2 Daten und Prognosen

Hinweise zu den Unterrichtseinheiten

Während die ersten zwei Unterrichtseinheiten (2.2 und 2.3) sich ausschließlich mit „Daten“ beschäftigen und die dritte Unterrichtseinheit (2.4) sich ausschließlich mit der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs beschäftigt, werden in den beiden zuletzt aufgeführten Unterrichtseinheiten (2.5 und 2.6) beide Aspekte des Bausteins „Daten und Prognosen“ beleuchtet.

2.1 Rahmenrichtlinien - Baustein „Daten und Prognosen“

In allen Medien werden Schülerinnen und Schüler mit Datenmaterial und Aussagen über zukünftige Entwicklungen konfrontiert. Für einen kompetenten Umgang mit Informationen sollen sie das Sammeln, Aufbereiten, Darstellen und Auswerten von Daten sowie darauf basierend das Erstellen und Bewerten von Prognosen erarbeiten.

Um Daten zielgerichtet analysieren zu können, müssen als Handwerkzeug die Darstellung und die einfache Auswertung von Daten beherrscht werden. Vorhandene Vorkenntnisse aus dem Bereich der beschreibenden Statistik sind in diesem Zusammenhang aufzubereiten und zu vertiefen. Zur Simulation von Vorgängen und zur Darstellung und Auswertung von Daten sollen technische Hilfsmittel eingesetzt werden. Mögliche Manipulationen bei der Erhebung und bei der Darstellung von Daten sind im Unterricht zu thematisieren.

Der Begriff der Prognose ist als Grundlage für einen allgemeinen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu behandeln, der auch die Laplace-Wahrscheinlichkeit umfasst. Vor der Durchführung eines Experimentes ist es sinnvoll, eine Erwartungshaltung bezüglich des Ausganges in Form einer Prognose zu formulieren, die nach der Durchführung kritisch überprüft und ggf. revidiert wird. Erst im Anschluss an die Gegenüberstellung von Voraussagen und Ergebnissen sollte man zu einer altersgemäßen Begriffsklärung übergehen. Hierzu werden bei der Durchführung von Zufallsexperimenten überwiegend Nicht-Laplace-Objekte gewählt.

Inhalte und Verfahren	Hinweise
Zielgerichtet Daten sammeln, geeignet darstellen und auswerten Daten gewinnen durch Experimente, Beobachtungen oder Befragungen Nutzung bereits verfügbarer Daten Zufallszahlen, Verwendung des Zufallszahlengenerators Daten darstellen und auswerten Häufigkeiten bestimmen Lagemaße (Mittelwert, Zentralwert (Median)) Datenmengen darstellen (Tabelle, Streifen-, Kreisdiagramm, Histogramm) Durchführen und Auswerten von Zufallsexperimenten Prognose - relative Häufigkeit - Wahrscheinlichkeit als Voraussage über die relative Häufigkeit Verbesserung der Prognose durch Erkenntnisgewinn empirisches Gesetz der großen Zahlen (propädeutisch) Eigenschaften der relativen Häufigkeit/Wahrscheinlichkeit Berechnen von Wahrscheinlichkeiten Laplace-Wahrscheinlichkeit als Sonderfall klassische Zufallsexperimente (Münze, Urne, Würfel, Glücksrad) Simulationen	VERNETZUNG Symmetrie (3.2.4), Funktionsbegriff (3.2.7) Zahl, Mittelwert, Wahrscheinlichkeitsbegriff als fundamentale Ideen Vertiefung geometrischer und algebraischer Grunderfahrungen DIDAKTIK/METHODIK fachübergreifendes und projektbezogenes Arbeiten handlungsorientiertes und experimentelles Arbeiten, auch unter Einsatz technischer Hilfsmittel ERWEITERUNG Boxplotdarstellung einfache Streuungsmaße

(aus: Niedersächsisches Kultusministerium: Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, Schuljahrgänge 7-10, Mathematik. Anhörfassung 2002, Seite 17)

2.2 Fragebogen - Daten erheben und auswerten

Anhand der Auswertung eines Schülerfragebogens werden grafische Darstellungsformen wie *Stab-, Säulen-, Streifen- und Kreisdiagramm* mit Hilfe von *Expertenmaterialien* erarbeitet. In diesem Zusammenhang erfolgt eine Einführung in den *Prozentbegriff*. Die Lagemaße *Mittelwert* und *Median* werden zum Vergleich von Stichproben herangezogen. Die Darstellungsform *Boxplot* zur Visualisierung der Lagemaße kann handlungsorientiert eingeführt werden. Die Sequenz ist so angelegt, dass sie als erste Unterrichtseinheit in Jahrgang 7 unterrichtet werden kann. Sie ist als Einbettung in die *Klassenfindungsphase* zu Beginn des Schuljahres konzipiert und eröffnet darüber hinaus *Kooperationsmöglichkeiten* mit den Fächern Deutsch und Englisch etwa im Rahmen einer Klassenzeitung. Ferner bietet sie Möglichkeiten, Stoffe aus den vorausgegangenen Jahrgängen (Bruchrechnung, Dezimaldarstellung, Winkel) zielgerichtet aufzugreifen.	
Besondere Materialien/Technologie:	**Dauer der Unterrichtseinheit:**
TR hilfreich; Tabellenkalkulation, GTR und Internet lassen sich sinnvoll integrieren	10 Unterrichtsstunden (bei Einführung von Neuen Technologien entsprechend länger)

Gliederung

2.2.1 Unterrichtssequenz

Überblick über die Sequenz	
1. Std.	Projektvorstellung, Planung des Fragebogens
2. Std.	Fragebogen, Datenaufbereitung in Gruppen
3.+4. Std.	Gruppenarbeit zur Datendarstellung mit Expertenmaterial
5.+6. Std.	Präsentation und Sicherung: Darstellungsformen und Mittelwert
7.+8. Std.	Relative Häufigkeiten und Prozentbegriff
9.+10. Std.	Lagemaße: Mittelwert und Median; Darstellung im Boxplot

1. Stunde

Inhalt

Als erste Unterrichtseinheit in Jahrgang 7 könnte im unmittelbaren Zusammenhang mit dem Kennenlernen der Schülerinnen und Schüler in der neuen Klasse ein Projekt initiiert werden unter dem Motto: „Wir lernen uns kennen“. Die Ergebnisse könnten in die Erstellung einer gemeinschaftsstiftenden Klassenzeitung, -CD oder -Homepage einfließen.
Dazu wird gemeinsam mit der Klasse ein Fragebogen geplant. Im Hinblick auf eine nachfolgende mathematische Auswertung sollten dabei *qualitative und quantitative*, *diskrete und stetige Daten* Berücksichtigung finden. Ein Vorschlag für einen solchen Fragebogen findet sich unter Material M1a.

Erweiterung/Vernetzung

Bei einem solchen Klassenprojekt bietet sich eine Zusammenarbeit mit den Fächern Deutsch oder Englisch an: Die Textformen Bericht und Reportage sowie das Thema Freizeitverhalten sind dort im Curriculum vorgesehen.

2. Stunde

Inhalt

Der Beginn dieser Stunde wird durch das Ausfüllen des Fragebogens gestaltet. Im Anschluss ist es sinnvoll, die Schülerinnen und Schüler Hypothesen über mögliche Ergebnisse des Fragebogens bilden zu lassen. Zur Fixierung für die 6. Stunde sollten die Hypothesen z. B. in einem Fragebogen auf Folie festgehalten werden. Es ist zu erwarten, dass Schülerinnen und Schüler bereits an dieser Stelle „Durchschnittswerte" nennen, die helfen können, diesen intuitiven Mittelwertbegriff später aufzugreifen.

Zur Auswertung des Fragebogens sollten Gruppen gebildet werden, die jeweils eine Frage des Fragebogens bearbeiten. Zur Sicherheit könnten je zwei Gruppen einer Frage der Erhebung zugeordnet werden. Methodisch zweckmäßig ist es dabei, die Fragebögen doppelt ausfüllen zu lassen und dann in je eine Fragekategorie zu zerschneiden. Das Datenmaterial wird mit dem Erstellen von Urlisten (z. B. Strichlisten) ausgewertet.

Erweiterung/Vernetzung

Wenn der Wunsch besteht, die Daten noch unter weiteren Aspekten auszuwerten (Korrelation etc.), muss jeweils ein Original aufgehoben werden. Auch in diesem Sinne ist eine farbliche Geschlechterunterscheidung beim Ausfüllen sinnvoll.

3.+ 4. Stunde

Inhalt

Nach Erfassung und Aufbereitung der Daten in Urlisten ist es notwendig, die Darstellung der Daten im Unterrichtsgespräch zu problematisieren. Hier könnte z. B. an den WUK-Unterricht der Orientierungsstufe oder an Beispielen aus Zeitungen angeknüpft werden. Als Alternative zu erklärenden Darbietungen im Lehrervortrag sollen hier sogenannte *Expertenmaterialien* eingesetzt werden (Materialien M2-5). Diese sind so strukturiert, dass die Schülerinnen und Schüler sich das benötigte Wissen über die Darstellungstypen eigenständig aneignen können. Hierbei wird grundsätzlich noch mit absoluten Häufigkeiten hantiert. Über eine Aufgliederung der Fragen zu Darstellungsformen (vgl. Material M1b) ist die Lehrkraft in der Lage, den Gruppen das Expertenmaterial zweckmäßig zuzuteilen. Zu berücksichtigen ist, dass das Kreisdiagramm einer leistungsstärkeren Gruppe zugeordnet wird.

Das Wissen aus dem Expertenmaterial wenden die Schülerinnen und Schüler übend beim Erstellen der entsprechenden Diagramme in der Gruppenarbeit an. Ziel ist es, zunächst eine Ergebnisfolie oder

ein Ergebnisplakat zu erstellen, mit dessen Hilfe die Ergebnisse schließlich der Klasse präsentiert werden.
In einer längerfristigen Hausaufgabe werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, aus Zeitungen, Schulbüchern etc. Diagramme zu sammeln, um für die 8. Stunde genügend Material zur Verfügung zu haben.

Erweiterung/Vernetzung
Das Expertenmaterial bietet sich auch für *Lernen an Stationen* an.

5.+ 6. Stunde

Inhalt
Bei den Ergebnispräsentationen aus der Gruppenarbeit haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, ihr Wissen an ihre Mitschülerinnen und Mitschüler weiterzugeben. In einer Zusammenfassung ist auch zu besprechen, welche Darstellungsform für welchen Datentyp geeignet ist. Zur Sicherung und Vertiefung des Verständnisses müssen sich Übungen zur Zuordnung von Datentyp und Diagrammform anschließen. Dazu bieten sich die Darstellung bereits bearbeiteter Daten in einem anderen Diagrammtyp und Aufgaben wie in Material M6 an.
Da der Fragebogen zunächst ausgewertet ist, kann nun ein Vergleich mit den eingangs fixierten Ausgangshypothesen angestellt werden. Einige der erhobenen Daten werden sicherlich über dem „Durchschnittswert“ der Hypothese liegen, andere darunter, so dass in diesem Rahmen der Begriff des *Mittelwerts* geklärt werden kann.

Erweiterung/Vernetzung
Die Zeichnung von Kreisdiagrammen bietet eine gute Möglichkeit zur Wiederholung von Winkelgrößen und Bruchteilen.

7.+ 8. Stunde

Inhalt
Da bislang mit absoluten Häufigkeiten gearbeitet wurde, muss jetzt die *relative Häufigkeit* thematisiert werden. Zur Motivation bietet sich der Vergleich von Daten der eigenen Klasse mit Daten einer anderen Klasse an. Es ist sinnvoll, möglichst fiktive Daten zu verwenden, die im geeigneten Kontrast zu den Umfrageergebnissen stehen. Dabei ist u. a. eine andere Schülerzahl wichtig. In Anlehnung an Frage 3 des Musterfragebogens (Material M1a) könnte z. B. gefragt werden, welche Klasse sich mehr

für Fußball, Reiten, Volleyball u. a. begeistert. Damit ist die Grundlage für den Begriff der relativen Häufigkeit gelegt. An dieser Stelle schließt sich eine Wiederholung zum Vergleich von Bruchzahlen und zur Darstellung von Dezimalbrüchen an. Ebenso lässt sich hier sinnvoll der *Prozentbegriff* einführen. Die erworbenen Kenntnisse müssen durch hinreichend viele Übungen (siehe Schulbuch) gefestigt werden.

Die Schülerinnen und Schüler sind nun in der Lage, ihre Klassendaten „professionell“ auch mit Prozentangaben darzustellen, so dass dann eine Endredaktion für das Projektthema (z. B. Klassenzeitung) erfolgen kann.

Nun ist auch der Zeitpunkt gekommen, die langfristige Hausaufgabe zu besprechen. Dazu sollten die gesammelten Statistiken z. B. auf Plakaten zusammengetragen werden. Für den Fall, dass von den Schülerinnen und Schülern keine Fälle von „Täuschungs-Statistiken“ mitgebracht werden, sollte die Lehrkraft für geeignete Beispiele sorgen (siehe Lit. [2]).

Erweiterung/Vernetzung

Als methodische Ergänzung ließe sich hier gut ein GTR oder eine Tabellenkalkulation zum Einsatz bringen: Beim Aufnehmen von Datenlisten, beim Darstellen der Daten in Histogrammen etc. sowie beim Berechnen von Mittelwerten können grundlegende Fertigkeiten erworben werden (vgl. Material M8-M10).

Sind Neue Technologien (NT) zum Einsatz gekommen, können die erstellten Diagramme für die Endredaktion des Projekts genommen werden. Weiterhin ist es möglich, die Vergleiche im Falle einer Kooperation mit den Fächern Deutsch und Englisch dort inhaltlich aufzuarbeiten.

Mit Hilfe von [Lit. 2] und [Lit. 4] bietet es sich an, ausführlicher „Täuschungs-Statistiken“ zu thematisieren.

9 + 10. Stunde

Inhalt

Zur Problematisierung des Mittelwertes und des Medians wird noch einmal eine Frage aus dem Fragebogen aufgegriffen. Man lässt dazu die Dauer des TV-Konsums der eigenen Klasse mit der einer (fiktiven) anderen vergleichen. Dabei sind die fiktiven Daten so zu wählen, dass sich ein annähernd gleicher Mittelwert, aber eine völlig andere Streuung der Daten ergibt (vgl. Material M7). Die Einzeldaten könnten auf Zettel geschrieben und diese an der Tafel oder Wand sortiert werden, nach

a) Daten größer/kleiner als der Mittelwert

b) der Größe (Ranking).

Um nicht mit zu vielen Zetteln hantieren zu müssen, kann eine Trennung der Betrachtung in Mädchen und Jungen vorgenommen werden. Eine denkbare Visualisierung des Begriffs *Median* als Zentralwert wäre, jeweils links und rechts von der sortierten Datenreihe einen Zettel wegzunehmen. Hat man vorausschauend gerade und ungerade Anzahlen von Datenzetteln beachtet, ist auch die Grundlage zur Ermittlung des Medians gelegt. Zur Übung können ähnliche Daten herangezogen werden, wie z. B.: Taschengeld (siehe Material M6, Aufgabe 4), Schuhgrößen, Körpergrößen. Auch die gängige Praxis der Durchschnittsbildung beim Ausfall von Klassenarbeiten kann kritisch hinterfragt werden.

Erweiterung/Vernetzung

Als Erweiterung bietet sich gerade beim Einsatz von NT die Erstellung eines Boxplots an (vgl. Material M9). Daran könnte sich die Betrachtung einfacher Streumaße wie *Spannweite* und *Quartile* anschließen.

Mögliche Weiterführungen

Nach Abschluss dieser Unterrichtssequenz könnte der Unterricht sinnvoll fortgesetzt werden mit:

1) Durchführung und Auswertung von Zufallsexperimenten
2) Weiterführung der Prozentrechnung

2.2.2 Materialien

Material M1a: Fragebogen

Fragebogen

wichtig:

Alle Mädchen füllen bitte den Fragebogen mit einem **roten** Stift aus, alle Jungen mit einem **blauen**.

1.) Wie viel Zeit verbringst du vor dem Fernseher?

	Stunden

2.) Welche Sendungen interessieren dich besonders?
Verteile insgesamt 100 Punkte so auf die Bereiche, wie es deinen Gewohnheiten entspricht!

