die notwendigen Informationen über Splines besser integriert werden, in der Gruppenarbeit können kreative Aspekte zur Entwicklung einer derartigen Funktion besser gefördert werden.

4. Stunde

Durch die Vorgabe, dass die Spline-Funktion nur aus ganzrationalen Teilfunktionen des Grades maximal drei bestehen soll, wird die Anzahl der notwendigen Bedingungen abgeleitet.

Bedingungen für Spline-Funktion:

- Die Funktion interpoliert die Stützwerte.
- Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stützstellen stimmt die Funktion mit einem Polynom höchstens dritten Grades überein.
- Die Gesamtfunktion ist (mindestens) zweimal differenzierbar.
- An den Enden ist die Funktion linear fortsetzbar.

Hinweis: Die letzte Bedingung wird für den sogenannten **natürlichen Spline** gefordert. Alternativ dazu kann man auch fordern, dass der Spline in den Randstücken parabelförmig ausläuft oder dass der Spline durch die ersten beiden und letzten beiden Punkte kubisch ausläuft bzw. zusätzliche Bedingungen für die Steigungen in den Randpunkten erfüllt.

Geht man (wie im Lehrbuch von *Kroll*) von den fünf digitalisierten Punkten A(0|0), B(1|1), C(2|3), D(3|4) und E(5|5) als Stützpunkten aus, so erhält man daraus 16 Bedingungen:

- | | | |
|----|---------------------------|---|
| | $sp1(x_A) = y_A,$ | |
| | $sp1(x_B) = y_B,$ | $sp2(x_B) = y_B$ |
| 1. | $sp2(x_C) = y_C,$ | $sp3(x_C) = y_C$ |
| | $sp3(x_D) = y_D,$ | $sp4(x_D) = y_D$ |
| | $sp4(x_E) = y_E$ | |
| | $sp1'(x_B) = sp2'(x_B)$ | |
| 2. | $sp2'(x_C) = sp3'(x_C)$ | Steigung bei Annäherung von rechts/links gleich |
| | $sp3'(x_D) = sp4'(x_D)$ | |
| | $sp1''(x_B) = sp2''(x_B)$ | |
| 3. | $sp2''(x_C) = sp3''(x_C)$ | „Krümmung“ bei Annäherung von rechts/links gleich |
| | $sp3''(x_D) = sp4''(x_D)$ | |
| 4. | $sp1''(x_A) = 0$ | |
| | $sp4''(x_E) = 0$ | Spline ist an den „Enden“ linear fortsetzbar |

Diese 16 Bedingungsgleichungen legen ein LGS fest, das als Matrix in den TC eingegeben wird. Die Eingabe muss sehr sorgfältig durchgeführt werden, da kleinste „Tippfehler“ bereits zu völlig falschen Ergebnissen führen (Hausaufgabe).

Die Vorgabe, dass die Splines aus ganzzahligen Funktionen maximal dritten Grades bestehen, kann man nicht umgehen. In einem stark von technisch interessierten Schülerinnen und Schülern geprägten Kurs kann man unter Umständen anschließend diese Vorgabe nachweisen, es wird aber wohl eher die Ausnahme bleiben.

Bei der Diskussion der aufzustellenden Bedingungen (Unterrichtsform s.o.) wird schnell klar, dass es hierbei unterschiedliche Kategorien gibt:

1. Die Interpolationsbedingungen sind bereits aus dem Interpolationspolynom bekannt.
2. Die Bedingungen an die Steigungen in den Stützpunkten sind aus der Vorbetrachtung des Polygonzuges unmittelbar einsichtig und einfach algebraisch zu übersetzen.
3. Die Bedingungen bzgl. des Krümmungsverhaltens im Bereich der „Schnittpunkte“ sind nicht elementar und bedürfen einer intensiven Diskussion.
4. Die lineare Fortsetzbarkeit ist anschaulich einsichtig, die (angemessene) algebraische Umsetzung setzt aber großen Überblick voraus.

Die notwendigen Lernhilfen sind hier sehr sorgfältig auszuwählen und insbesondere bzgl. der letzten beiden Punkte auf die Lerngruppe abzustimmen.

Die Übersetzung der Splinebedingungen in ein LGS ist aufwendig und sollte z.B. durch Vorgabe einer entsprechenden Leertabelle gut vorbereitet werden. Auf die rechnerunabhängige Aufstellung einer entsprechenden Tabelle sollte auf keinen Fall verzichtet werden, da sonst durch nur unvollständige Tabellenausschnitte auf dem Display die Transparenz schnell verloren geht. Die Übertragung der Daten auf den Rechner findet in Einzelarbeit statt. Die Suche nach individuellen Fehlern kann sehr zeitaufwendig sein, eine vom Lehrer vorbereitete Matrix kann durch Überspielen auf den individuellen Rechner hier schnell Hilfe gewähren. Dies ist insbesondere deshalb wichtig, weil die kleinsten Schreibfehler bei der Matrix zu sehr großen Unstimmigkeiten in der insgesamt sehr komplexen Struktur der Spline-Funktion führen. Dieses kann unter Umständen auch ein Gegenstand der Betrachtung im Unterricht sein. Auf die individuelle Eingabe der Daten durch die Schüler sollte andererseits auch nicht verzichtet werden, weil gerade diese Arbeitsform mit ihrer hohen Fehleranfälligkeit die Arbeit mit dem TC auch prägen. Die Schülerin/Der Schüler erfährt hier sehr deutlich, dass

Flüchtigkeitsfehler nicht zu einer Fehlermeldung, wohl aber zu katastrophalen Ergebnissen führen. Fehler können hier sehr gewinnbringend zum Unterrichtsgegenstand werden. Die Aufbereitung der Daten auf dem Rechner und die Lösung des Gleichungssystems können in häuslicher Arbeit durchgeführt werden. Die Beurteilung und Auswertung der dann vorliegenden Ergebnisse bieten einen guten Einstieg in die nächste Stunde.

5. Stunde

Das LGS wird mittels TC gelöst (Abb. 13, 14), die zugehörige Spline-Funktion wird aufgestellt (Abb. 15, 16) und vom Rechner gezeichnet (Abb. 17).

Mittels der arLen-Funktion wird die Länge der jeweiligen Kurven ermittelt und verglichen (Abb. 18, 19, 20), zusätzlich wird die Länge des Polygons zur Beurteilung mit herangezogen.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7				
Plot	Setup	Cell	Matrix	Calc	Util	Stat				
MAT 16x17	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	3	2	1	0	-3	-2	-1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	0	0	8	4	2	1	0	0
6	0	0	0	0	12	4	1	0	-12	-4
7	0	0	0	0	0	0	0	0	27	9

ric1=0
MAIN RAD AUTO FUNC

Abb. 12

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
3	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0

pref(cmat)
MAIN RAD AUTO FUNC 13/30

Abb. 13

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
sp2(x)	$\frac{-113 \cdot x^3}{172} + \frac{255 \cdot x^2}{86} - \frac{395 \cdot x}{172} + 85/86$				
sp3(x)	$\frac{51 \cdot x^3}{172} - \frac{237 \cdot x^2}{86} + \frac{1573 \cdot x}{172} - \frac{571}{86}$				
sp4(x)	$\frac{5 \cdot x^3}{344} - \frac{75 \cdot x^2}{344} + \frac{527 \cdot x}{344} + \frac{335}{344}$				
sp1(x)					

MAIN RAD AUTO FUNC 8/30

Abb. 14

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
sp4(x)	$\frac{5 \cdot x^3}{344} - \frac{75 \cdot x^2}{344} + \frac{527 \cdot x}{344} + \frac{335}{344}$				
mspline(x)	$\begin{cases} \text{undef}, & x < 0 \\ \text{sp1}(x), & x \leq 1 \\ \text{sp2}(x), & x \leq 2 \\ \text{sp3}(x), & x \leq 3 \\ \text{sp4}(x), & x \leq 5 \\ \text{undef}, & \text{else} \end{cases}$				
fpol4(x)					

MAIN RAD AUTO FUNC 9/30

Abb. 15

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
arcLen(mspline(x), x, 0, 5)					7.3346
arcLen(fpol4(x), x, 0, 5)					7.76171
"algebraische Ermittlung mit der"					
"algebraische Ermittlung mit der"					
"arcLen-Funktion" "arcLen-Funktion"					
"Vergleich der Kurvenlänge"					
"Vergleich der Kurvenlänge"					
"Vergleich der Kurvenlänge"					

MAIN RAD AUTO FUNC 5/30

Abb. 16

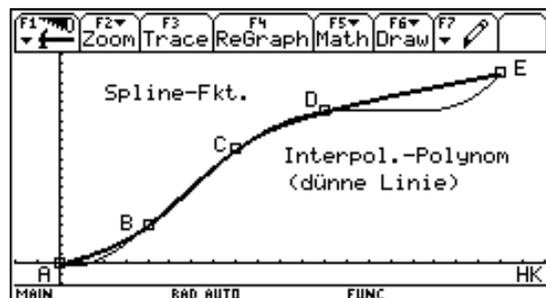


Abb. 17

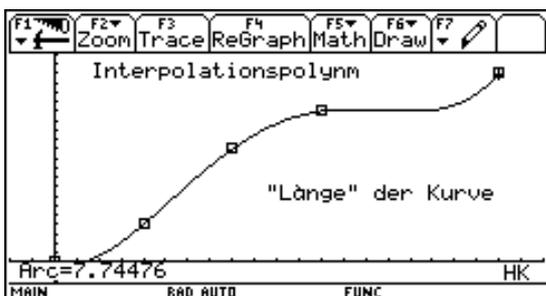


Abb. 18

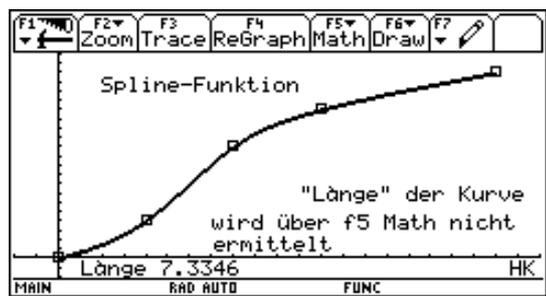


Abb. 19

Die Lösung des LGS kann in unterschiedlicher Form vorgenommen werden:

- Mit Hilfe des Befehls `rref(Matrix)` wird eine Matrix erzeugt, die in der Hauptdiagonalen Einsen hat, in der letzten Spalte den Ergebnisvektor und sonst nur Nullen. Der Befehl **rref** : **reduced row echelon of a matrix function** gibt also die reduzierte Zeilenstaffelform der Matrix zurück. Wenn man diese Matrix unter einem neuen Namen abspeichert, kann man auf die Elemente der letzten Zeile direkt in der Form `amat[1,17]` zugreifen.
- Wenn man die Matrix der Koeffizienten des LGS und der „Ergebnisse“ separat angibt, kann man mit dem Befehl `simult(Matrix, Vektor)` die Lösung des LGS als Vektor direkt erzeugen. Dies ist insgesamt für die Weiterverarbeitung etwas übersichtlicher. Wenn man diesen Vektor unter einem neuen Namen abspeichert, kann man auf die einzelnen Komponenten ebenfalls direkt zugreifen.
- Wenn man auf dem Rechner ein Programm¹⁰ zur Lösung von LGS installiert hat, kann man das LGS in gewohnter Form darstellen und lösen lassen.
- Mit den bekannten Matrizenoperationen läßt sich das LGS lösen.

Die erste Variante hat den Vorteil, dass die Schülerinnen und Schüler noch das System der Gleichungsumformung erkennen. Durch die reduzierte Zeilenstaffelform ist jede Zeile direkt als Lösung für einen Parameterwert des LGS **lesbar**. Dieser Vorteil sollte in der Anfangsphase des Umganges mit dem TC didaktisch genutzt werden. Der Nachteil ist nur durch den Umfang der Matrix gegeben, der die Möglichkeiten des Displays etwas überfordert. Man kann zwar innerhalb der Matrix mit `& Cursor` $\uparrow\downarrow$ auch die einzelnen Zeilen betrachten, doch ist das sehr umständlich. Besser ist es sicher, wenn man die Matrix abspeichert und im Matrixeditor betrachtet. Außerdem sollte man wenn möglich die Matrix den Schülerinnen und Schülern in ausgedruckter Form (z.B. über TI Graphlink) zur Verfügung stellen.

Die zweite Variante liefert bei hinreichender Kenntnis der Lösungsverfahren für LGS die besser weiter zu verarbeitende Form. Der Lösungsvektor ist als Endprodukt besser zu erkennen.

Die dritte Variante hat den Nachteil, dass man das LGS vollständig unter Einbeziehung der Variablennamen eingeben muss. Bei derartig umfangreichen Systemen ist das nur unter erheblichen Aufwand zu realisieren. Hinzu kommt, dass das Programm in der Grundausstattung nicht vorhanden ist. Die vierte Variante wird man nur in der Einführungsphase in Erwägung ziehen. Die Aufstellung der einzelnen Teil-Splines sollte durch Zugriff auf die Lösungsmatrixelemente geschehen. Die direkte Eingabe der Koeffizienten ist umständlich und kann anschließend nicht variiert werden. Bei dem Aufruf der einzelnen Funktionen werden die zugehörigen Koeffizienten dann entsprechend als Zahl eingefügt. Die Definition des Gesamtsplines wird durch die WHEN-Funktion realisiert. Bedingt durch die umfangreiche Fallunterscheidung ist hier sehr gewissenhaftes Arbeiten erforderlich. Die Fehlermeldungen geben dabei jedoch eine gute Hilfe zur Fehleranalyse. Die Zeichnung der Spline-Funktion zusammen mit dem Interpolationspolynom zeigt die Problemstellung und die Lösung noch einmal deutlich auf. Um die berechnete Spline-Funktion mit der Kurve des Biegelineals zu vergleichen, kann man sie auf die Bereiche $<x_A$ bzw. $>x_E$ linear erweitern. Dies kann direkt im Unterricht oder als Hausaufgabe geschehen.