Serien und Spielfilme		Punkte
Musiksendungen und Shows		Punkte
Politiksendungen und Nachrichten		Punkte
Kinder- und Jugendsendungen (z. B. Zeichentrick)		Punkte
Dokumentationen (Natur, Wissenschaft, Geschichte)		Punkte
Sportsendungen		Punkte

3.) Welche Sportarten betreibst du? Trage sie in die Felder ein!

1.	2.	3.
4.	5.	6.

4.) Wie viele Stunden Sport betreibst du insgesamt pro Woche?

	Stunden

5.) Wie viel Taschengeld erhältst du im Monat?

	€

6.) Wie lang ist dein Schulweg?

	km

7.) Welches Verkehrsmittel benutzt Du? ____

____

Material M1b

Zuordnung der Fragen zu möglichen Auswertungskategorien

Darstellungsform	**Fragethematik**
Säulendiagramm	Zeit vor dem Fernseher, TV-Sendungen
Kreisdiagramm	Sportarten, Verkehrsmittel
Histogramm	Taschengeldhöhe, Schulweglänge
Streifendiagramm	Verkehrsmittel, TV-Sendungen
Median, Boxplot	Taschengeldhöhe, Schulweglänge, Fernsehdauer

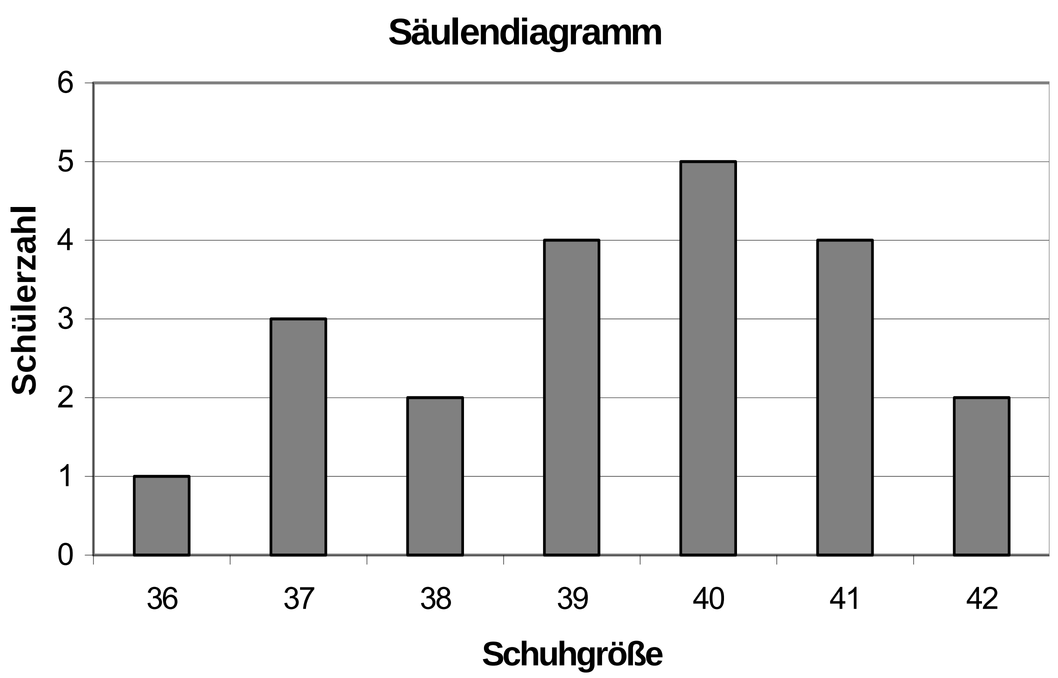
Expertenmaterial M2

Säulendiagramm

Die Klasse 9c besteht aus 21 Schülerinnen und Schülern. Ihre Schuhgrößen sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

38	**39**	**39**	**38**	**37**	**41**	**41**	**41**	**42**	**40**	**39**	**37**	**40**	**36**	**41**	**39**	**40**	**42**	**37**	**40**	**40**

Diese Daten kann man folgender Weise in einem Säulendiagramm darstellen:



Aufgaben:

a) Beschreibe, wie die Daten der Tabelle in dem Diagramm dargestellt werden.
b) Erstelle ein entsprechendes Säulendiagramm für deine Fragebogenfrage.
c) Erstelle ein neues Säulendiagramm, das Mädchen und Jungen unterscheidet. Zeichne dabei die Säulen für die Mädchen rot und die für die Jungen blau.

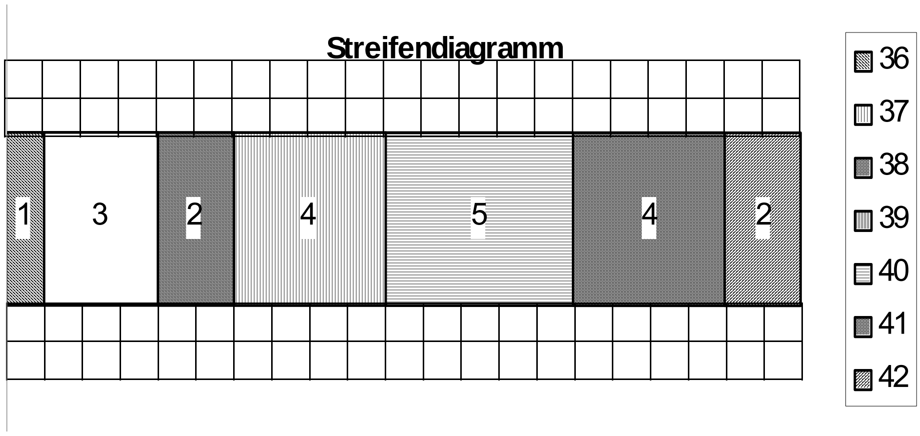
Expertenmaterial M3

Streifendiagramm

Die Klasse 9c besteht aus 21 Schülerinnen und Schülern. Ihre Schuhgrößen sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

38	**39**	**39**	**38**	**37**	**41**	**41**	**41**	**42**	**40**	**39**	**37**	**40**	**36**	**41**	**39**	**40**	**42**	**37**	**40**	**40**

Diese Daten kann man folgender Weise in einem Streifendiagramm darstellen:



Aufgaben:

a) Beschreibe, wie die Daten der Tabelle in dem Diagramm dargestellt werden.
b) Erstelle ein entsprechendes Säulendiagramm für deine Fragebogenfrage.

Expertenmaterial M4

Kreisdiagramm

Die Klasse 9c besteht aus 21 Schülerinnen und Schülern. Ihre Schuhgrößen sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

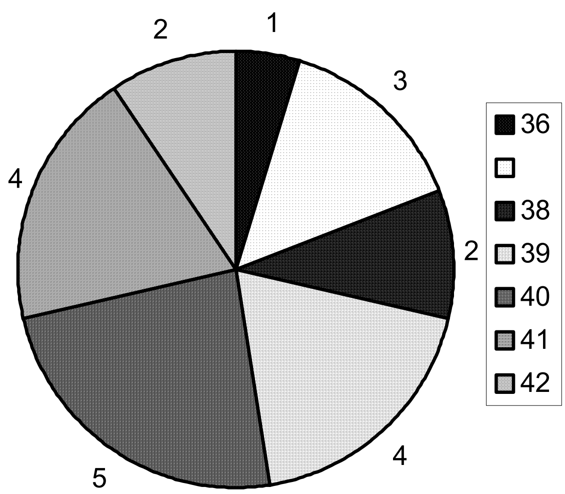
Schuhgröße	36	37	38	39	40	41	42
Häufigkeit des Vorkommens	1	3	2	4	5	4	2

Die Häufigkeiten der verschiedenen Schuhgrößen sollen in einem Kreis als „Tortenstücke" eingetragen werden. Einem Kreis entsprechen 360°. Der Häufigkeit einer Schuhgröße entspricht dann der entsprechende Bruchteil.

Beispiel: Die Schuhgröße 41 kommt 4-mal vor, also berechnen wir den $\frac{4}{21}$-ten Teil von 360°:

Rechnung: $360° \cdot \frac{4}{21} \approx 69°$

Kreisdiagramm



Aufgabe:

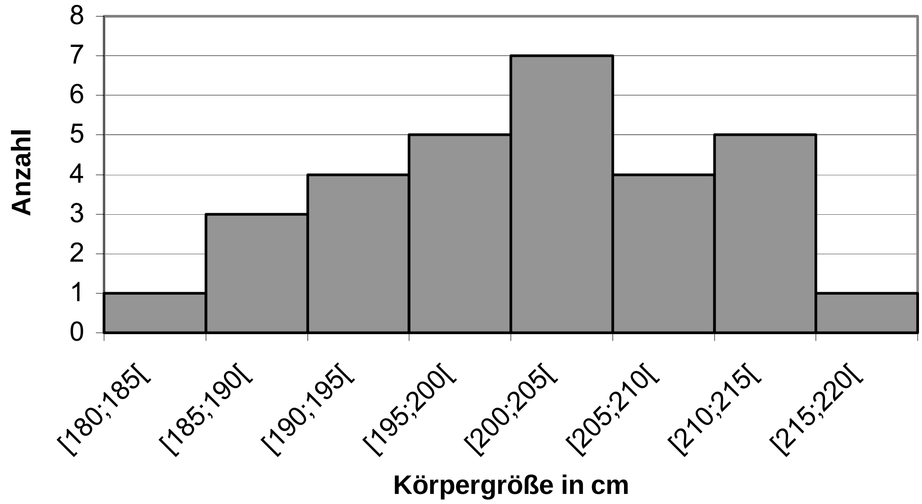
Erstelle ein entsprechendes Kreisdiagramm für deine Fragebogenfrage.

Expertenmaterial M5

Histogramm

Die Basketball-Mannschaft der amerikanischen NBA besteht aus 30 Spielern. Sie haben ihre Körpergrößen in cm gemessen und in der folgenden Tabelle aufgelistet.

206	213	201	193	185	188	196	208	191	206
193	193	203	208	198	183	203	211	203	196
198	198	201	213	185	185	211	201	211	201



Für die Darstellung im Diagramm wurden die Körpergrößen in gleich große Klassen von je 5 cm Breite zusammengefasst. Zum Beispiel wurden alle Spieler zusammengezählt, die mindestens 185 cm, aber kleiner als 190 cm groß sind. Man schreibt dafür als Kurzschreibweise: [185;190[. Alle Werte, die in diesem Bereich liegen, werden dann durch die Säule dargestellt.

<u>Aufgaben:</u>

a) Welche Körpergrößen gehören zu der Klasse [210;215[? Wie viele Spieler sind in dieser Klasse?
b) Wie verändert sich das Histogramm, wenn jede Klasse nicht nur 5 cm, sondern 10 cm umfasst?
c) Erstelle ein entsprechendes Histogramm für deine Fragebogenfrage.

Material M6: Aufgaben

Aufgabe 1

672 Schülerinnen und Schüler wurden zu der Frage „Sollen Hausaufgaben in der Schule abgeschafft werden?“ interviewt. Es ergab sich folgende Auswertung:

	„Unbedingt abschaffen!“	„Finde ich gut!“	„Ist mir egal!“	„Finde ich nicht so gut!“	„Auf keinen Fall abschaffen!“
Stimmen	94	244	119	161	54
Anteil als gekürzter Bruch					
Anteil als Dezimalzahl					

Aufgaben:

a) Fülle die Lücken der Tabelle.
b) Stelle die Anteile in einem Kreisdiagramm dar.

Aufgabe 2

Für eine Klassenfahrt sind insgesamt 150 € zu bezahlen. Davon entfallen 36 € auf die Unterkunft, 60 € auf die Verpflegung, 42 € auf die Busfahrt. Der Rest ist für Eintrittsgelder und andere Ausgaben geplant.
Stelle die Anteile in einem Streifendiagramm dar (mit Prozentangaben).

Aufgabe 3

Wegen eines großen Lochs in der Mannschaftskasse haben die Trainer zweier Fußballmannschaften die Taschengeldhöhe ihrer Spieler erfragt (Angaben in €).

Fortuna	10	20	25	10	15	20	20	30	15	30	15	25
Kickers	30	10	40	10	10	15	5	10	70	25	5	5

a) Stelle die Daten in Form eines Säulendiagramms dar.
b) Berechne den Mittelwert des Taschengeldes für beide Mannschaften und vergleiche sie mit dem Diagramm. Was fällt dir auf?

Aufgabe 4

Unten findest du eine Tabelle der monatlichen Niederschläge in 2 Orten.

a) Stelle die monatlichen Niederschlagsmengen für beide Orte in einem Säulendiagramm dar.
b) Berechne jeweils den Mittelwert (Durchschnitt) und trage ihn in deinem Diagramm ein.
c) Wo könnten diese Orte liegen? Beschreibe das Klima in dieser Region.

Monat	Jan.	Feb.	März	Apr.	i	Juni	i	Aug.		Okt.		Dez.
Ort A: Niederschläge (mm)	80	61	50	48	18	8	2	18	39	74	82	91
Ort B: Niederschläge (mm)	50	39	37	37	41	41	56	58	48	57	61	46

Material M7

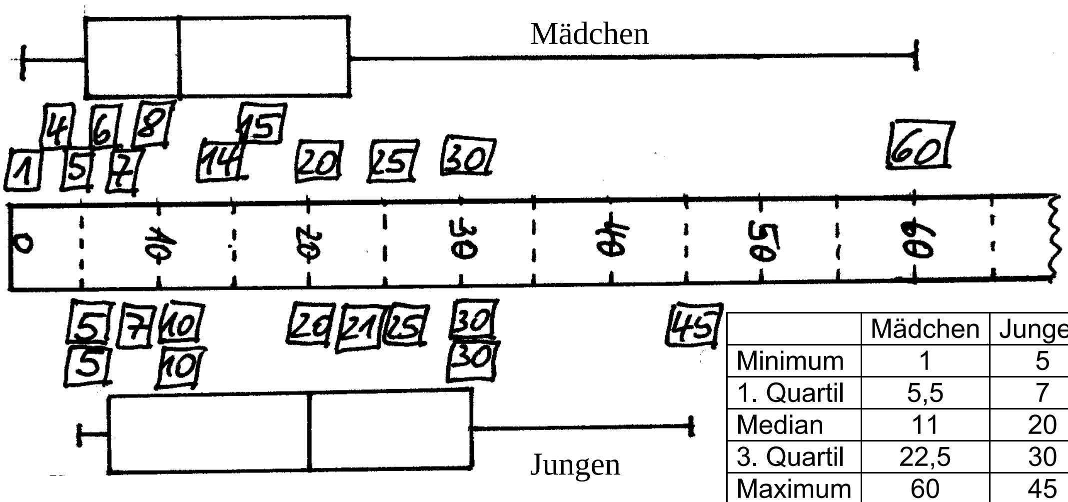
Datenerfassung in einem Boxplot

TV-Konsum einer 7. Klasse pro Woche in Stunden (einschließlich Video und Videospiele):

Mädchen	15	8	25	20	60	4	14	6	5	30	1	7
Jungen	5	30	10	10	7	20	21	30	5	45	25	

<u>Schritte zur „händischen“ Erstellung eines Boxplot:</u>

1) Daten getrennt nach Mädchen und Jungen auf Zetteln gleicher Breite notieren.
2) Mit Hilfe von Toilettenpapier wird ein Zahlenstrahl auf dem Fußboden erzeugt. Dabei gibt die Perforation der Blätter die Skalierung vor (s. Abb.).
3) Zettelhaufen jeweils auf dem Fußboden längs des Zahlenstrahls der Größe nach anordnen, so dass eine Zettelkette entsteht (gleiche Zahlen werden übereinander gelegt).
4) **Finden des Medians**: Handelt es sich um eine ungerade Anzahl von Zetteln wie bei den Jungen, so gibt der Zettel, der genau in der Mitte der Zettelkette liegt, den Median (Zentralwert) der Daten an. Handelt es sich hingegen um eine gerade Anzahl von Zetteln, so ist der Median der Mittelwert der beiden Zahlen in der Mitte der Kette.
   <u>Beispiel</u>: Der Median der Mädchen-Daten ist dann 11;
   der Median der Jungen-Daten ist dann 20.
5) **Finden der Quartile**: Das erste Quartil ist der Median derjenigen Werte, die unterhalb (links) des bereits bestimmten Medians liegen, das dritte Quartil entsprechend dem Median derjenigen Werte, die oberhalb (rechts) des bereits bestimmten Medians liegen. Die Quartile begrenzen die „Box“ von links und rechts. In ihr liegen die mittleren 50% aller Daten.
6) **Finden von Minimum und Maximum**: Der kleinste Wert auf der Zettelkette, also das linke Ende der Kette, heißt Minimum, der größte Wert Maximum. Minimum und Maximum begrenzen den Boxplot, sie bilden die Enden der „Antennen“ (s. Abb.). Die Differenz des Maximums und Minimums nennt man Spannbreite.



	Mädchen	Jungen
Minimum	1	5
1. Quartil	5,5	7
Median	11	20
3. Quartil	22,5	30
Maximum	60	45
Mittelwert	16,25	18,9

Material M8

Eingabe von Daten in Listen und Erstellung eines Histogramms (mit dem TI-83)

Die Basketball-Mannschaft der amerikanischen NBA besteht aus 30 Spielern. Sie haben ihre Körpergrößen in cm gemessen und in der folgenden Tabelle aufgelistet:

206; 213; 201; 193; 185; 188; 196; 208; 191; 206
193; 193; 203; 208; 198; 183; 203; 211; 203; 196
198; 198; 201; 213; 185; 185; 211; 201; 211; 201

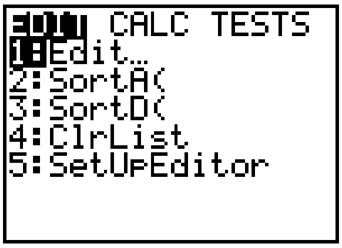


Bild 1

1. Eingabe der Tabelle in Listen

[STAT], [EDIT], 1:Edit, L1 auswählen (Bild 1).
Mit dem Cursor auf die erste Zeile von L1 fahren und den ersten Wert der Tabelle eingeben. Nach dem Drücken von [ENTER] springt der Cursor automatisch in die nächste Zeile, dann nächsten Wert eingeben usw. (Bild 2).

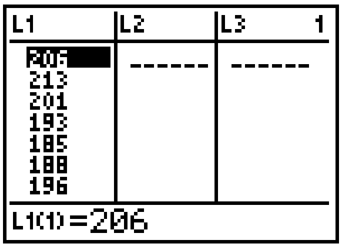


Bild 2

2. PLOT-Einstellungen

[2nd], [Y=], [1],[ENTER] führt zu PLOT1 (Bild 3).
Cursor auf , [ENTER] (schaltet später den PLOT1 wieder aus).
Mit dem Cursor die Eingaben anlaufen und mit [ENTER] bestätigen:
Type: (Histogramm) ®
Xlist: Liste in der die Tabellenwerte stehen (Eingabe: [2nd], [1])
Freq: Häufigkeit der Werte (hier einfach)

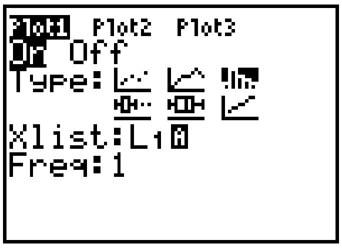


Bild 3

3. Diagrammeinstellungen (Koordinatensystem) festlegen

a) Automatisch: [ZOOM], [9] führt zu ZOOMStat und zum Plotten der Daten.
b) Manuell: (Bild 4) Werte über [WINDOW] einstellen oder nachbessern.

Entsprechend der Klasseneinteilung wählt man:
Xmin: unterste Intervallgrenze
Xmax: oberste Intervallgrenze
Xscl: Klassenbreite
[GRAPH] zeichnet entsprechend den Window-Einstellungen den Daten-Plot. Der Plot kann wie ein Funktionsgraph mit [TRACE], [Cursor rechts, links] ausgewertet werden (Bild 5).

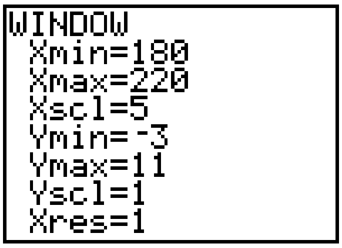


Bild 4

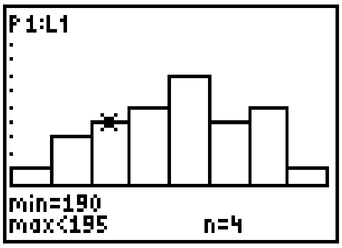


Bild 5

4. Weitere PLOTs zeichnen

Über PLOT2 und PLOT3 können nacheinander oder gleichzeitig weitere Plots dargestellt werden.

<u>Wichtig:</u> Wird der PLOT1 nicht mehr benötigt, sollte er wieder ausgeschaltet werden, da sonst Fehlermeldungen erscheinen.

Material M9

Erstellung eines Boxplots (mit dem TI-83)

Die Daten des Histogramms werden übernommen, Punkt 1 ist also wie oben, danach folgt Punkt 5.

5. PLOT-Einstellungen

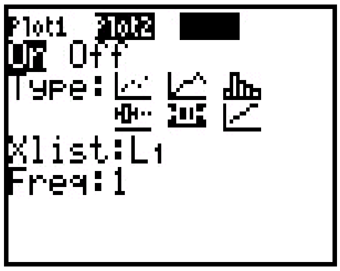


Bild 6

[2nd], [Y=], [1], [ENTER] führt zu PLOT2 (Bild 6).
Cursor auf , [ENTER] (schaltet später den PLOT2 wieder aus).
Mit dem Cursor die Eingaben anlaufen und mit [ENTER] bestätigen:
Type: (Boxplot) √
Xlist: Liste in der die Tabellenwerte stehen (Eingabe: [2nd], [1])
Freq: Häufigkeit der Werte (hier einfach)
Hinweis: Type: ∏(ModBoxplot) stellt die Ausreißer (Punkte, die 1.5 *innerer Quartilbereich außerhalb der Quartile liegen) einzeln außerhalb der Ausreißergrenzen mit dem ausgewählten **Mark**, · oder + oder □ dar.
Mit **Trace** kann man die markanten Werte ablesen.

6. Diagrammeinstellungen (Koordinatensystem) festlegen

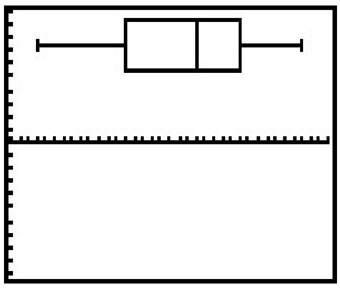


Bild 7

Automatisch: [ZOOM], [9] führt zu ZOOMStat und zum Plotten des Boxplots.

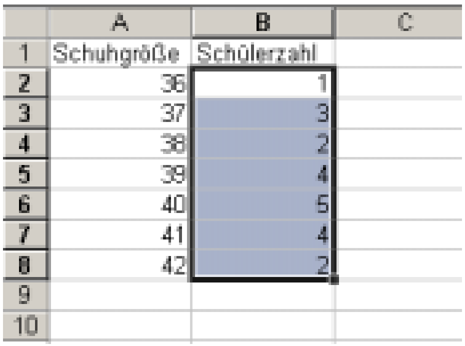
<u>Wichtig:</u> Wird der PLOT1 nicht mehr benötigt, sollte er wieder ausgeschaltet werden, da sonst Fehlermeldungen erscheinen.

Material M10

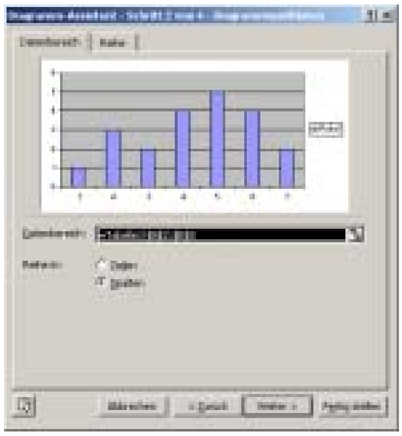
Hinweise zur Diagrammerstellung mit Excel

1. Erstellen eines Säulendiagramms (Expertenmaterial M2)

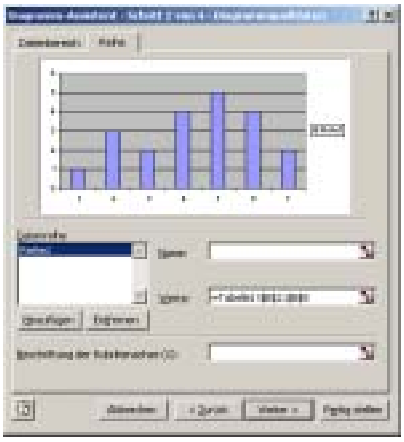
- Spalte mit absoluten Häufigkeiten markieren (s. Abb.), Schaltfläche  wählen
- Diagrammtyp „Säule“ mit „Weiter“ bestätigen. Es erscheint das rechte Fenster
- Registerkarte „Reihe“ wählen

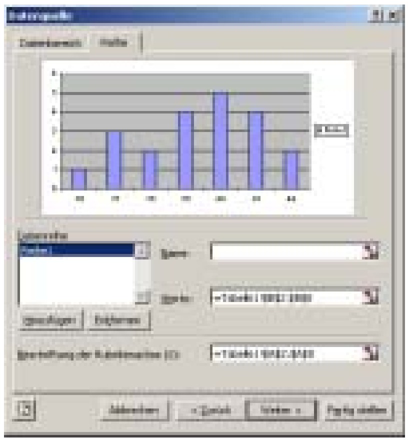


	A	B	C
1	Schuhgröße	Schülerzahl	
2	36	1	
3	37	3	
4	38	2	
5	39	4	
6	40	5	
7	41	4	
8	42	2	
9			
10			

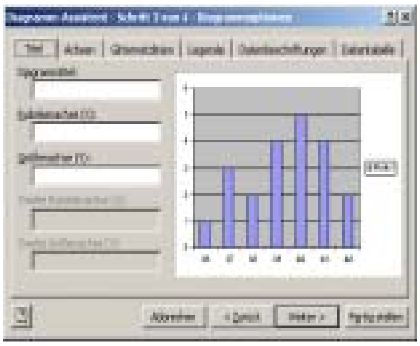


- Cursor in das unterste Feld „Beschriftung der Rubrikenachse (X)“ setzen (linkes Bild)
- mit der Maus die Spalte mit den Schuhgrößen markieren; danach erscheint das rechte Bild
- „Weiter“ anwählen





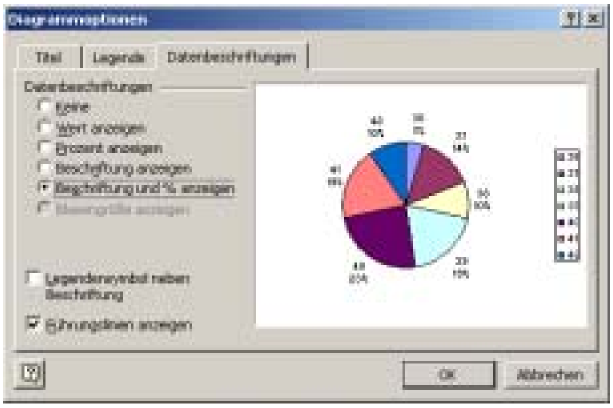
- bei Rubrikenachse (X) Schuhgröße eintragen, bei Größenachse (Y) Schülerzahl
- danach „Fertigstellen“ wählen



2. Erstellen eines Kreisdiagramms (Expertenmaterial M4)

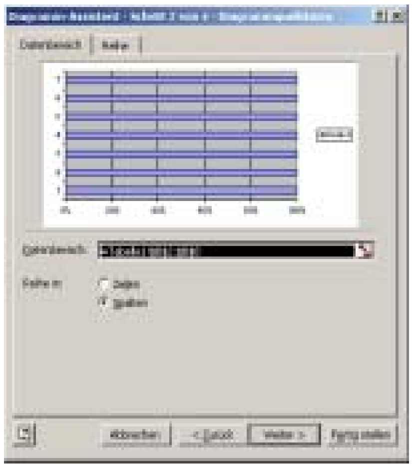
- Vorgehensweise wie beim Säulendiagramm

- die Beschriftungsart kann man über das Kontextmenü (Diagramm mit rechter Maustaste anklicken) auswählen.

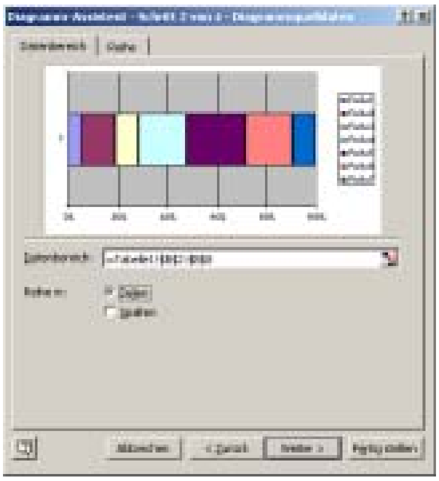


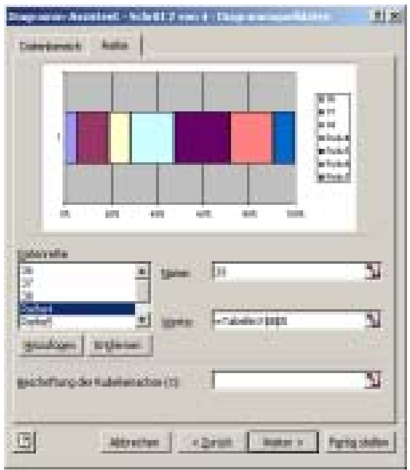
3. Erstellen eines Streifendiagramms (Expertenmaterial M3)

- als Diagrammtyp „gestapelte Balken“ wählen
- danach erscheint das rechte, leider ungewünschte Bild; deshalb: Reihe in „Zeilen“ anwählen



- Registerkarte „Reihe“ wählen
- hier kann die Legende durch Eingabe der Namen z. B. „39“ für Datenreihe 4 entsprechend formatiert werden





<u>Anmerkung</u>:

Im Expertenmaterial M3 wurde das Streifendiagramm folgendermaßen weiterbearbeitet:

(1) Muster statt Farben; dazu den Menüpunkt „Datenreihen formatieren“ im Kontextmenü anwählen (man kann jede Fläche des Diagramms einzeln anklicken).

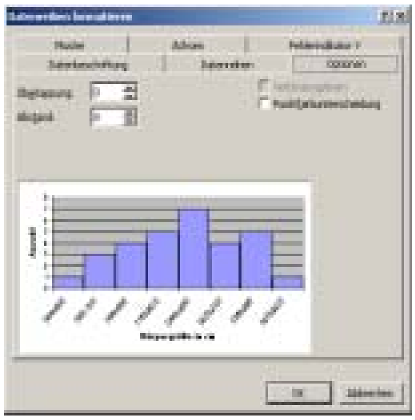
(2) Unter „Diagrammoptionen“ (Kontextenü) Rubrikenachse, Größenachse und Gitternetzlinien deaktivieren.

(3) Überlagerung des Diagramms in Word z. T. mit „Karopapier“. Dazu Tabelle innerhalb eines Textfeldes erzeugen, Spaltenbreite und Zeilenhöhe auf genau 0,5 cm einstellen, „keine Linie“ und „keine Farbe“ im Menü „Textfeld formatieren“ wählen, Anpassen der Größe des Diagramms an die Kästchen.