Als Kriterium für die Beurteilung der beiden Lösungskurven kann die Länge des Kurvenzuges mit herangezogen werden. Dies ist im Graphikmodus über das Menü F5 MATH oder im Algebra-Modus über den Befehl `arLen` möglich. Aufgrund der sehr komplexen Struktur der Spline-Funktion verweigert der Rechner im Graphik-Modus die Längenbestimmung, was hingegen im Algebra-Modus gelingt. Hier wird auf den Befehl `arLen` nur im Sinne eines Black-Box-Befehls zugegriffen, die weitere Erläuterung geschieht erst im Umfeld der Integralrechnung.

Wenn man den `arLen`-Befehl auf eine nicht definierte Funktion anwendet, gibt der Rechner die allgemeine Integraldefinition aus.

¹⁰ Z.B. über die DERIVE USER GROUP von Wolfgang Pröpper, Nürnberg, zu erhalten .

6./7. Stunde

Spline-Funktionen, Differenzierbarkeitsuntersuchungen,.....

Bei abschnittsweise definierten Funktionen beachtet der TC weitgehend die Stellen, an denen Funktionen nicht differenzierbar sind. Hiermit ist das Thema Differenzierbarkeit noch nicht abgeschlossen.



Testen der Grenzen des Rechners!

Die weiterführenden Aufgaben und Probleme sollten einerseits der Vertiefung der Begriffe und Verfahren dienen, andererseits sollen sie auch die Kreativität anregen. Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, mit dem Rechner auch experimentell umzugehen. Eine derartige Phase kann die Motivation für die weitergehenden Fragestellungen der nächsten Stunden gut vorbereiten.

Wenn man das Thema Differenzierbarkeit in den Vordergrund stellt, kann man die Grenzen des Rechners an den bekannten Funktionen austesten. Hierbei greifen die unterschiedlichen Darstellungsformen und Befehle, wie z.B. der Limes-Befehl, eng ineinander.

8. Stunde

Das Problem des Schiffsrumpfes wird variiert: Eine Befestigungsnase soll in y-Richtung verschiebbar sein. Wie muss man die Lage dieser Nase wählen, damit die zugehörige Kurve optimal wird?

Die Bedingungen werden der neuen Fragestellung angepasst, in der zugehörigen Matrix wird ein Scharparameter t für den y -Wert des Punktes D eingesetzt. Die Lösung des LGS gelingt trotz des Parameters relativ schnell.

Die Aufstellung der Splines (Abb. 21-23) und der Gesamt-Spline-Funktion ist für die Schülerinnen und Schüler, die bereits vorher direkt auf die Matrizelemente zugegriffen haben, sehr einfach. Die Funktion $mspline(x)$ ist jetzt eine Funktionenschar, die bzgl. des Verhaltens der zweiten Ableitung an der Stelle $x=3$ optimiert werden soll. Es wird vereinbart, den Wert für t zu bestimmen, für den $mspline''(3)=0$ wird.

Mit dem TC ist diese Untersuchung kein Problem, da auf die entsprechenden Befehle des CAS zurückgegriffen werden kann.

$$sp1(x) = \frac{-15 \cdot t \cdot (x^2 - 1) - 117 \cdot x^2 - 55}{172} \cdot x$$

$$sp2(x) = t \cdot \left(\frac{75 \cdot x^3}{172} - \frac{135 \cdot x^2}{86} + \frac{285 \cdot x}{172} - 45/86 \right) - \frac{41}{1}$$

$$sp3(x) = \frac{-117 \cdot x^3 + 429 \cdot x^2 + 1971 \cdot x + 707}{172}$$

$$sp4(x)$$

Abb. 20

$$sp4(x) = t \cdot \left(\frac{53 \cdot x^3}{344} - \frac{795 \cdot x^2}{344} + \frac{3591 \cdot x}{344} - \frac{4705}{344} \right) - \frac{26}{1}$$

$$sp4(x) = \frac{-207 \cdot x^3}{344} + \frac{3105 \cdot x^2}{344} - \frac{13837 \cdot x}{344} + \frac{19155}{344}$$

Abb. 21

$$\frac{d^2}{dx^2}(sp3(x)) = \frac{-3 \cdot x \cdot (113 \cdot t - 503)}{86} + \frac{3 \cdot (143 \cdot t - 651)}{43}$$

$$zeros\left(\frac{-3 \cdot x \cdot (113 \cdot t - 503)}{86} + \frac{3 \cdot (143 \cdot t - 651)}{43}, x=3\right) = \left\{ \frac{207}{53} \right\}$$

Abb. 22

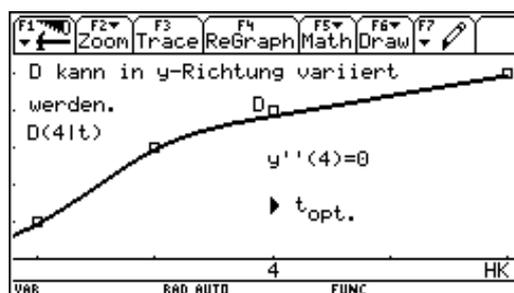


Abb. 23

Als Hausaufgabe soll die Funktion dargestellt (Abb. 24), mit der bereits erarbeiteten verglichen und bzgl. der Problemstellung bewertet werden.

Bewertungskriterien werden noch nicht festgelegt. Als ein mögliches Kriterium wird die Untersuchung der Länge der Funktion vorgeschlagen.

Wenn im Rahmen der Übungen bereits Variationen des Ausgangsproblems durchgeführt wurden, kann man diese Variationen hier systematisieren. Die Rahmenbedingungen werden mit den Schülerinnen und Schülern ausgehandelt, die Kriterien sind unter Umständen von ihnen frei wählbar. Diese „freie“ Phase der Beschäftigung mit Splines dient einerseits der Durchdringung des Grundproblems, andererseits soll die Variation von Problemstellungen als ein Grundprinzip im Mathematikunterricht erfahren werden. Hierbei sollen die Schülerinnen und Schüler insbesondere ein Gefühl dafür entwickeln, welche Variationen sinnvoll sind und welche nicht. Über das reine Probieren hinaus werden also auch Plausibilitätsbetrachtungen des eigenen Handelns und die daraus resultierende Systematik eingefordert. In dieser Phase bietet sich Gruppenarbeit an, weil die Diskussion über die Gründe der Variation wichtiger Bestandteil des Lernprozesses sind. Eine Vorstellung der Grupeergebnisse mit einer Begründung der entsprechenden Ansätze ist hier unabdingbarer Bestandteil der Arbeit.

Die hier vorgeschlagene Variation des Punktes D in y-Richtung ist nur ein möglicher Aspekt unter vielen. Sie hat den Vorteil, dass sie sich relativ einfach realisieren lässt, da nur wenige Daten, die sich auf die Interpolation im Punkt D beziehen, in der zugehörigen Matrix verändert werden müssen. Eine Verschiebung des Punktes in x-Richtung wirkt sich dagegen sehr viel stärker auf die Veränderung der Matrix aus.