4. Erstellen eines Histogramms (Expertenmaterial M5)

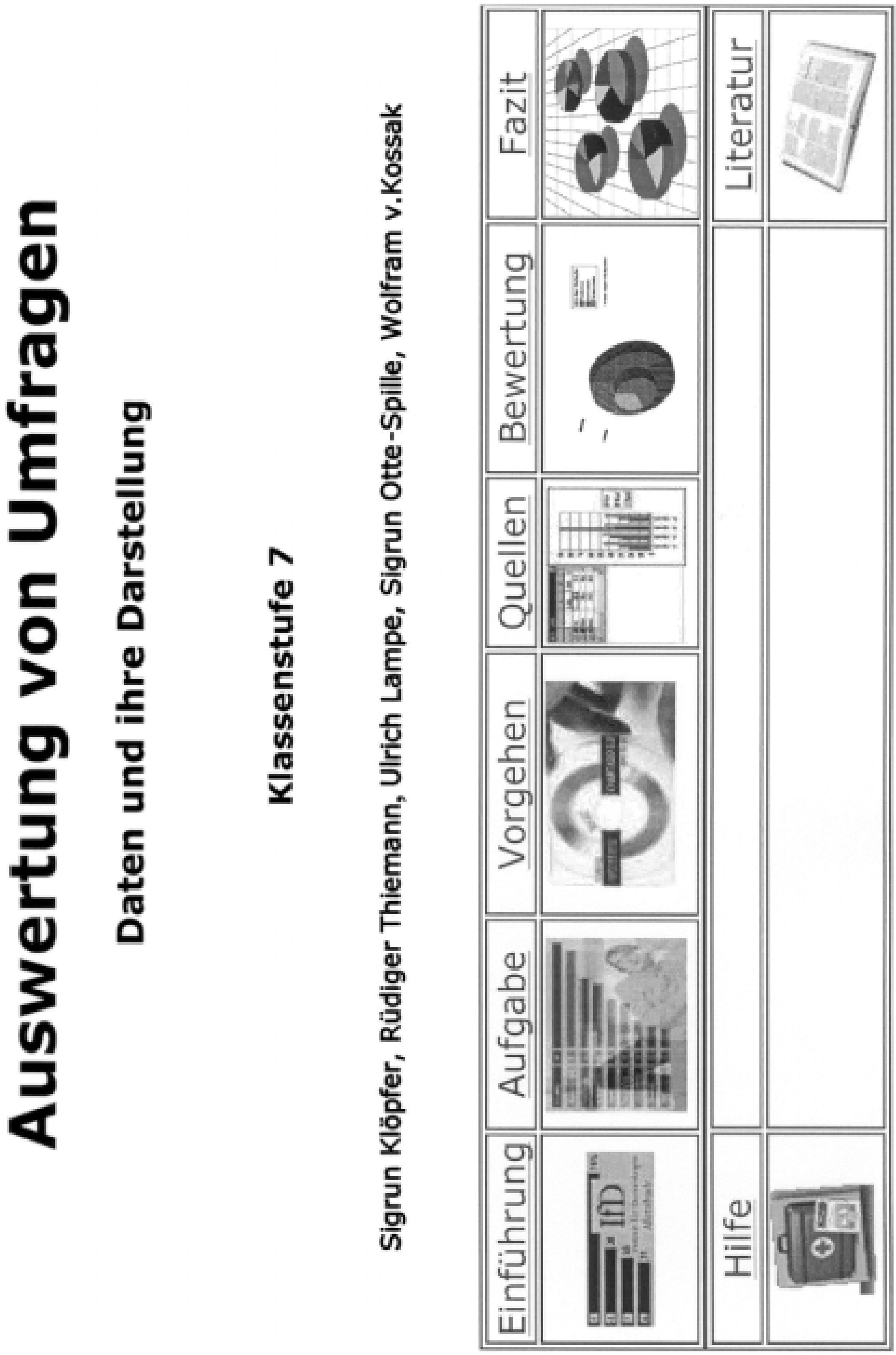
- Eingabe der Klassen und absoluten Häufigkeiten in die Tabelle
- erzeugen eines normalen Säulendiagramms wie in 1. beschrieben

	A	B
1	[180;185[	1
2	[185;190[	3
3	[190;195[	4
4	[195;200[	5
5	[200;205[	7
6	[205;210[	4
7	[210;215[	5
8	[215;220[	1



- im Menü „Datenreihen formatieren“ die Registerkarte „Optionen“ wählen und dort den Abstand der Säulen auf „0“ setzen

Material M11: Startseite des Webquest



2.2.3 Literatur

[1] Mathematik lehren: Daten und Modelle (Themenheft), Heft 97. Friedrich Verlag, Seelze 1999.
[2] Herget, W., Scholz, D.: Die etwas andere Aufgabe - aus der Zeitung. Mathematik-Aufgaben Sekundarstufe I. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze 1998.
[3] Führer, L.: Misstrauensregeln. In: Mathematik lehren, Heft 85. Friedrich Verlag, Seelze 1997, S. 61-64.
[4] Krämer, W.: So lügt man mit Statistik. Campus Verlag, Frankfurt a. M. 1994^6.

2.2.4 Kontakt

Sigrun Klöpfer	*SKloepfer@aol.com*
Wolfram von Kossak	*wolfram_v_kossak@yahoo.com*
Hans-Ulrich Lampe	*UlrichLampe@t-online.de*
Sigrun Otte-Spille	*Sigrun.Otte-Spille@t-online.de*
Rüdiger Thiemann	*rthiemann@t-online.de*

2.3 Sammeln, Darstellen und Auswerten von Wetterdaten

<table>
<tr><td colspan="2">
Der zentrale Inhalt der ersten Unterrichtssequenz ist die Darstellung und einfache Auswertung von Daten. Hierzu werden auch eigene Temperaturdaten gesammelt. Die Beschäftigung mit diesen Daten findet hierbei noch losgelöst von etwaigen stochastischen Fragestellungen statt.

Das Unterrichtsbeispiel bemüht sich um eine fächerübergreifende Vorgehensweise und berücksichtigt insbesondere Lerninhalte aus dem Erdkundeunterricht.

Lernziele:
1. Die Sammlung von Datenmaterial planen und Daten erheben
2. Daten im Koordinatensystem - mit und ohne Technikeinsatz - darstellen
3. Informationen aus Tabellen und Schaubildern gewinnen
4. Bewertungen vornehmen und Schlussfolgerungen ziehen
5. Mittelwerte berechnen und interpretieren
6. Auswirkungen einzelner Daten auf den Mittelwert experimentell untersuchen
</td></tr>
<tr><td>
Besondere Materialien/Technologie:
Temperaturdaten ggf. aus dem Internet, TI-83 Plus, ca. 15 Thermometer

(zur Demonstration ggf. auch Microsoft Excel)
</td><td>
Dauer der Unterrichtseinheit:
5 Unterrichtsstunden plus GTR-Handlingsübungen
Voraussetzungen:
Negative Zahlen (nicht unbedingt erforderlich)
</td></tr>
</table>

Gliederung

2.3.1 Unterrichtsablauf

1. Stunde	***Einstieg*** *Zeitungsartikel zum Temperaturrekord (Mat. Zeitung)* *Frage: Wie erhält man derartige Aussagen bzw. Behauptungen?* In dem sich anschließenden Gespräch wird sicherlich die Notwendigkeit der Datenerhebung als Basis für derartige Aussagen erkannt. Dies bietet wiederum Anlass für Schüleraktivitäten. ***Arbeitsauftrag*** *Geht in kleinen Gruppen 20 Minuten durch das Schulgebäude und über den Schulhof und messt an mindestens 5 Orten die Temperatur.* *Lässt sich die Frage „wie heiß ist die Schule?“ sinnvoll beantworten?* ***Auswertung*** Die Betrachtung des ungeordneten Datenmaterials erfordert eine strukturiertere Darstellung: • Reflexion über Darstellungsmöglichkeiten • Sammeln der Datenpaare in einer Tabelle • Berechnung einer „Schul-Durchschnittstemperatur“ • ggf. „Innen-MW“ und „Außen-MW“ unterscheiden ***Hausaufgabe*** Zeichne ein Schaubild (DIN A4) zu deinen erhobenen Daten	die Messwerte werden z. B. auf Karteikarten notiert, die anschließend an einer geeigneten Fläche ausgestellt werden Zeichnung per Hand
2. Stunde und ggf. zusätzliche Stunde	***Einstieg/Hausaufgabe*** *Schülerblätter an der Tafel zeigen* Hierzu eignen sich Stabdiagramme/Histogramme besonders gut. Evtl.: Berechnen von Mittelwerten *Die Lehrkraft zeigt vergleichsweise eine Lösung mit dem TI-83.* ***Motivation*** *Bei größeren Datenmengen erleichtern Hilfsmittel die Arbeit. Wie geht das?* ***Einführung in den Umgang mit dem TI-83 anhand der Lehrer-Lösung*** • Dateneingabe als Daten in Listen • graphische Darstellungsmöglichkeiten (STAT PLOT) • Berechnung einer „Schul-Durchschnittstemperatur“ ***Hausaufgabe*** Datenmaterial aus dem Schulbuch plotten lassen	die manuell erstellten Zeichnungen sollen nun mit einem TI-83-Plot verglichen werden *(Mat. Schultemperatur)* Lehrer-Information: evtl. ist eine zusätzliche „Handlingstunde" notwendig

3. Stunde	***Hausaufgabenvergleich*** *neues Problem* Präsentation der Temperaturtabellen für Berliner Stadtteile *Arbeitsblatt 1: Tagesgänge für Temperaturen in Berlin am 8. Juli 1991* (Quelle: Deutscher Wetterdienst) ***Gruppenarbeit**, arbeitsteilig* *Nachdem die Graphiken einzeln mit dem TI-83 erstellt wurden, sollen die vier verschiedenen Ergebnisse miteinander verglichen werden. Da die Graphen sehr ähnlich aussehen, empfiehlt sich die gleichzeitige Darstellung aller Graphen mit Excel (Mat. Berlin).* ***Auswertung der Gruppenarbeit*** • Beschreibung des Tagesganges, Minimum/Maximum • Begründung der Unterschiede auf Grund örtlicher Gegebenheiten (Mikroklima) • Durchschnitt aller 24 Werte • grafisches/optisches Mittel einzeichnen • Problematik der Tagesdurchschnittstemperatur ***Hausaufgabe*** Plane eine Messung (Tabelle), um die Tagesdurchschnittstemperatur an deinem Wohnort für einen Tag zu bestimmen.	die erworbenen Fertigkeiten sollen durch eine ähnliche Aufgabe geübt und gefestigt werden mit dem TI-83-Display lassen sich sehr gut die Einzel-Plots darstellen *(Mat. Berlin-GTR)* Lehrer-Information: Nutzung des STAT-Menüs CALC 1– VarStats
4. Stunde	***Diskussion/mögliche Vorschläge anhand der Hausaufgabe*** • *es müssten 24 oder mehr Messungen durchgeführt werden.* • *eine geringere Anzahl von Punkten reicht aus, um den Kurvenverlauf näherungsweise zu bekommen, z. B. 3 Punkte (Min., Max. und ein geeignet ausgewählter Zusatzpunkt)* • *das Mittel aus diesen drei Punkten führt schon zu einem Wert nahe des bestimmten Mittelwertes, doch lässt sich das Ergebnis durch geeignete Gewichtung noch verbessern* ***Information*** _der Deutsche Wetterdienst benutzt als Näherung die Formel: (Temp(7 h) + Temp(14 h) + 2*Temp(21 h) / 4)_ ***Aufgaben*** 1. *Überprüfe die Gültigkeit der Formel an den Tagesgängen von Berlin.* 2. *Führe Messungen um 7 Uhr, 14 Uhr und 21 Uhr an deinem Wohnort durch und berechne wie oben die Tagesdurchschnittstemperatur.*	die Näherung ist in der Regel recht gut es liegt ein gewichteter Mittelwert vor, wobei die Formel empirisch abgesichert ist

5. Stunde	***Arbeitsblatt Mat. Hannover*** Vergleich der Tagesdurchschnittstemperaturen für Hannover im Februar der Jahre 2001, 2000, 1999, 1998 ***Problemstellung*** Auf den anfänglichen Zeitungsartikel wird nochmals verwiesen und die Frage gestellt: Ist ein außergewöhnlicher Tag an den vorliegenden Monatsgängen ablesbar? (Zackensuche im Graphen) ***Ergebnis*** Es ergeben sich sehr unterschiedliche Temperaturverläufe. Um den Einfluss eines „Ausreißer-Tages“ einschätzen zu können, wird folgende vertiefende Aufgabe gestellt: ***Aufgabe/Experiment*** Ersetze die Temperatur am 1. Februar 2001 durch den Wert 20 Grad und berechne die geänderte Durchschnittstemperatur. Kalkuliere den Einfluss bevor du rechnest! ***Ergebnis*** Diskussion und Vergleich: • ein einzelner Wert „geht im Monatsmittel unter“ • der geänderte Wert „schlägt nur mit 1/30 durch“ • die Tagesgänge sind „glatt“ • die Monatsgänge haben viele Zacken	*(Mat. Hannover-GTR)* Variante: Schülerinnen/Schüler holen die Daten aus dem Internet *(Mat. Hannover Excel-Lösung)* die Aufgabe ist mit dem TI-83 gut zu bewältigen *(Mat. Hannover, Variation der Lösung)* mit Excel arbeitet es sich sehr bequem, da die Daten automatisch aktualisiert werden

2.3.2 Materialien

Material Zeitung

Februar startet mit Wärmerekord

Temperaturen kletterten vielerorts über 20 Grad - Sturm über Großbritannien

HAMBURG. Die Deutschen erwachen aus dem Winterschlaf: Nach Wochen eisiger Temperaturen und nasskalter Tage haben Sonnenschein und Frühlingswetter die Menschen am Wochenende ins Freie gelockt. Dem Deutschen Wetterdienst zufolge war es der wärmste Februarbeginn seit mehr als 100 Jahren. In Baden-Württemberg und auch Rheinland-Pfalz kletterten die Temperaturen mancherorts sogar über die 20-Grad-Marke.
Über Großbritannien und Irland fegten hingegen orkanartige Stürme hinweg. Zwölf Menschen kamen ums Leben. Wegen des Sturmes gerieten außerdem drei Schiffe in Seenot - 44 Besatzungsmitglieder mussten in dramatischen Aktionen gerettet werden. dpa/afp

Quelle: Braunschweiger Zeitung vom 04.02. 2002

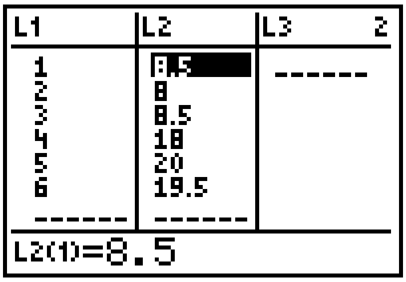
Material Schultemperatur

Mögliche GTR-Lösung

Geht in kleinen Gruppen durch das Schulgebäude und über den Schulhof und messt an mindestens 5 Orten die Temperatur.

Schülerinnen/Schüler bringen Datenpaare mit, bei denen Temperatur und Ort zusammengehören. Den Orten wird zweckmäßigerweise eine Nummer zugeordnet.

Die Auswertungen basieren auf folgenden fiktiven Daten:



Anzeige der Listen im Menü STAT Edit

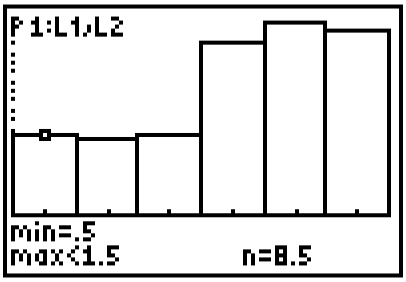
Die gesammelten Temperaturen und Ortsnummern sind in Listen abgelegt und bilden somit die Datenbasis für die Arbeit mit dem GTR.

L1: Nummer des Messortes, hier (1) bis (6)
L2: zugehörige Temperatur in ° C

Für eine rechnerbasierte grafische Auswertung bieten sich zwei prinzipiell verschiedene Möglichkeiten für den Plot-Typ an:

- (Plot-Typ 1): Ortsnummern und Temperaturdaten bilden die x- und y-Achse
- (Plot-Typ 2): durch Temperaturklassenbildung ergibt sich eine Häufigkeitsverteilung

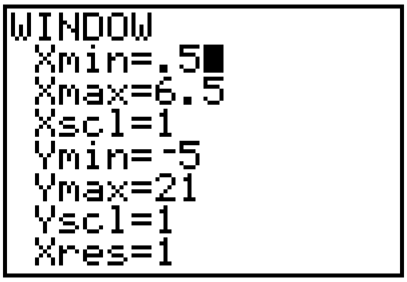
1. Die Daten der Temp.-Liste L2 werden über der Ortsnummer L1 abgetragen



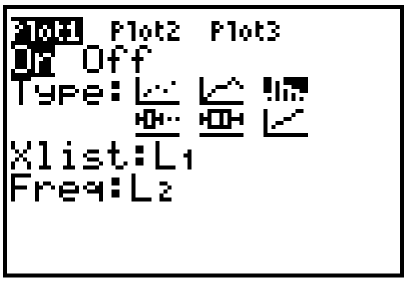
Histogramm-Plot Typ 1

Temperaturverteilung in der Schule:

(1): vor der Turnhalle
(2): Schuleingang
(3): Raucherecke
(4): Aula
(5): Klassenraum
(6): Sekretariat

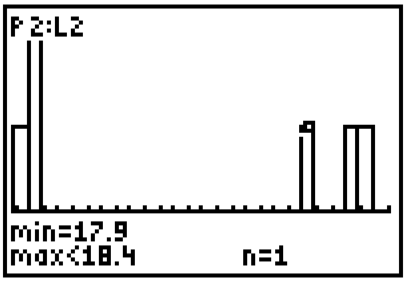


WINDOW-Einstellungen

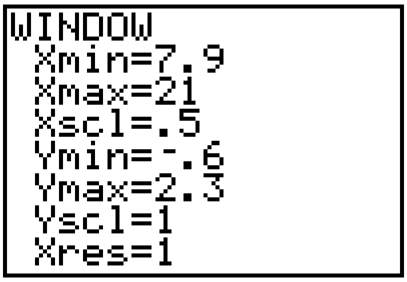


STAT PLOT-Einstellungen

2. Durch Klassenbildung (Temperaturintervall) lassen sich Häufigkeiten für das Auftreten von Messwerten darstellen.



Histogramm-Plot Typ 2

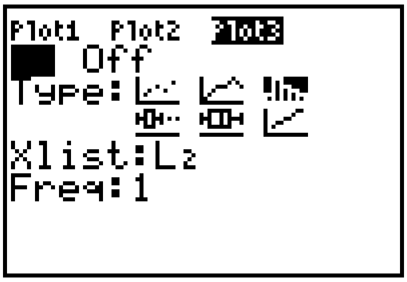


WINDOW-Einstellungen
Xscl stellt die Klassenbreite auf 0,5 ° C ein

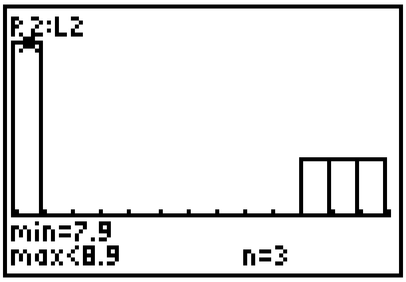
Die Information, wie viele Messwerte bei vorgegebener Klassenbreite im Temperaturbereich liegen, ist gut zu entnehmen.

Zwecks Kontrolle kann man die Summe der Häufigkeiten bilden, sie muss mit den 6 Messwert-Paaren übereinstimmen.

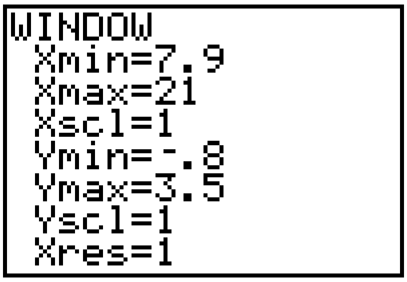
Die Klassenbreite beeinflusst die Darstellung erheblich.



STAT PLOT-Einstellungen



Histogramm-Plot Typ 2
mit anderer Klassenbreite



WINDOW-Einstellungen
Xscl stellt die Klassenbreite auf 1,0 ° C ein

Die Darstellung ändert sich naturgemäß mit Variation der Klassenbreite. Man gewinnt einen Eindruck davon, wie unterschiedlich der Datensatz als Temperaturverteilung optisch wirkt.

Zum Problem „Wie heiß ist die Schule?“

Bei Verwendung des Plot-Typs 1 ist man geneigt, den optischen Mittelwert (mittlere Höhe im Stabdiagramm) als komprimierte beschreibende Größe zu wählen. Wenn die Werte allerdings stark schwanken - dies zeigt sich bei den Plot Typen 1 und 2 in unterschiedlicher Weise - ist sofort einsichtig, dass bei alleiniger Mittelwertangabe der Überblick verloren geht. Die Verteilungsdarstellung im Sinne des Plot-Typs 2 eröffnet somit Möglichkeiten zur Verbesserung im Sinne von differenzierterer Informationsvermittlung.

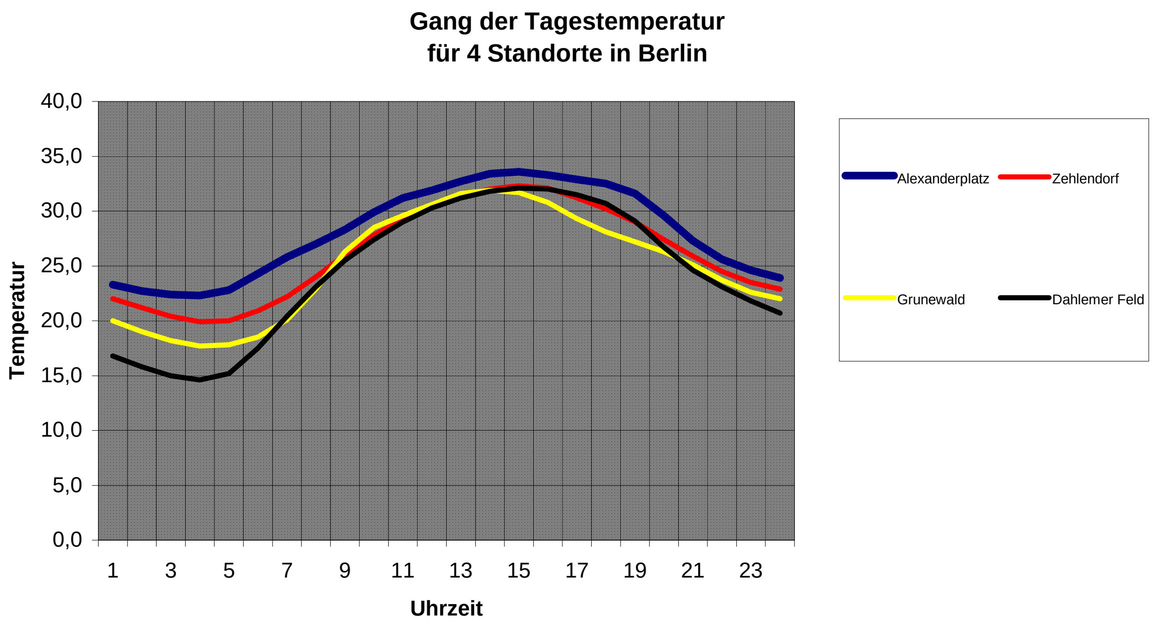
Der Mittelwert MW aller Schultemperaturen liegt für obige Daten bei 13,6 ° C.
Er sollte ohne Anwendung des GTR Menüs STAT-CALC standardmäßig berechnet werden.
Eine zusätzliche Aufspaltung in „Innen-MW“ (8,3 ° C)und „Außen-MW“ (19,2 °C) erscheint sinnvoll.

Material Berlin

Tagesgang der Lufttemperatur in °C für vier Standorte in Berlin				
Uhrzeit	**Alexanderplatz**	**Zehlendorf**	**Grunewald**	**Dahlemer Feld**
1	23,3	22,0	20,0	16,8
2	22,7	21,2	19,0	15,8
3	22,4	20,4	18,2	15,0
4	22,3	19,9	17,7	14,6
5	22,8	20,0	17,8	15,2
6	24,3	20,9	18,5	17,5
7	25,8	22,2	20,1	20,4
8	27,0	24,0	22,9	23,1
9	28,3	26,0	26,3	25,5
10	29,9	27,8	28,5	27,4
11	31,2	29,3	29,6	29,0
12	31,9	30,5	30,6	30,3
13	32,7	31,3	31,6	31,2
14	33,4	32,0	31,9	31,8
15	33,6	32,3	31,7	32,1
16	33,3	32,1	30,8	32,0
17	32,9	31,2	29,3	31,5
18	32,5	30,2	28,1	30,7
19	31,6	29,0	27,2	29,1
20	29,6	27,4	26,3	26,7
21	27,3	25,9	25,1	24,6
22	25,6	24,5	23,7	23,1
23	24,6	23,5	22,6	21,8
24	23,9	22,9	22,0	20,7

Aufgabe:
Zeichne alle vier Berliner Tagesgänge in ein Temperaturdiagramm.

Material Berlin: EXCEL-Lösung



Material Berlin

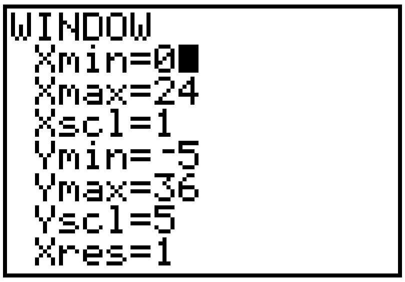
Tabelle mit verschiedenen ergänzten Mittelwerten

Mat1: Tagesgang der Lufttemperatur in °C an vier verschiedenen Standorten in Berlin

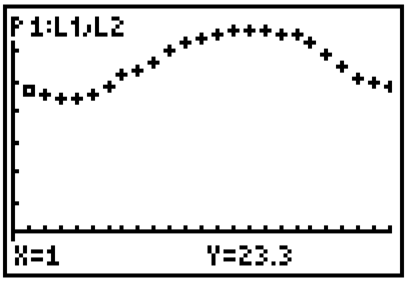
Uhrzeit	Mitte, Alexanderplatz	Zehlendorf, Miquelstr.	Forst Grunewald, Jagen 91, Altbestand	Forst Grunewald, Dahlemer Feld
1	23,3	22,0	20,0	16,8
2	22,7	21,2	19,0	15,8
3	22,4	20,4	18,2	15,0
4	22,3	19,9	17,7	14,8
5	22,8	20,0	17,8	15,2
6	24,3	20,9	18,5	17,5
7	25,8	22,2	20,1	20,4
8	27,0	24,0	22,9	23,1
9	28,3	26,0	26,3	25,5
10	29,9	27,8	28,5	27,4
11	31,2	29,3	29,6	29,0
12	31,9	30,5	30,6	30,3
13	32,7	31,3	31,6	31,2
14	33,4	32,0	31,9	31,8
15	33,6	32,3	31,7	32,1
16	33,3	32,1	30,8	32,0
17	32,9	31,2	29,3	31,5
18	32,5	30,2	28,1	30,7
19	31,6	29,0	27,2	29,1
20	29,6	27,4	26,3	26,7
21	27,3	25,9	25,1	24,6
22	25,6	24,5	23,7	23,1
23	24,6	23,5	22,6	21,8
24	23,9	22,9	22,0	20,7
Mittelwert	28,0	26,1	25,0	24,4
gew. Mittel: 7h, 14h, 2*21h	28,5	26,5	25,6	25,4
Median	27,8	26,0	25,7	25,1
Mittelwert: 7h, 14h, 21h	28,8	26,7	25,7	25,6

Material Berlin: GTR-Lösung

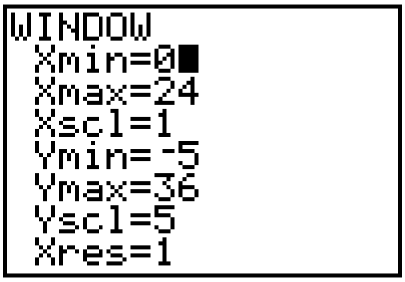
Tagesgang der Lufttemperatur in ° Cfür vier Standorte in Berlin



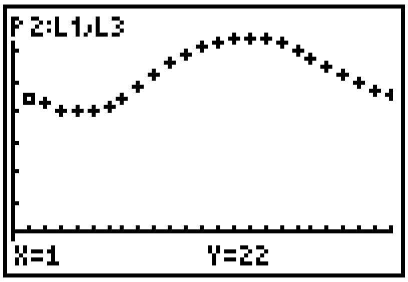
WINDOW-Einstellungen



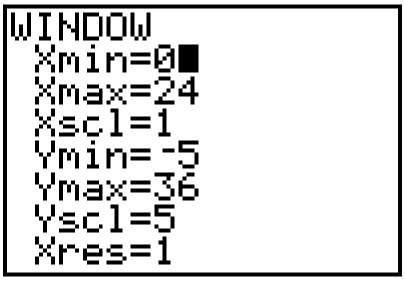
Tagesgang der Temperatur für Zehlendorf



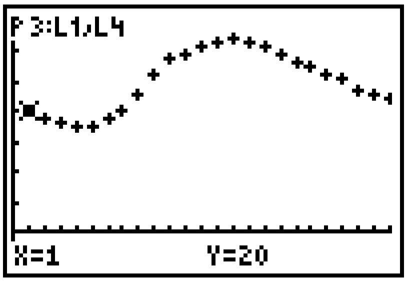
WINDOW-Einstellungen



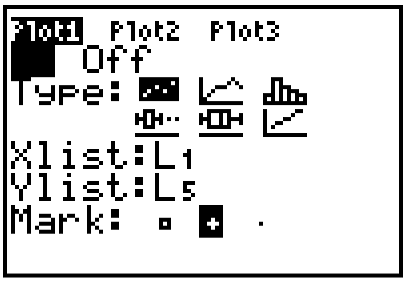
Tagesgang der Temperatur für Alexanderplatz