Die Veränderung der y-Koordinate des Punktes D bewirkt, dass das zugehörige LGS einen Parameter hat, der sich auf alle Elemente des Lösungsvektors auswirkt. Diese Erfahrung ist für die Schülerinnen und Schüler häufig neu und zunächst nicht direkt einsehbar.

- Weshalb wirkt sich die Einführung des Parameters t auch auf die Bestimmung von Spline1 aus, obwohl dessen Verankerungspunkte A und B doch zunächst von der Veränderung nicht betroffen sind?
- Die algebraische Abhängigkeit ist aufgrund des BLACK-BOX-SOLVERS nur eingeschränkt (je nach Grundwissen) nachvollziehbar. Die Visualisierung des Problems an der modifizierten Plexiglasscheibe kann hier sehr zum Verständnis beitragen. Hierfür muss nicht unbedingt ein zusätzliches Loch in die Scheibe gebohrt werden, man kann die Veränderung auch sehr gut dynamisch durch die freie Bewegung des Haltepunktes D aufzeigen.

Die weiteren Kriterien bzgl. der Optimierung des Punktes D sind mit den Schülern zu vereinbaren. Hierbei sind unterschiedliche Aspekte sehr erwünscht.

9. Stunde

Bei der Bearbeitung der Hausaufgabe entwickelt ein Schüler folgende Idee:

- anstatt zu untersuchen, für welchen t -Wert die zweite Ableitung Null wird, zieht man einfach den Nagel „D“ aus der Plexiglasscheibe heraus und bestimmt einen Spline mit nur vier Stützpunkten (Abb. 25).

Die Bestimmung des Splines kann auf das vorherige Problem zurückgeführt werden. Die Bedingungen können durch Löschen von einzelnen Zeilen und Spalten relativ einfach in eine entsprechende Matrix übersetzt werden. Die Zeichnung der beiden Kurven wird auf den interessanten Teil zwischen den Punkten C und E fokussiert.

Die Bestimmung des zugehörigen Splines ergibt eine Funktion, die mit der vorher als optimal bezeichneten Funktion im Bereich zwischen C und E nur wenig übereinstimmt (siehe Abb. 26).

Die Diskussion über mögliche Gründe wird aufgrund mangelnder Kenntnisse des physikalischen Hintergrundes auf die zwei Optimierungsstrategien zurückgeführt:

- Optimierung des lokalen Verhaltens der Spline-Funktion bei $x=3$,
- Optimierung des globalen Verhaltens der Spline-Funktion im Bereich zwischen $x=2$ und $x=5$.

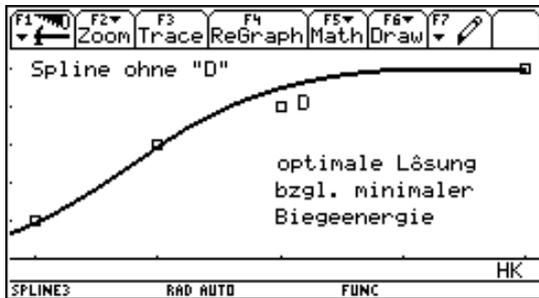


Abb. 24

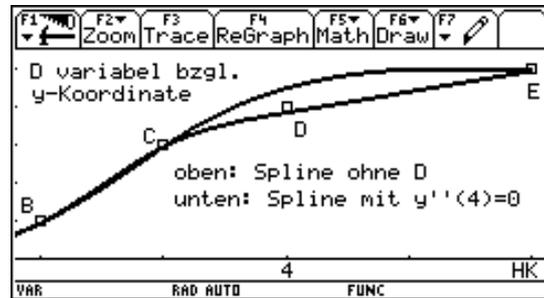


Abb. 25

Die Idee, die Haltenasen in x-Richtung zu verändern oder sie frei zu verändern, wird analysiert und aufgrund umfangreicher Umformungen der zugehörigen Matrix bzw. der Einführung eines zweiten Parameters als nicht angemessen verworfen.

Die Variation, den Punkt D als Befestigungspunkt ganz zu entfernen, bringt erstaunliche Ergebnisse:

- Die so bestimmte Spline-Funktion stimmt mit der anderen Funktion, die über die Minimierung des Betrages der zweiten Ableitung bei x_D gefunden wurde, nicht überein. Darüber hinaus stellt man fest, dass sie im Bereich um den Punkt D sich deutlich anders verhält als die anderen Funktionen.

In der graphischen Darstellung wird das ebenso deutlich wie an dem Plexiglasmodell. Diese Beobachtung bildet die Grundlage für eine Diskussion, die die Eigenarten der Spline-Funktion noch einmal deutlich untersucht.

In diesem Zusammenhang kann man mehrere Begründungsstrategien anwenden:

- Man überträgt die weitere Untersuchung und Begründung einem Physiker. Da derartige Untersuchungen nicht unbedingt zum Schulstoff gehören, wird man nicht immer Erfolg haben.
- Man versucht das Phänomen aus der Anschauung heraus zu erklären.
- Man versucht mathematische Begriffe wie lokales und globales Verhalten einer Funktion mit den Ursachen zu verknüpfen.
- Wie wirkt sich der Abstand der Halterungspunkte auf die Länge eines Splines aus?
- ...

10./11. Stunde

Zusammenfassende Wiederholung des Themengebietes mit entsprechender Reflexion der neu erarbeiteten Begriffe und Verfahren aus dem Sachgebiet (z.B. *Kroll* Lit. [2], S. 130).

Symmetrieuntersuchungen werden an Splines nicht durchgeführt. Die entsprechende Aufgabe in der Klausur wird durch Untersuchungen an Polynomen vorbereitet.

Anhand der bekannten Kriterien für ganzrationale Funktionen wird der Symmetriebegriff wiederholt und vertieft und auf Symmetrie zu beliebigen Punkten bzw. beliebigen Parallelen zur y-Achse erweitert.

Die Aufgaben können neben der Vertiefung des Sachgebietes auch zu weiteren Variationen benutzt werden. Die sinnvolle Vorbereitung einer Lernkontrolle ist ebenfalls zu berücksichtigen. Hierbei ist mit den Schülerinnen und Schülern auch Form und Grad der Dokumentation ihrer Arbeit abzusprechen.

Zweidimensionale Spline-Interpolation

Eine Anwendung der Interpolation durch Spline-Funktionen besteht in der Konstruktion von „glatten Kurven“ in der Ebene. Dieses Problem tritt z.B. bei Querschnittsflächen oder bei der Darstellung von True-Type-Fonts auf:

Man hat n Punkte der Form $P_i(x_i|y_i)$, die in einer vorher festgelegten Reihenfolge, die z.B. durch die vorgegebene Form bestimmt ist, verbunden werden sollen. Wenn man Punkte in der Ebene verbinden will, wird es oft nicht möglich sein, die Verbindungslinie durch eine Funktion $y=f(x)$ darzustellen. Als Hilfe benutzt man Kurven in Parameterdarstellung $x=x(t)$ und $y=y(t)$ mit dem Parameter t . Die Parameterwerte für t sind dabei eine wachsende Folge von Werten. Als Kurvenparameter wäre hierbei a priori die Länge des Kurvenbogens am geeignetsten. Da diese aber nicht bekannt ist, wählt man die „Länge“ des entsprechenden Polygonzuges.