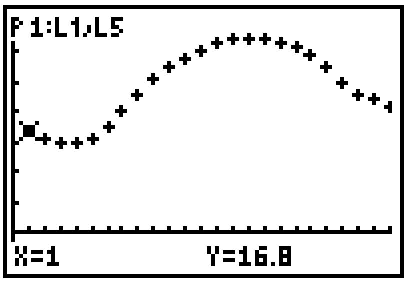
WINDOW-Einstellungen



Tagesgang der Temperatur für Grunewald



STAT PLOT-Einstellungen

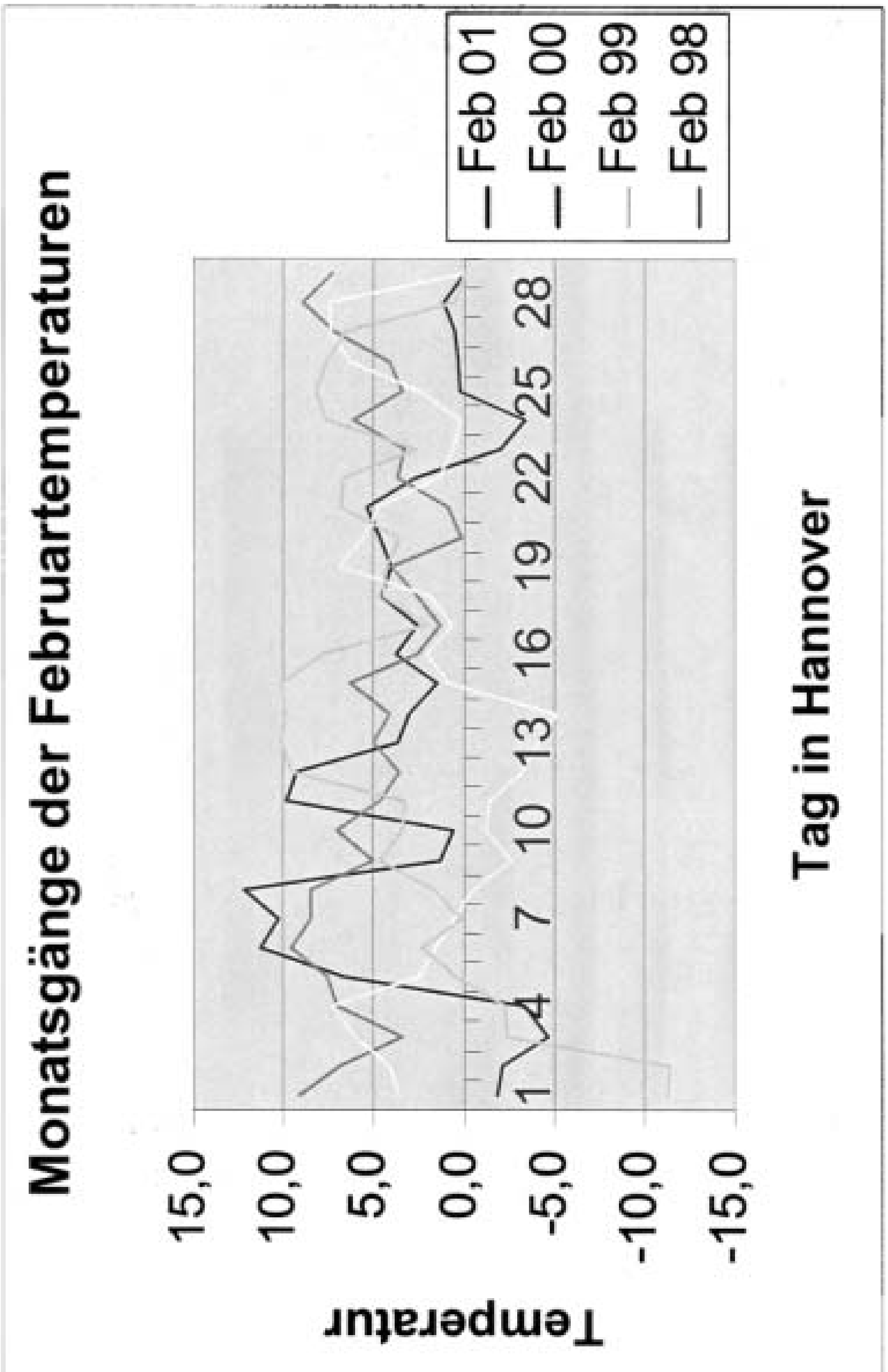


Tagesgang der Temperatur für Dahlem

Material Hannover

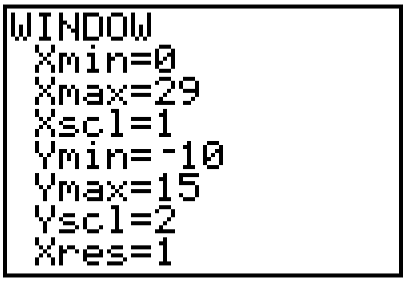
Tagesdurchschnittstemperaturen im Februar in Hannover				
Tag	**Feb 01**	**Feb 00**	**Feb 99**	**Feb 98**
1	-1,9	9,1	3,6	-11,3
2	-2,1	6,8	4,1	-11,4
3	-4,7	3,4	6,0	-2,4
4	-3,4	7,0	7,3	-2,3
5	6,7	7,6	2,5	0,4
6	11,3	9,6	1,6	2,3
7	10,3	8,5	0,6	0,1
8	12,2	8,5	-0,5	1,6
9	1,3	5,0	-2,7	4,7
10	0,6	7,0	-1,2	3,4
11	9,8	4,7	-1,4	3,3
12	9,3	3,6	-3,2	9,6
13	3,7	5,0	-4,1	10,1
14	3,0	4,1	-5,1	9,9
15	1,5	6,3	0,9	10,1
16	3,8	2,6	2,0	7,8
17	2,6	1,3	0,7	2,0
18	4,6	2,6	1,9	4,5
19	4,0	4,0	6,9	4,3
20	4,7	0,1	5,6	3,6
21	5,4	0,9	4,8	6,8
22	2,7	3,7	1,4	6,7
23	-2,0	3,3	0,6	2,7
24	-3,4	6,1	0,2	7,7
25	0,2	3,4	2,4	8,2
26	0,3	4,1	6,3	7,7
27	0,5	7,2	7,4	6,6
28	1,1	8,9	7,5	0,5
29	0	7,3	0	0
Monatsmittelwert	**2,93**	**5,2**	**1,9**	**3,4**
Monatsmedian	**2,65**	**5,0**	**1,8**	**4,0**

Material Hannover: Excel Lösung

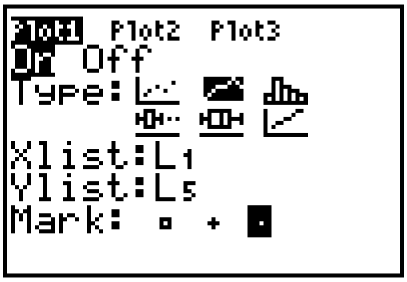


Material Hannover: GTR-Lösung

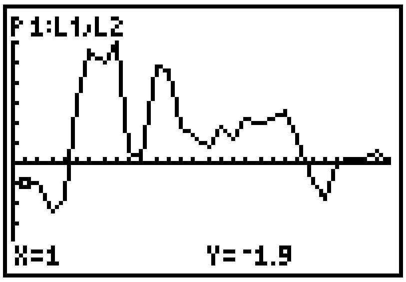
Die Tagesdurchschnittstemperaturen in Hannover ergeben die vier Monatsgänge



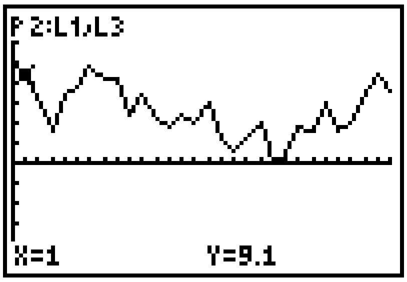
WINDOW-Einstellungen



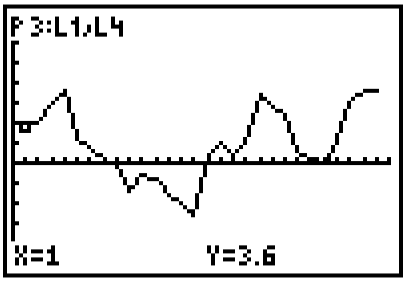
STAT PLOT-Einstellungen



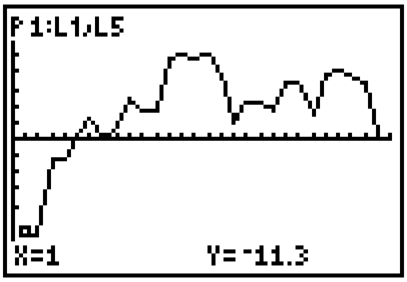
Monatsgang der Temperaturen für Hannover im Feb. 01



Monatsgang der Temperaturen für Hannover im Feb. 00



Monatsgang der Temperaturen für Hannover im Feb. 99

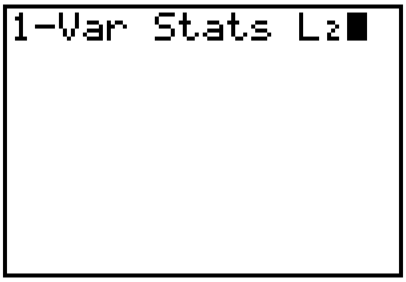


Monatsgang der Temperaturen für Hannover im Feb. 98

Material Hannover: Variation der Lösung

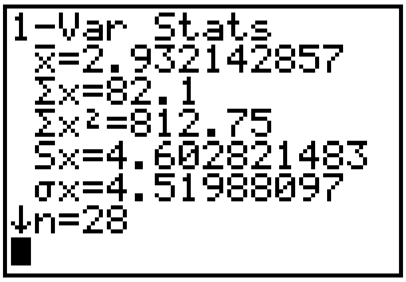
Lösungen der experimentellen Aufgabe zum Mat. Hannover

Ersetze die Temperatur am 1. Februar 2001 durch den Wert 20 Grad, berechne die geänderte Durchschnittstemperatur und vergleiche mit dem ursprünglichen Wert.

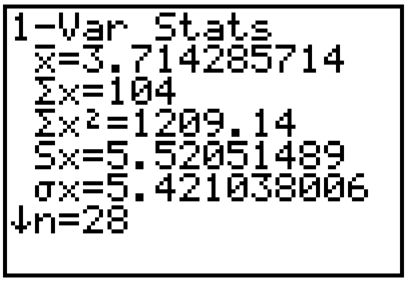


L2 hat die ursprünglichen Daten

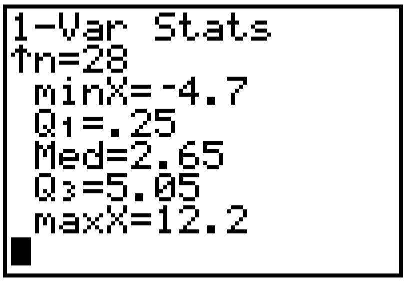
L2 mit geändertem Datensatz: -1,9 => 20,0



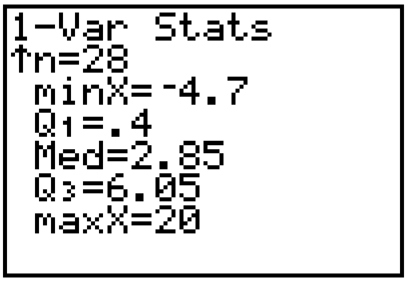
Ergebnisse aus 1-Var Stats



Ergebnisse aus 1-Var Stats



restliche Ergebnisse aus 1-Var Stats



restliche Ergebnisse aus 1-Var Stats

2.3.3 Kontakt

Uwe Feyerabend *Uwe.Feyerabend@t-online.de*

Uwe Bergmann *bergmann-uwe@t-online.de*

Andreas Mertins *amertins@t-online.de*

Hubert Scholz *hubert_scholz@gmx.de*

2.4 Würfeln - Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten

<table>
<tr><td colspan="2">Ausgehend von einem Nicht-Laplace-Experiment wird die Wahrscheinlichkeit als optimale Prognose für eine zu erwartende relative Häufigkeit definiert. Nach der auf diese Weise erfolgten experimentellen Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten werden Laplace-Experimente betrachtet und Wahrscheinlichkeiten durch Symmetrieüberlegungen festgelegt. Als dritte Möglichkeit der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten wird die Simulation behandelt.</td></tr>
<tr><td>Besondere Materialien/Technologie:
<u>empfohlen:</u> Tabellenkalkulation zur Demonstration
<u>möglich:</u> grafikfähiger Taschenrechner</td><td>Dauer der Unterrichtseinheit:
8 - 10 Unterrichtsstunden</td></tr>
</table>

Gliederung

2.4.1 Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

1. Stunde

Würfeln mit dem Lego-Vierer

In dieser Stunde sollen die Schülerinnen und Schüler Hypothesen über zu erwartende relative Häufigkeiten aufstellen und diese dann experimentell bestätigen oder revidieren.

<u>Motivationsexperiment</u>

Jede Schülerin/jeder Schüler darf einen Lego-Vierer werfen, um über den Gewinn eines Smarties o. ä. zu entscheiden. Dabei muss vorher von jeder Schülerin und jedem Schüler eine „Gewinnseite“ begründet festgelegt werden.

Die Schülerinnen und Schüler werden als Gewinnseite die Seite wählen, die nach ihrer intuitiven Vorstellung „höchstwahrscheinlich“ beim Wurf oben liegen wird. In das Aufstellen dieser Hypothese gehen u. a. Symmetrie- und Schwerpunktüberlegungen ein.

Auswertung

Auswahl / Gewinn			
Ja			
Nein			
Summe			
Gewinnanteil			

Die Frage, welche Gewinnbedingung die Schülerinnen und Schüler bei einem 2. Spiel wählen würden, regt zur Analyse der Tabelle und der Reflexion der gewählten Gewinnbedingung an. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Betrachtung der Anteile eine bessere Vergleichsmöglichkeit bietet. Aus der Tabelle ist ersichtlich, unter welcher Gewinnbedingung die relative Häufigkeit für den Gewinn größer war. Möglicherweise ist das Ergebnis jedoch Zufall, ein erneuter Versuch könnte andere relative Häufigkeiten ergeben. Trotzdem werden die Schülerinnen und Schüler bei einem zweiten Spiel die Gewinnbedingung wählen, unter der im vorherigen Durchgang der Anteil der Sieger am größten war. Es ist den Lernenden klar, dass es bei keiner Gewinnbedingung eine 100%-ige Sicherheit gibt. Die Gegenüberstellung der Ergebnisse zweier Spielrunden wirft die Frage auf, welches Ergebnis besser die Gewinnchance angibt. Zur Beantwortung der Frage ist ein ausführlicheres Experiment sinnvoll.

Untersuchung der relativen Häufigkeiten (ggf. Hausaufgabe)

Ein Lego-Vierer wird mit 1 (für die Unterseite), 4 (für die Oberseite mit den 4 Nippeln) und 2, 3, 5, 6 (an den Seitenflächen) beschriftet.

Problemstellung

Schätzt für jede Seite, in wie viel Prozent aller Fälle die jeweilige Seite bei einer großen Anzahl von Würfen erscheint. Tragt diese Werte in eine Tabelle ein und überprüft diese Schätzungen durch ein Experiment.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6	Summe
Schätzung in %							
Strichliste							
absolute Häufigkeit							
relative Häufigkeit							

2. Stunde

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Ergebnisvergleich

Die von den Schülerinnen und Schülern erhaltenen absoluten Häufigkeiten werden z. B. in eine Excel-Tabelle übertragen (Material 1). Der Vergleich der Werte ergibt, dass bei gleichen Seiten große Unterschiede in den erhaltenen absoluten Häufigkeiten auftreten können. Zum Vergleich müssen die Häufigkeiten bei gleicher Wurfanzahl oder die relativen Häufigkeiten herangezogen werden. Eine stichhaltige Aussage über die Gewinnchance wird erst durch eine große Anzahl von Würfen möglich. Eine Erhöhung der Anzahl kann leicht erreicht werden, wenn die Ergebnisse einiger bis hin zu aller Schülerinnen und Schüler addiert werden. Vergleicht man dann die Entwicklung der relativen Häufigkeiten, so erkennt man zum Beispiel anhand einer Grafik, wie sich die relativen Häufigkeiten mit zunehmender Versuchsanzahl stabilisieren.

Vertiefung

Reißzweckenexperiment (ggf. Hausaufgabe):

Schätze die relative Häufigkeit für die beiden Möglichkeiten beim Wurf einer Reißzwecke und überprüfe diese durch ein geeignetes Experiment.

3. Stunde

Definition der Wahrscheinlichkeit und Übungsaufgaben

Besprechung der Hausaufgabe

erneute graphische Auftragung mit Excel

Ergebnissicherung

Eine Reflexion über den bisher verfolgten Weg ergibt folgende Schritte:
1. Eine Schätzung ist eine Hypothese über die zu erwartenden relativen Häufigkeiten bei einer Versuchsreihe.
2. Die Versuchsreihe wird durchgeführt.
3. Die Beobachtungen ergeben, dass die relativen Häufigkeiten schwanken, wobei die Größe der Schwankung mit der Erhöhung der Anzahl von Durchführungen abnimmt.
4. Eine eventuell verbesserte Hypothese für die zu erwartenden relativen Häufigkeiten wird vorgelegt; kann zur Festlegung einer Wahrscheinlichkeit verwendet werden.

Definition:

Wahrscheinlichkeit ist die optimale Prognose für eine zu erwartende relative Häufigkeit (vgl. [Lit. 1], S. 6).

Übung

Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten für weitere Nicht-Laplace-Experimente mit eigener graphischer Auftragung oder Nutzung des graphikfähigen Taschenrechners (Material 2).

4. Stunde

Zusammenfassung

Besprechung der Aufgaben

Ergebnissicherung

Zusammenfassung der bisherigen Überlegungen

1. Alle bisher durchgeführten Versuche werden als Zufallsversuche bezeichnet (Begriffsbildungen Ergebnis, Ergebnismenge).
2. Schätzungen für relative Häufigkeiten kann man durch Schwerpunktüberlegungen, geometrischen Überlegungen und Symmetrieüberlegungen gewinnen.
3. Wahrscheinlichkeiten kann man durch relative Häufigkeiten bei langen Versuchsreihen bestimmen.

Die verschiedenen Möglichkeiten können auch kombiniert werden. Wichtig ist, dass bei der Festsetzung der Wahrscheinlichkeiten darauf geachtet wird, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse 1 ist.
Durch das Vorgehen sind sich die Schülerinnen und Schüler bewusst, dass es sich bei der Wahrscheinlichkeit nicht um eine exakte Vorhersage, sondern nur um die bestmögliche Vorhersage handelt.

Übung

Aufstellen von Ergebnismengen

2.4.2 Ereignisse und Laplace-Experimente

5. Stunde

Ereignis

Begriffsbildungen

Beim Legostein bietet es sich an, die vier Kanten des Legosteins zu einem *Ereignis* zusammenzufassen und eine Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Kante“ anzugeben.

Übung

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für Ereignisse. Zuerst können die bisherigen Nicht-Laplace-Experimente betrachtet werden, anschließend Beispiele mit vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten (Material 3)

6. Stunde

Laplace-Experimente

Motivation

Die Einführung der Laplace-Wahrscheinlichkeit soll über das Würfelspiel „Die Siedler von Catan“ geschehen. Hierbei wird mit zwei Würfeln gespielt und die Augensumme gebildet. Nach Angabe in der Spielanleitung treten die Augensummen sechs, sieben und acht besonders häufig auf. Dieses soll überprüft werden.