Wenn man eine parametrische Spline-Kurve durch vorgegebene Punkte legen will, muss man die gleichen Kriterien wie in Abschnitt 4 an die beiden einzelnen Kurventeile stellen. Hierbei wird dann jeweils ein Spline für $x(t)$ und für $y(t)$ bestimmt, die anschließend gemeinsam dargestellt werden. Die einzelnen Parameterwerte kann man rekursiv bestimmen.

$$t(1) = 0 \quad (\text{gilt für den Startpunkt } P_0)$$

$$t(i+1) = t(i) + \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}, \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1$$

Für die Parameterwerte wird man auch bei „glatten“ Koordinatenwerten der Punkte P_i , bedingt durch die Wurzeln, nicht mit den exakten, sondern mit Näherungswerten rechnen. Die dadurch entstehenden Rundungsfehler sind im Rahmen der Modellierung zu betrachten. Für die meisten Anwendungen sind sie jedoch nicht entscheidend.

Durch parametrische Kurven kann man zu vorgegebenen Punkten auch Spiralen mit Splines beschreiben.

Beispiel

Der Schnitt durch die Tragfläche eines Flugzeuges hat folgende Datenpunkte ergeben:

$$P_1(5|3), P_2(3|1), P_3(1|2), P_4(2|5), P_5(4|4)$$

Die Schnittfläche soll durch eine möglichst glatte Kurve beschrieben werden. Die Parameterwerte für t sind hier auf vier Nachkommastellen gerundet in einer Liste k gespeichert, auf deren Elemente einzeln zugegriffen werden kann:

$$k = \{ 0 ; 2,8284 ; 5,0645 ; 8,2268 ; 10,4628 ; 11,8771 \}$$

Die einzelnen Teilsplines p_1, \dots, p_5 und s_1, \dots, s_5 sind jeweils in dem zugehörigen Bereich $[k(i) ; k(i+1)]$ definiert. Die Bestimmung erfolgt wie vorher angegeben.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 F8
Zoom
PLOTS
x t1=p1(t) | t ≥ k[1] and t < k[2]
y t1=s1(t) | t ≥ k[1] and t < k[2]
x t2=p2(t) | t ≥ k[2] and t < k[3]
y t2=s2(t) | t ≥ k[2] and t < k[3]
x t3=p3(t) | t ≥ k[3] and t < k[4]
y t3=s3(t) | t ≥ k[3] and t < k[4]
x t1(t)=p1(t)|t≥k[1] and t<k[2...
MAIN DEG APPBOX PAR

```

Abb. 26

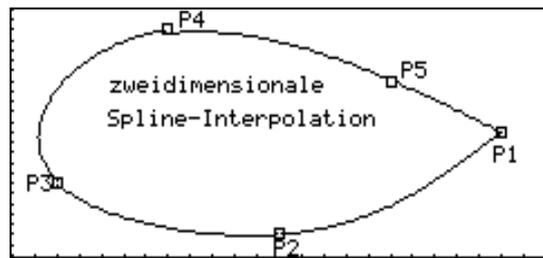


Abb. 27

Beispiel „Die maximale Dichte von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur“

Die Dichte von Wasser erreicht bekanntlich etwas oberhalb des Gefrierpunktes ihr Maximum. Aus einem Handbuch für Chemiker und Physiker kann man folgende Tabelle entnehmen, die die Dichte von Wasser in g/cm³ für fünf Temperaturen zwischen -10° C und +30° C angibt:

Temperatur in °C	-10	0	10	20	30
Dichte in g/cm ³	0.99815	0.99987	0.99973	0.99823	0.99567

Um Aussagen über das Maximum der Dichte zu machen, müssen die Daten durch eine entsprechende Spline-Funktion interpoliert werden. Von der zugehörigen Funktion wird dann das Maximum in dem vorgegebenen Intervall bestimmt.

Mit $x_1 = -10, \dots, x_5 = 30$, d.h. $h=10$ und $y_1 = 0.99815, \dots, y_5 = 0.99567$ ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen für den Vektor:

$$\frac{3}{h^2} \cdot (y_1 - 2y_2 + y_3) = -0.0000558$$

$$\frac{3}{h^2} \cdot (y_2 - 2y_3 + y_4) = -0.0000408$$

$$\frac{3}{h^2} \cdot (y_3 - 2y_4 + y_5) = -0.0000318$$

Damit ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0000558 \\ -0.0000408 \\ -0.0000318 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b_1=b_5=0, b_2=-0.0000126, b_3=-0.0000054, b_4=-0.0000066$$

$$\Rightarrow a_1=-0.00000042, a_2=0.00000024, a_3=-0.00000004, a_4=0.0000022$$

$$\Rightarrow c_1=0.000214, c_2=0.000088, c_3=-0.000092, c_4=-0.000212$$

$$\text{spline}(x) = \begin{cases} 0.00000042(x+10)^3 + 0.0000214(x+10) + 0.99815 \\ 0.00000024(x+0)^3 - 0.00000126(x+0)^2 + 0.000088(x+0) + 0.99987 \\ 0.00000004(x-10)^3 - 0.0000054(x-10)^2 - 0.000092(x-10) + 0.99973 \\ 0.0000022(x-20)^3 - 0.0000066(x-20)^2 - 0.000212(x+10) + 0.99823 \end{cases}$$

Um das Modell zu verbessern, kann an Stelle des natürlichen Splines auch eine Spline-Funktion gewählt werden, die an den Enden nicht linear, sondern parabelförmig ausläuft. Hierbei wird einfach angenommen, dass die Spline-Funktion in den Anfangs- und Endintervallen durch eine Parabel 2.

Grades approximiert werden kann. Dadurch wird die Anzahl der Bedingungen entsprechend reduziert. Auch andere Alternativen bzgl. der Endstücke sind denkbar.

Wählt man den quadratisch auslaufenden Spline, was bei diesem Problem insgesamt sicherlich sinnvoller ist, ergeben sich etwas andere Werte.

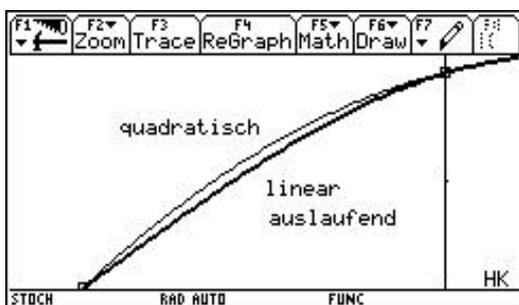
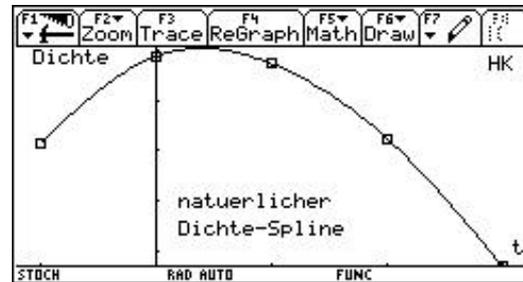
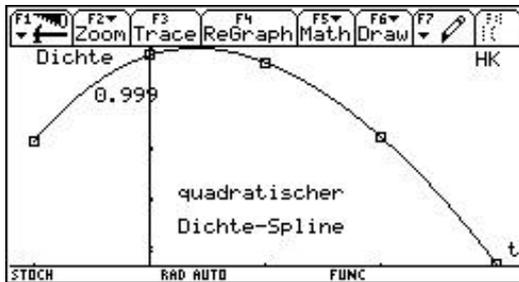


Abbildung 28-30

$$\text{spline}(x) = \begin{cases} -0.00000987(x+10)^2 + 0.0002707(x+10) + 0.99815 & -10 \leq x \leq 0 \\ 0.000000113x^3 - 0.00000987x^2 + 0.0000733x + 0.99987 & 0 \leq x \leq 10 \\ 0.0000000478(x-10)^3 - 0.00000647(x-10)^2 - 0.0000900(x-10) + 0.99973 & 10 \leq x \leq 20 \\ -0.00000507(x-20)^2 - 0.0002054(x-20) + 0.99823 & 20 \leq x \leq 30 \end{cases}$$

Das Maximum dieser Funktion liegt offensichtlich im Intervall [0;10]. Mit Hilfe der ersten Ableitung dieser Funktion erhält man für den quadratisch auslaufenden Spline:

$$\text{spline}'(x_e) = 0.000000339x_e^2 - 0.0000197x_e + 0.0000733 = 0.$$

Auf drei signifikante Stellen genau ergibt sich als Lösung $x=3.99$ mit dem Funktionswert $\text{spline}(3.99)=1.00001$. Das bedeutet, dass bzgl. unserer Interpolationsannahme die Dichte des Wassers bei 3,99°C ihren maximalen Wert von 1.00001 g/cm³ annimmt. Dies stimmt gut mit den experimentellen Werten überein, die die maximale Dichte mit 1.00000 g/cm³ bei 3.98°C angeben. (Im original metrischen System wurde das Gramm definiert als Masse von 1 cm³ Wasser bei maximaler Dichte.)

Diese Problemstellung lässt sich natürlich auch durch Regression mit z.B. einem Polynom 4. Grades bearbeiten. Der Aufwand ist geringer, wenn man die implementierten Regressionsoptionen des Rechners ausnutzt. Muss man jedoch die Regressionsbedingungen einzeln herleiten, ist der Aufwand größer als bei den Splines. Die Ergebnisse sind nahezu identisch, die Quart-Regression des TI-92 liefert geringfügig bessere Werte im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen:

$$X_{ax} = 3.9909440917008 \text{ mit } y_{Max} = 1.00000472066.$$

Klausuraufgabe

Gegeben sind die vier Punkte A(0|0), B(1|1), C(2|3), D(3|4).

- a) Bestimme ein Polynom möglichst geringen Grades, das diese 4 Punkte interpoliert.
 [Ergebnis: $\text{pol3}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x$, auf dem TC verfügbar].
- b) Erläutere in diesem Zusammenhang den Begriff Spline-Funktion! Bestimme die Koeffizienten der drei Spline-Funktionen
 $\text{sp1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $\text{sp2}(x) = a_4 + a_5x + a_6x^2 + a_7x^3$, $\text{sp3}(x) = a_8 + a_9x + a_{10}x^2 + a_{11}x^3$ mithilfe der Matrix spline, die auf dem TC abgespeichert ist.
 Weise nach, dass die Funktion $\text{spline00}(x)$ auf dem TC die gesuchte Spline-Funktion ist.

Bedingung	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	b
1.	1												0
2.	1	1	1	1									1
3.					1	1	1	1					1
4.					1	2	4	8					3
5.									1	2	4	8	3
6.									1	3	9	27	4
7.		1	2	3		-1	-2	-3					0
8.						1	4	12		-1	-4	-12	0
9.			2	6			-2	-6					0
10.							2	12			-2	-12	0
11.			2										0
12.										2	18		0

Nicht ausgefüllte Stellen der Matrix sind Null.

Trage jeweils die Bedingungen in Kurzschreibweise ein. Erläutere die Zeilen 2, 10 und 11.

- c) In der Graphik (Abb.31) sind das Polynom und die Spline-Funktion dargestellt. Die Abweichung der Polynomfunktion von der Spline-Funktion soll weiter untersucht werden. Stelle diese Abweichung in einem geeigneten WINDOW dar und skizziere diese Abweichung anschließend.
 Wie groß ist die maximale Abweichung?
 (Ein numerischer Wert mittels TC ist eine mögliche Teillösung, der algebraische Nachweis ist gefordert.)