Erarbeitung

1. Ggf. werden die Schülerinnen und Schüler die Behauptung zunächst experimentell überprüfen wollen. Dann schließt sich die folgende Überlegung zur Deutung des experimentell erhaltenen Ergebnisses an. Die Schülerinnen und Schüler stellen von sich aus die Möglichkeiten für die verschiedenen Augensummen zusammen. Im anschließenden Gespräch werden die Aufschreibvarianten der Ergebnismenge verglichen und diskutiert wie viele verschiedene Ergebnisse auftreten. Es wird geklärt, dass (1,2) und (2,1) verschiedene Möglichkeiten bilden, die Augensumme 3 zu würfeln. Damit besteht die Ergebnismenge aus 36 Elementen. Diese können sehr übersichtlich in einer Tabelle angeordnet werden.
2. An dieser Stelle werden jetzt Laplace-Experimente als Zufallsversuch definiert, deren Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind. Für diese ergibt sich nun eine besonders einfache Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu ermitteln:

$$\text{Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses} = \frac{\text{Anzahl der zum Ereignis gehörenden Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse des Zufallsversuchs}}$$

3. Die Frage, warum beim Legostein nicht mit dieser Formel gearbeitet werden konnte, führt darauf, dass hier alle Versuchsausgänge auf Grund der Symmetrie des Würfels gleichberechtigt sind. Daher ist es sinnvoll, bis zum eventuellen Feststellen des Gegenteils davon auszugehen, die Seiten eines einzelnen Würfels als gleichwahrscheinlich zu setzen und damit auch die Versuchsausgänge beim Wurf zweier Würfel (bei Beachtung der Reihenfolge).

Begriffsbildung

Es folgen eine Definition für die Laplace-Wahrscheinlichkeit und Übungsaufgaben zur Festigung der neuen Begrifflichkeiten.

2.4.3 Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten durch Simulation

7. Stunde

Erarbeitung des Begriffs anhand des Geburtstagsproblems

Motivation

Die Schülerinnen und Schüler sollen durch eine Variation des Geburtstagsproblems an die Simulation herangeführt werden. Es soll die Frage beantwortet werden, wie wahrscheinlich es ist, dass mindestens zwei Personen einer Gruppe in einem Monat Geburtstag haben.

Der erste Zugang der Schülerinnen und Schüler wird das Abfragen in ihrer Klasse sein. Um eine repräsentative Stichprobe zu erhalten, genügt dieses jedoch nicht.

Simulation

Nun soll zunächst eine Simulation mithilfe eines zwölfseitigen Würfels (Dodekaeders) für eine fünf Personen umfassende Gruppe geschehen.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ergebnis 1. Stichprobe												
Ergebnis 2. Stichprobe												
Ergebnis 3. Stichprobe												

8. Stunde

Simulation des Geburtstagsproblems mit dem Zufallsgenerator eines graphikfähigen Taschenrechners

Material 4

9. Stunde

Übungsstunde mit Aufgaben zu allen Bereichen

2.4.4 Materialien

Material 1

Beispiel für eine Auswertung der Würfe eines Lego-Vierers mit einer Excel-Tabelle.

Anmerkung: *Zu der rechten Tabelle werden die relativen Häufigkeiten fortlaufend addiert, um die Entwicklung für eine zunehmende Anzahl von Würfen verfolgen zu können.*

Anzahl der Würfe mit Augenzahl

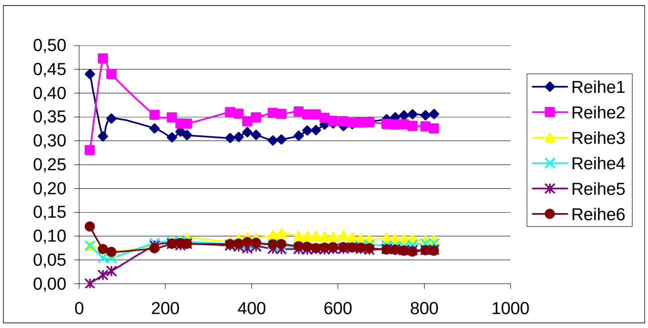
	Name	1	2	3	4	5	6	Summe
1	Nele	11	7	2	2	0	3	25
2	Bianca	6	19	2	1	1	1	30
3	Jan	9	7	1	1	1	1	20
4	Kai	31	29	9	11	12	8	100
5	Dennis	9	13	5	4	4	5	40
6	Moritz	9	4	2	2	1	2	20
7	Viviane	3	5	3	1	2	1	15
8	Hendrik	29	42	7	7	7	8	100
9	Dana	7	6	4	0	1	2	20
10	Kathrin	10	1	3	3	0	3	20
11	Jana	4	10	1	1	3	1	20
12	Sven	7	18	7	4	1	2	39
13	Bernh.	7	6	4	0	1	2	20
14	Sebst.	16	17	1	2	3	1	40
15	Anna	12	4	2	0	1	1	20
16	Karen	7	7	2	2	2	0	20
17	Diana	13	3	1	0	1	2	20
18	Sabrina	8	3	2	3	2	2	20
19	Jana	5	8	4	3	2	2	24
20	Moritz	9	5	0	2	3	1	20
21	Ramona	9	7	0	3	0	1	20
22	Silvia	8	7	1	3	0	1	20
23	Henning	17	11	5	2	4	1	40
24	Niina	0	0	0	0	0	0	0
25	Daniel	10	6	1	1	1	1	20
26	Sebst.	10	7	2	1	0	0	20
27	Ingrid	9	4	2	4	1	0	20
28	Matth.	9	9	0	5	3	4	30
29	Birgit	9	3	3	2	2	1	20
	Summe	293	268	76	70	59	57	823

Formel in
I5:=SUMME(C5:H5)
C35:=SUMME(C5:C34)

Relative Häufigkeit

Summe	1	2	3	4	5	6
25	0,44	0,28	0,08	0,08	0,00	0,12
55	0,31	0,47	0,07	0,05	0,02	0,07
75	0,35	0,44	0,07	0,05	0,03	0,07
175	0,33	0,35	0,08	0,09	0,08	0,07
215	0,31	0,35	0,09	0,09	0,08	0,08
235	0,32	0,34	0,09	0,09	0,08	0,09
250	0,31	0,34	0,10	0,09	0,08	0,08
350	0,31	0,36	0,09	0,08	0,08	0,08
370	0,31	0,36	0,09	0,08	0,08	0,08
390	0,32	0,34	0,10	0,08	0,07	0,09
410	0,31	0,35	0,10	0,08	0,08	0,09
449	0,30	0,36	0,10	0,08	0,07	0,08
469	0,30	0,36	0,11	0,08	0,07	0,08
509	0,31	0,36	0,10	0,08	0,07	0,08
529	0,32	0,36	0,10	0,07	0,07	0,08
549	0,32	0,36	0,10	0,07	0,07	0,07
569	0,33	0,35	0,10	0,07	0,07	0,08
589	0,34	0,34	0,10	0,07	0,07	0,08
613	0,33	0,34	0,10	0,08	0,07	0,08
633	0,33	0,34	0,10	0,08	0,08	0,08
653	0,34	0,34	0,09	0,08	0,07	0,08
673	0,34	0,34	0,09	0,08	0,07	0,07
713	0,35	0,34	0,10	0,08	0,07	0,07
713	0,35	0,34	0,10	0,08	0,07	0,07
733	0,35	0,33	0,09	0,08	0,07	0,07
753	0,35	0,33	0,09	0,08	0,07	0,07
773	0,36	0,33	0,09	0,08	0,07	0,07
803	0,35	0,33	0,09	0,08	0,07	0,07
823	0,36	0,33	0,09	0,09	0,07	0,07
	0,36	0,33	0,09	0,09	0,07	0,07

Formel in
M5:=I5
N5:=C5/$I5
N6:=SUMME(C$5:C6)/SUMME($I$5:$I6)



Material 2

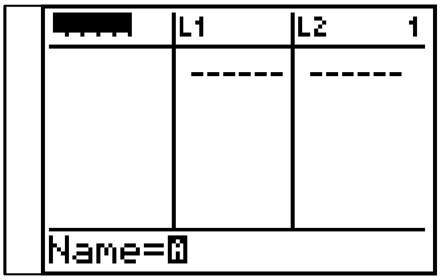
<u>Arbeitsblatt: Verschiedene Spielwürfel</u>

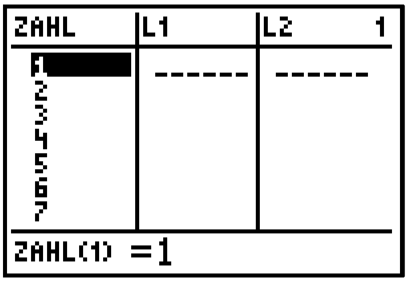
Du kannst dir Spielwürfel aus verschiedenen Materialien herstellen, z.B. einer Filmdose, einem Kronkorken oder verschiedenen Spielsteinen. Beschrifte die einzelnen Seiten nach eigener Wahl.

1. Wähle einen dieser Würfel aus und überlege dir eine Prognose für das Auftreten der einzelnen Augenzahlen.

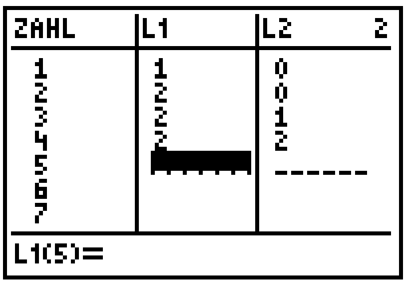
2. Beschreibe, wie du deine Vermutung überprüfen kannst.

3. Auf die folgende Weise kannst du die Auswertung mit dem graphikfähigen Taschenrechner durchführen.
   Erzeuge zunächst eine zusätzliche Liste auf folgende Weise: Im STAT-Menü wählst du Edit und gehst mithilfe des Cursors in die Kopfzeile der Liste L1. Mit dem Befehl INS erzeugst du eine neue Liste, der du anschließend einen Namen geben kannst. Trage in die erste Liste die Nummern der einzelnen Versuchsdurchführungen von 1 bis zur gewählten Anzahl der Versuche ein.

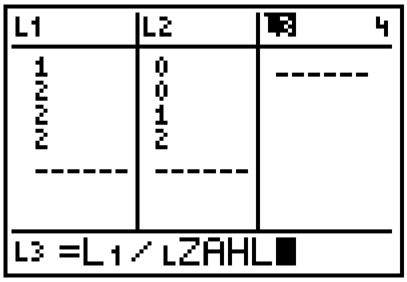




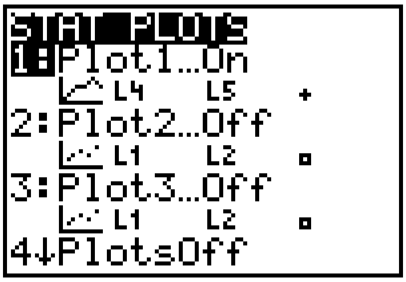
Für das Notieren der Wurfergebnisse sind die weiteren Listen ab L1 vorgesehen:
In den Listen wird für jedes mögliche Ergebnis notiert, wie oft dieses nach einer bestimmten Anzahl von Versuchsdurchführungen aufgetreten ist.
Im Fenster siehst du ein Beispiel, bei dem im ersten Wurf eine Eins erschien, im zweiten eine Eins, im dritten und vierten Wurf eine Zwei. Jede Ziffer erschien in vier Würfen zweimal.

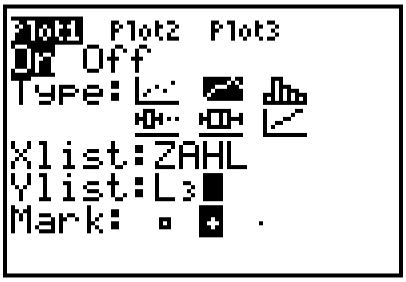


Zum Berechnen der relativen Häufigkeiten z. B. in L3 wird der Quotient aus den Listen L1 und Zahl gebildet. Die Liste Zahl muss dabei mithilfe des LIST-Menüs eingegeben werden.

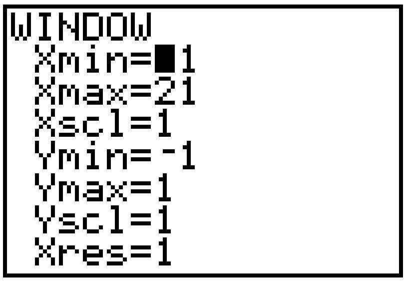


Zur grafischen Darstellung der relativen Häufigkeiten in Abhängigkeit von der Anzahl der Würfe gibt man den Befehl STATPLOT ein und legt einen Plot fest, z. B. Plot 1. Nach Eingabe von ENTER gelangt man zum zweiten Fenster. Hier kannst du die Art des Diagramms eingeben und festlegen, welche Liste auf welcher Achse abgetragen wird.



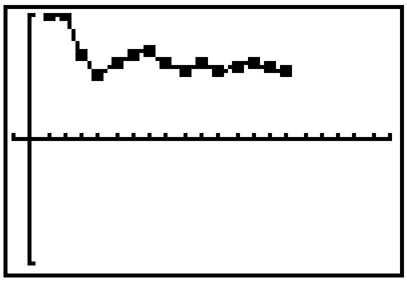


Vor dem Zeichnen des Graphen musst du geeignete Werte für das WINDOW, in dem er gezeichnet werden soll, eingeben.

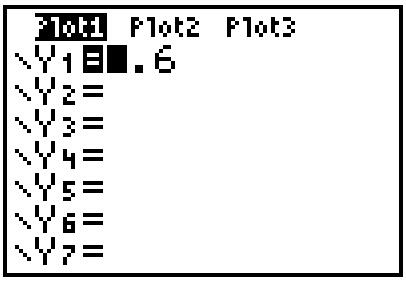


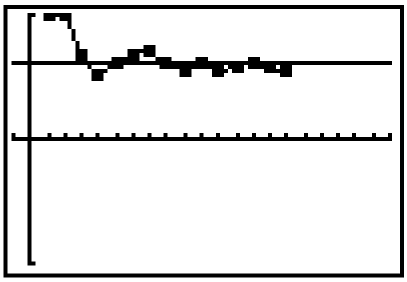
kleinster Wert auf der x-Achse
größter Wert auf der x-Achse
Achseneinteilung auf der x-Achse
kleinster Wert auf der y-Achse
größter Wert auf der y-Achse
Einteilung auf der y-Achse
Auflösung

Anschließend kannst du den Graphen mit dem Befehl GRAPH zeichnen lassen:
Entsprechend kannst du die relativen Häufigkeiten der anderen Augenzahlen darstellen. Du kannst auch nachträglich noch die Versuchsanzahl erhöhen, um genauere Aussagen über die Wahrscheinlichkeit treffen zu können.



Hast du einen Wert für die relative Häufigkeit geschätzt, kannst du ihn mit dem Befehl Y= eingeben. Mit dem Befehl GRAPH wird dann anschließend die entsprechende Linie eingezeichnet.





Material 3

Da Aufgaben zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bei Nicht-Laplace-Experimenten in den Schulbüchern nur in kleiner Anzahl vertreten sind, folgen hier zwei Beispiele:

1. Eine Umfrage unter 38000 Bundesbürgern zur Benutzung des Verkehrsmittels für die Ferienreise hat ergeben, dass 58% den PKW benutzen, 10% einen Bus, 19% das Flugzeug, 1% hat keine Angaben gemacht, der Rest hat die Bahn genommen. Du triffst einen Bekannten, der gerade im Urlaub war. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
   a. mit dem PKW unterwegs war
   b. nicht mit dem Flugzeug unterwegs war
   c. mit der Bahn gefahren ist

2. Die Wahrscheinlichkeit für den Defekt einer Festplatte eines Computers ist durch die nebenstehende Tabelle angegeben. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Festplatte
   a. 2 bis 4 Jahre funktioniert
   b. bis zu 5 Jahren funktioniert
   c. 1 bis 3 Jahre funktioniert
   d. länger als 4 Jahre funktioniert

Defekt im Betriebsjahr	Wahrscheinlichkeit
1	0,02
2	0,05
3	0,12
4	0,37
5	0,31
6 oder später	0,13

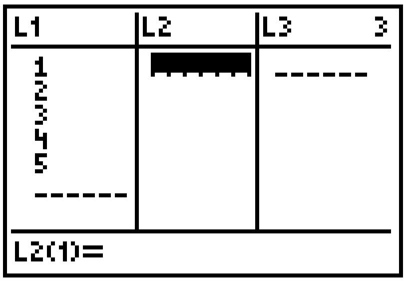
(aus [Lit. 4], S. 263)

Material 4

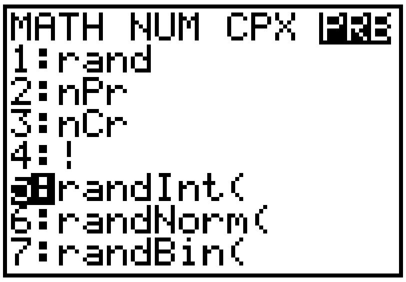
Arbeitsblatt: Simulation des Geburtstagsproblems mithilfe von Zufallszahlen

Zur Erzeugung von Zufallszahlen mit dem graphikfähigen Taschenrechner zur Simulation des Geburtstagsproblems für Monate musst du folgende Arbeitsschritte durchführen:

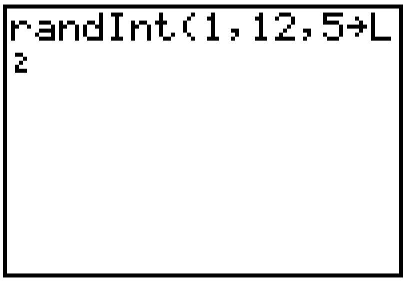
In Liste L1 gibst du so viele Zahlen ein, wie Testpersonen vorhanden sind.
Bevor du weitere Arbeitsschritte vornimmst, solltest du den Bildschirm des Taschenrechners auf die Grundeinstellung bringen, in dem du den QUIT Befehl benutzt. Diesen Zwischenschritt solltest du dir angewöhnen, wenn du mit dem STAT-Menü arbeitest.