 Was lässt sich über den Bereich zwischen den Punkten B und C bzgl. der Abweichung aussagen?

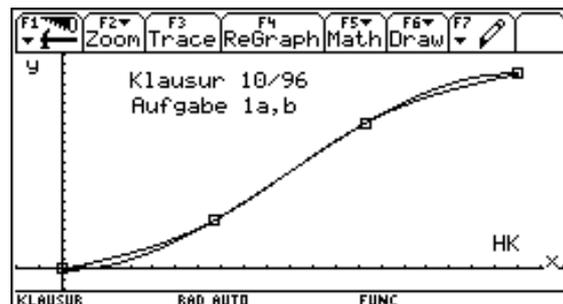


Abb. 31

- d) Sind die beiden Funktionen symmetrisch? Begründe!

Kommentar zur Klausur

Bei der Planung der Klausur sind einige grundsätzliche und einige sachspezifischen Aspekte zu beachten:

- Wenn es die erste Klausur mit dem TC ist, muss ein entsprechend großer Zeitanteil zur Aufarbeitung der Fehlermeldungen eingeplant werden. Die Hilfe der Lehrerin/des Lehrers in der Klausur ist wohl unabdingbar.
- Die Vorbereitung des Rechners muss mit den Schülerinnen und Schülern abgesprochen werden. Ein Total-Reset ist nur in Ausnahmefällen sinnvoll, weil die Schülerinnen und Schüler auf erarbeitete und im Unterricht festgelegte Funktionen auch zurückgreifen können/sollen. Wenn ein Reset vorgenommen wird, sollten die Schülerdaten vorher (z.B. auf einem PC mittels Graphlink) zwischengespeichert werden.
- Um unnötige und nicht erkennbare Fehler (z.B. bei Parameterwerten, Funktionswerten,...) zu vermeiden, sollten am Anfang alle einstelligen Variablen per Knopfdruck über F6 gelöscht werden. Wichtige Variablen werden grundsätzlich mit zwei oder mehr Buchstaben vereinbart, sie sind von diesem Löschvorgang nicht betroffen.
- Wichtige spezielle Funktionen (z.B. Krümmungsmaß, wird in dieser Klausur nicht benötigt) sollten unter Umständen vorher gelockt, also abgesichert werden.
- Fehleranfälliges Material sollte genau geprüft werden. Die Fehler sind durch die BLACK-BOX-Verarbeitung häufig nicht mehr lokalisierbar. Dieses führt zu großen Frustrationen und damit verbunden negativen Leistungsverschiebungen bei den Schülerinnen und Schülern. Dieses muss insbesondere am Anfang vermieden werden, später haben die Schülerinnen und Schüler es gelernt, sachgerecht mit Fehlermeldungen umzugehen.
 - ▶ Das Aufstellen von umfangreichen Matrizen ist sehr fehleranfällig. Hier sollte man unter Umständen die Daten als Datei auf die Schülerrechner überspielen (mit dem mitgelieferten Standard-Linkkabel ist das nicht sehr aufwendig).
 - ▶ Das Aufstellen von abschnittsweise definierten Funktionen kann bei umfangreicheren Bereichsunterteilungen fehleranfällig sein. Auch hier bietet sich eine Vorgabe der Daten an.
- Die Dokumentation muss mit den Schülerinnen und Schülern deutlich abgesprochen werden, der Bearbeitungsumfang einer Aufgabe muss erkennbar bleiben.
- Bei der Erstellung von Graphen können die Schülerinnen und Schüler häufig nur eine schlechte Kopie des Bildschirms abliefern. Daher ist eine qualitative Skizze mit Angabe des verwendeten Windows hier viel aussagekräftiger.
- Schülerinnen und Schüler können die Rechnerarbeit zu einzelnen Aufgabenteilen als Textfile auf dem Rechner abspeichern. Die Bewertung dieses Textfiles ist aber an einen von ihnen autorisierten Ausdruck gebunden (juristisch relevant). Die Kontrolle aller Schülerrechner zu Hause ist nicht gut praktikabel.
- Die Zeitvorgaben sollten nicht zu eng gewählt werden. Die Entlastung von algebraischen Umformungen bringt zwar kurzfristig gewisse Zeitvorteile, aber die angemessene Dokumentation und inhaltliche Reflexion benötigt sehr viel Zeit. Dies müssen Schülerinnen und Schüler erst lernen.
- Klausuraufgaben müssen wie bisher einen angemessenen Anteil von Reproduktions- und Reorganisationsleistungen abfordern. Der Anteil der zu erbringenden Transferleistungen darf nicht unmittelbar von dem verwendeten Werkzeug abhängig sein.

Die Aufgabenteile a und b sind Reproduktion (AFB I) und Reorganisation (AFB II), die teilweise durch entsprechende Versprachlichung der Problemstellung eingefordert werden. Die Bestimmung der Spline-Koeffizienten ist Anforderungsbereich I.

In Aufgabenteil c soll die aus der Zeichnung visuell kaum zu erkennende Abweichung untersucht werden. Hier werden keine weiteren Vorgaben bzgl. der Abweichungsfunktion gemacht, sodass die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden müssen, ob sie den Absolutbetrag der Differenz betrachten oder eine andere Funktion. Die Differenz zwischen B und C ist visuell erst nach entsprechender Wahl des Maßstabes zu erkennen. Der Graph der beiden Funktionen ist vorgegeben, weil

die Skizzierung hier keine sinnvolle Tätigkeit im Rahmen der Aufgabenstellung ist. Außerdem können so die Datenpunkte mit in die Darstellung einbezogen werden.

Aufgabenteil d) ist zum Teil (Symmetrie des Splines) Transferleistung, die Symmetrie der Interpolationsfunktion ist dagegen eher Reproduktion, da es sich um ein Polynom 3. Grades handelt.

Zusammenfassung

Spline-Funktionen bieten für den Mathematikunterricht eine Bereicherung, da sie sowohl inner- als auch außermathematische Gesichtspunkte in idealer Weise miteinander verknüpfen.

Die Behandlung von Splines im Unterricht ist in angemessener Weise nur dann möglich, wenn den Schülerinnen und Schülern ein CAS zur Verfügung steht. Bereits bei „einfachen“ Ausgangsdaten führt die Bestimmung des Splines auf umfangreiche LGS, deren Lösung auch noch auf unangenehmes Zahlenmaterial („große“ Brüche) führt. Die Behandlung derartig umfangreicher Gleichungssysteme ist aber praxisrelevant und sollte im Unterricht durchaus angesprochen werden.

CAS, die kubische Splines als Grundfunktion schon implementiert oder eine Spline-Tool-Box haben, eignen sich für den Unterricht in dieser Phase nur eingeschränkt.

Die Behandlung von Splines ist in gleicher Weise geeignet, in die Arbeit mit dem Taschencomputer einzuführen bzw. den TC als mächtiges Werkzeug sachgebunden und verständlich einzusetzen.

In der Unterrichtseinheit wird praxisnahe Mathematik unterrichtet. Ausgehend von einem praktischen Problem wird ein erstes mathematisches Modell erstellt (Polynomfunktion), überprüft, verworfen, neu modelliert (Spline-Funktion) und die Lösung auf Verträglichkeit mit den Randbedingungen (Biegelineal) überprüft. Die Unterrichtseinheit bietet außerdem den Schülerinnen und Schülern Möglichkeiten, in einem von ihnen selbst gewählten Rahmen die Problemstellung zu variieren. Hierbei können die Schülerinnen und Schüler einerseits experimentieren und andererseits systematisieren. Dadurch werden die Schülerinnen und Schüler zu kreativem Umgang mit Mathematik (hier allerdings in einem eingeschränkten Rahmen) angehalten.

Der innermathematische Kernpunkt ist die Differenzierbarkeit von Funktionen. Sie kann hier eingeführt, weitergeführt oder vertieft werden.

Die gewählten Unterrichtsformen sind sehr stark durch die geforderten Schülertätigkeiten bestimmt, insbesondere bietet Gruppenarbeit gute Voraussetzungen für die kreative Durchdringung des Stoffgebietes.

Literatur

- [1] **Sauer, T.:** Ein algorithmischer Zugang zu Polynomen und Splines. Mathematische Semesterberichte 1996.
- [2] **Kroll, W.:** Analysis. Dümmler-Verlag, Bonn 1988. 127-130.
- [3] **Thode, R.:** Numerische Algorithmen. Metzler-Verlag, Stuttgart 1992. 63-68.
- [4] **de Boor, C.:** A Practical: Guide to Splines. Springer-Verlag, Berlin 1978.
- [5] **Ahlberg, J.H., Nilson, E.N., Walsh, J.L.:** The Theory of Splines and their Applications. Academic Press, New York 1967.
- [6] **Rice, J.R.:** Numerical Methods, Software and Analysis. McGraw-Hill, New York 1983.
- [7] **Knechtel, H.:** Die Bestimmung von Spline-Funktionen mit dem TI-92™. NLI-Kurs „Analysis mit Computeralgebrasystemen“ 1996.

Anhang

1. Interpolationspolynom

Stützpunkte : $A(0|0)$, $B(1|1)$, $C(2|3)$, $D(3|4)$, $E(5|5)$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

Bedingung		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b
$f(0)=0$	\Leftrightarrow	1	0	0	0	0	0	0
$f(1)=1$	\Leftrightarrow	1	1	1	1	1	1	1
$f(2)=3$	\Leftrightarrow	1	2	4	8	16	3	3
$f(3)=4$	\Leftrightarrow	1	3	9	27	81	4	4
$f(5)=5$	\Leftrightarrow	1	5	25	125	625	5	5

Daraus ergibt sich ein LGS, das in Matrizenform angegeben werden kann.

Die zugehörige Matrix wird wie angegeben in den TC eingegeben und mit rref auf eine Form gebracht, bei der in der Hauptdiagonalen Einsen stehen, in der letzten Spalte die Lösungselemente und sonst nur Nullen.

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	-2/3
0	0	1	0	0	29/12
0	0	0	1	0	-5/6
0	0	0	0	1	1/12

Damit ergibt sich das gesuchte Polynom zu
 $f(x) = -2/3 \cdot x + 29/12 \cdot x^2 - 5/6 \cdot x^3 + 1/12 \cdot x^4$

2. Spline-Funktion

Da die Splinefunktion aus vier Teilfunktionen besteht, die alle Polynome des Grades 3 (oder kleiner) sind, ergibt sich ein Gleichungssystem der Ordnung 16. Es müssen also 16 Bedingungen gesucht werden, die für eine eindeutige Lösung notwendig sind.

Bed	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	b
$s_1(0)=0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_1(1)=1$	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$s_2(1)=1$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$s_2(2)=3$	0	0	0	0	1	2	4	8	0	0	0	0	0	0	0	0	3
$s_3(2)=3$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	8	0	0	0	0	3
$s_3(3)=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	9	27	0	0	0	0	4
$s_4(3)=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	9	27	4
$s_4(5)=5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	25	125	5
$s_1'(1)=s_2'(1)$	0	1	2	3	0	-1	-2	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_2'(2)=s_3'(2)$	0	0	0	0	0	1	4	12	0	-1	-4	-12	0	0	0	0	0
$s_3'(3)=s_4'(3)$	0	0	0	0	0	1	6	27	0	-1	-6	-27	0	0	0	0	0
$s_1''(1)=s_2''(1)$	0	0	2	6	0	0	-2	-6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_2''(2)=s_3''(2)$	0	0	0	0	0	0	2	12	0	0	-2	-12	0	0	0	0	0
$s_3''(3)=s_4''(3)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	18	0	0	-2	-18	0
$s_1''(0)=0$	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_4''(5)=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	30	0

Spline 1 : $a_0=0$; $a_1=115/172$; $a_2=0$; $a_3 = 57/112$
 Spline 2 : $a_4=85/86$; $a_5=-395/172$; $a_6= 255/86$; $a_7=-113/172$
 Spline 3 : $a_8= -571/86$; $a_9=1573/172$; $a_{10}= -237/86$; $a_{11}= 51/172$
 Spline 4 : $a_{12}= 335/344$; $a_{13}= 527/344$; $a_{14}= -75/344$; $a_{15} = 5/34$

Anhang

Teilnehmerinnen und Teilnehmer der zentralen Fortbildungskurse des NLI zum Thema Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht:

Name	Vorname	Dienstort
Höner zu Guntenhausen	Udo	Celle
Dönges	Christoph	Northeim
Enders	Jürgen	Bad Pyrmont
Meyer	Bernhard	Osnabrück
Westphal-Blonn	Michael	Braunschweig
Weyerer-Hoffmann	Dietmut	Delmenhorst
Schuh	Angelika	Hann. Münden
Thun	Günther	Oldenburg
Frosch	Dieter	Nordhorn
Klöpfer	Sigrun	Bad Nenndorf
Otto	Rüdiger	Rinteln
Wellnitz	Hermann	Rinteln
Beckmann	Bodo	Lüneburg
Ameskamp	Heinz	Cloppenburg
Topp	Ulrich	Sulingen
Baumert	Günther	Hannover
Schriefer-Gölz	Anke	Oldenburg
Meemken	Bernhard	Soltau
Gaedecke	Hartmut	Braunschweig
Frost	Norbert	Stadthagen
Otte-Spille	Sigrun	Laatzen
Witt	Charlotte	Laatzen
Schwendt	Ingrid	Göttingen
Lange	Werner	Göttingen
Lehmkuhl	Katrin	Buxtehude
Heyden	Christiane	Hannover
Fricke	Detlef	Wolfsburg
Willenberg	Ursula	Braunschweig
Gebauer	Joachim	Braunschweig
Feierabend	Uwe	Braunschweig
Dachtler	Margrit	Springe
Brauns	Uwe	Wilhelmshaven
Rolfs	Josef	Friesoythe
Möller	Rainer	Wolfenbüttel
Tolkmitt	Michael	Wilhelmshaven
Oldenburg	Ralf	Bad Nenndorf
Fricke	Otto-Peter	Großburgwedel
Euler	Jens	Sulingen
Weiß	Siegfried	Hildesheim
Schlobinski-Voigt	Ute	Hannover
Bissel	Jürgen	Hameln
Ueckert	Frank-Gerd	Hildesheim
Lampe	Hans-Ulrich	Stadthagen
Langreder	Helmut	Hannover
Gretsch	Joachim	Hildesheim
Bräuer	Christian	Hildesheim
Thiemann	Rüdiger	Hannover
Glassmeier	Dieter	Braunschweig
Purschke	Norbert	Buxtehude
Rojahn	Manfred	Meppen
Schulte	Monika	Stadthagen
Hartmann	Thomas	Bad Bentheim
Schütt	Christian	Göttingen
Suhr	Friedrich	Lüneburg
Behsler	Sandra	Bad Gandersheim

Name	Vorname	Dienstort
Kreibohm	Ralf	Gifhorn
Meuter	Rolf-Wolfgang	Hannover
Berger	Wiltrud	Göttingen
Richter	Lutz	Hannover
Gläserer	Hans-Jürgen	Osnabrück
Schröder	Roland	Hermannsburg
Denker	Jürgen	Oldenburg
Grote	Manfred	Dannenberg
Geist	Joachim	Himmelsthür
Herlitze	Klaus	Hannover
Lange	Gerhard	Weyhe-Leeste
Weneke	Catrin	Buxtehude
Neumann	Reinhard	Himmelsthür
Simon	Hans-Arne	Stadthagen
Seifert	Melina	Osnabrück
Mai	Stephanie	Salzgitter

Kursleitung Referentinnen, Referenten Projektleiterinnen, Projektleiter

Knechtel (Leiter)	Heiko	Stadthagen
Kühl, Dr. (Leitung)	Rainer	Wolfsburg
Kramer (Leitung)	Hans	Großburgwedel
Ebenhöh	Mechthild	Friesoythe
Weiskirch	Wilhelm	Stadthagen
Eberle	Markus	Wolfsburg
Vehling	Reimund	Stadthagen
Krüger	Ulf-Hermann	Weyhe
Niehoff	Ulrich	Hameln
Meyer	Jörg	Hameln