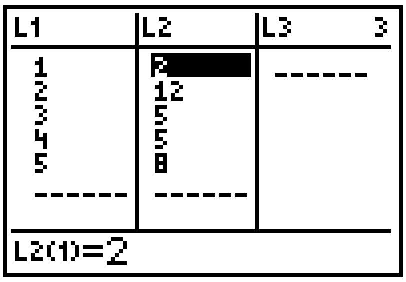


Zur Erzeugung der Zufallszahlen und deren Darstellung in Liste L2 musst du unter dem Befehl MATH PRB aufrufen. Die Zufallszahlen sind dann unter 5: randInt zu finden und mit ENTER zu bestätigen.

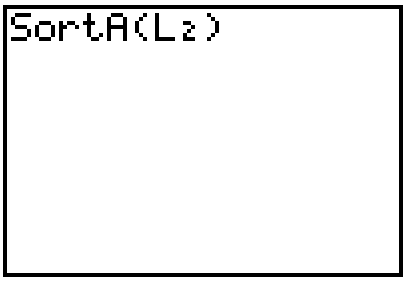


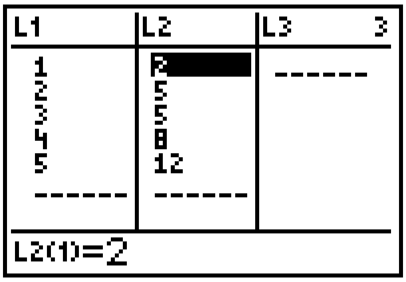
Die im Bild angegebene Eingabe bewirkt, dass die Zufallszahlen zwischen 1 und 12 liegen, 55 Zufallszahlen bestimmt und in Liste L2 angezeigt werden.





Zur Sortierung der Zufallszahlen nach ihrer Größe ist im STAT-Menü Befehl 2: SortA(auszuwählen und dann die Liste L2 zu benennen.





Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass mehrere Personen im gleichen Monat geboren sind, muss dieses Verfahren geeignet oft wiederholt werden, um eine gesicherte Aussage machen zu können.

2.4.5 Literatur

[1] Bezirksregierung Köln Düsseldorf: Einführung in die Stochastik, Jahrgangsstufe 7-8, Handreichungen zur Umsetzung des neuen Lehrplans Mathematik für die Sekundarstufe I. 1994.

[2] Herget, W., Lehrmann, E. (Hrsg.): Stochastik mit dem TI-92. Schroedel Verlag, Hannover 2001.

[3] Cukrowicz, J., Zimmermann, B. (Hrsg): MatheNetz 7 Ausgabe N. Westermann Verlag, Braunschweig 2000.

[4] Griesel, H., Postel, H. (Hrsg): Elemente der Mathematik 7 Niedersachsen. Schroedel Verlag, Hannover 1999.

2.4.6 Kontakt

Alke Bödeker	*alke.boedeker@gmx.de*
Jürgen Diers	*j.diers@t-online.de*
Ulrike Sandgaard	*Ulrike.Sandgaard@gmx.de*
Friedrich Suhr	*Friedrich-Suhr@t-online.de*

2.5 „Spielend in die Stochastik“

<table>
<tr><td colspan="2">Anhand zweier zentraler Aspekte wird in den Baustein Daten und Prognosen eingeführt. Im ersten Teil geht es um eine Datenerhebung mit anschließender Analyse. Zentrale zu erarbeitende Begriffe sind die Lage- und Streuungsmaße arithmetisches Mittel, Median und Quartile. Gleichzeitig sollen die Schülerinnen und Schüler verschiedene Formen der Darstellung eines Datensatzes kennen lernen. In dieser Einheit werden Tabellen, Streifendiagramme und Boxplots thematisiert. Der zweite Teil der Unterrichtseinheit beschäftigt sich am Beispiel des Drei-Türen-Problems im Wesentlichen mit der Einführung in den Wahrscheinlichkeitsbegriff. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit wird dabei über relative Häufigkeiten gewonnen.
Beide Teile können gekoppelt oder alternativ verwendet werden.
Schließlich soll nicht unerwähnt bleiben, dass sich beide Teile zur Einführung in die Datendarstellung mit dem TI-83 eignen.</td></tr>
<tr><td>Besondere Materialien/Technologie:
innerhalb der Einheit kann ohne den Einsatz eines GTR oder Excel gearbeitet werden, allerdings bietet sich das Arbeiten mit neuen Technologien an</td><td>Dauer der Unterrichtseinheit:
8 Unterrichtsstunden für die Datenanalyse (Wer wird Millionär?); 8 Unterrichtsstunden für Zufallsexperimente (Drei-Türen-Problem)</td></tr>
</table>

Gliederung

2.5.1 „Wer wird Millionär?“ - Datenerhebung

Aufgabenstellung 1

(RRL: „Datengewinnung durch Befragung“)

⇨ siehe Arbeitsblatt 1

Wettstreit innerhalb einer Klasse anhand eines modifizierten Spiels „Wer wird Millionär?“

Die Klasse wird in drei Gruppen eingeteilt. Jede Schülerin/jeder Schüler beantwortet 10 Fragen, zu denen jeweils vier Antwortmöglichkeiten vorgegeben sind.

Aufgabenstellung 2

⇨ siehe Arbeitsblatt 2, Arbeitsblatt 3 zu Box-Plots

Es soll herausgefunden und begründet werden, welche Gruppe am besten abgeschnitten hat.
Mögliche Kriterien zur Feststellung der „besten“ Gruppe:

- Aufsummierung aller Einzelergebnisse innerhalb einer Gruppe
- bester Maximalwert
- bester Minimalwert
- Homogenität der Ergebnisse
- paarweises Streichen des jeweils besten und schlechtesten Wertes so lange, bis nur noch ein Wert/zwei Werte übrig bleibt/bleiben

Weitere Möglichkeiten bestehen in der Gewichtung der Fragen oder der Menge der richtig beantworteten Fragen.
Alternativ kann der Wettstreit auch innerhalb einer Jahrgangsstufe durchgeführt werden. Es stehen dann mehr Daten zur Verfügung.

Auswertung

(RRL: „Daten darstellen und auswerten“)

Die ausgefüllten Fragebögen werden gruppenweise ausgewertet. Dabei wird notiert, wie viele Fragen jede Schülerin/jeder Schüler korrekt beantwortet hat. Die absolute Häufigkeit der richtigen Antworten wird in einer Tabelle für jede Gruppe festgehalten.

Darstellungsform: Streifendiagramm

Mit Hilfe verschiedener Lagemaße (Arbeitsblatt 3) kann man sich einen Überblick über das Datenmaterial verschaffen:

- arithmetisches Mittel
- Median
- Quartile
- Minimal- und Maximalwert

2.5.2 „Wer wird Millionär?“ - Arbeitsblätter und Materialien

Arbeitsblatt 1

Fragebogen:

1. Wenn man jemanden einen Tipp gibt, ist das ein Wink mit dem...	a) Lattenzaun	
	b) Wurfspeer	
	c) Holzpfahl	
	d) Zaunpfahl	
2. Wer tritt in Grimms Märchen zusammen mit Schneeweißchen auf?	a) Veilchenblau	
	b) Rosenrot	
	c) Grasgrün	
	d) Blütengelb	
3. Das Kürzel EDV steht für?	a) Einer darf verlieren	
	b) Elektronische Datenverarbeitung	
	c) Erster Deutscher Violinenverein	
	d) Elektronische Datenvernetzung	
4. An welchem Fluss liegt Heidelberg?	a) Rhein	
	b) Main	
	c) Mosel	
	d) Neckar	
5. Wie viel Byte hat ein Kilobyte?	a) 100	
	b) 1000	
	c) 1024	
	d) 10	
6. Welches Metall ist nicht magnetisch?	a) Kupfer	
	b) Kobalt	
	c) Eisen	
	d) Nickel	
7. Dem einen sein Uhl, ist dem anderen sein...	a) Eichhörnchen	
	b) Wellensittich	
	c) Hamster	
	d) Nachtigall	
8. Wer spielte die weibliche Hauptrolle in dem Film „Pretty Woman“?	a) Britney Spears	
	b) Julia Roberts	
	c) Mia Farrow	
	d) Verona Feldbusch	
9. Wie heißt der höchste Berg Afrikas?	a) Kilimandscharo	
	b) Mont Blanc	
	c) Fujijama	
	d) Mount Everest	
10. Wie heißt die chemische Formel von Wasser?	a) HCl	
	b) H_2O_2	
	c) H_2O	
	d) HO_2	

Arbeitsblatt 2

Aufgabe

Tragt die Gruppenergebnisse in die folgende Tabelle ein.

Gruppe 1	Anzahl der richtigen Lösungen	Gruppe 2	Anzahl der richtigen Lösungen	Gruppe 3	Anzahl der richtigen Lösungen
S 1		S 1		S 1	
S 2		S 2		S 2	
S 3		S 3		S 3	
S 4		S 4		S 4	
S 5		S 5		S 5	
S 6		S 6		S 6	
S 7		S 7		S 7	
S 8		S 8		S 8	
S 9		S 9		S 9	
S 10		S 10		S 10	
S 11		S 11		S 11	
S 12		S 12		S 12	
S 13		S 13		S 13	
S 14		S 14		S 14	

1. Überlege dir mit Hilfe unterschiedlicher, eventuell auch graphischer Ansätze, welche Gruppe am besten abgeschnitten hat.
2. Nenne Vor- und Nachteile deiner Ansätze.
3. Für welches Verfahren würdest du dich entscheiden? Begründe!

Arbeitsblatt 3

Anzahl der richtigen Lösungen:

Gruppe/Schüler:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												

Gruppe 1:

Gruppe 2:

Gruppe 3:

Anzahl: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

<u>Arbeitsanweisungen:</u>

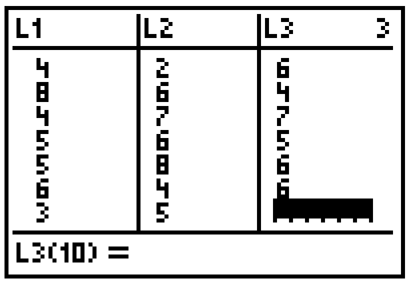
1. Übertrage die Tabelle in eine Strichliste.
2. Markiere jeweils den Minimal- und den Maximalwert mit einem roten Strich.
3. Streiche von außen jeweils links und rechts einen Strich, bis nur noch einer oder zwei übrig bleiben. Markiere die Stelle, an der du jetzt bist, mit einem blauen Strich. Diese Markierung nennt man Median.
4. Zähle vom Median nach links und rechts Striche ab, bis du insgesamt die Hälfte der Striche abgezählt hast. Markiere links und rechts die Stellen, wo du dich jetzt befindest.
   Diese beiden Markierungen nennt man Quartile.
5. Schraffiere den Bereich zwischen den Quartilen in grüner Farbe und zeichne von den Quartilen zum Minimal- und Maximalwert eine waagerechte Verbindung.
6. Die Figuren, die jetzt entstanden sind, nennt man Boxplots. Wieso sind sie bei der Bewertung der Gruppen hilfreich?

Material 1: Lösungsvorschläge, bearbeitet mit dem TI-83

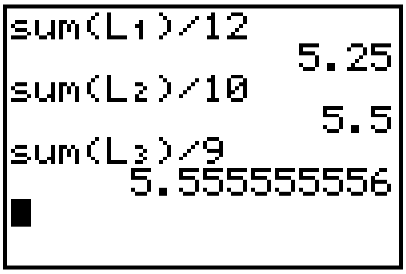
Wir nehmen einmal an, innerhalb einer Klasse haben die Schülerinnen und Schüler der einzelnen Gruppen wie folgt abgeschnitten:

Gruppe 1	Anzahl der richtigen Lösungen	Gruppe 2	Anzahl der richtigen Lösungen	Gruppe 3	Anzahl der richtigen Lösungen
S 1	6	S 1	7	S 1	7
S 2	9	S 2	4	S 2	4
S 3	3	S 3	6	S 3	5
S 4	4	S 4	2	S 4	6
S 5	8	S 5	6	S 5	4
S 6	4	S 6	7	S 6	7
S 7	5	S 7	6	S 7	5
S 8	5	S 8	8	S 8	6
S 9	6	S 9	4	S 9	6
S 10	3	S 10	5	S 10	
S 11	5	S 11		S 11	
S 12	5	S 12		S 12	
S 13		S 13		S 13	
S 14		S 14		S 14	

Die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler werden zunächst in Listen des TI-83 eingegeben. In L1 tauchen die Ergebnisse der 1. Gruppe auf, in L2 die der 2. Gruppe, in L3 die der 3. Gruppe.



Um auf den Durchschnittswert für jede Gruppe zu kommen, bietet sich die Aufsummierung der Einzelergebnisse an. Da jede Gruppe aus einer unterschiedlichen Anzahl von Schülerinnen und Schülern besteht, wird die Summe noch durch die Gruppenstärke geteilt.

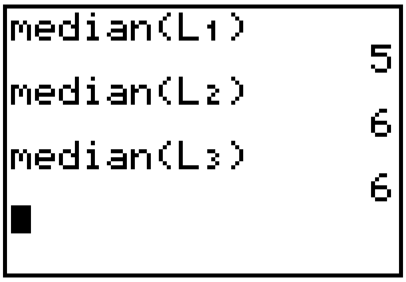


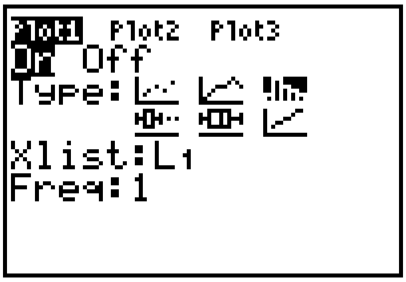
Das arithmetische Mittel ist bei allen drei Gruppen annähernd gleich. Um entscheiden zu können, welche Gruppe am besten abgeschnitten hat, sollten weitere Kriterien herangezogen werden.

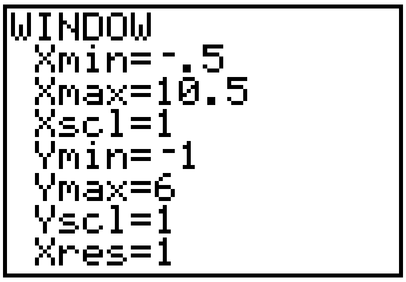
Eine Möglichkeit besteht in der Betrachtung der schlechtesten und besten Ergebnisse jeder einzelnen Gruppe.

1. Gr.: Minimum: 3, Maximum: 9
2. Gr.: Minimum: 2, Maximum: 8
3. Gr.: Minimum: 4, Maximum: 7

Das wiederholte Streichen der schlechtesten und besten Ergebnisse führt zum Median. Er kann mit Hilfe des TI-83 ermittelt werden.

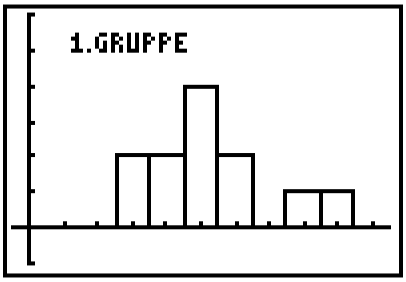






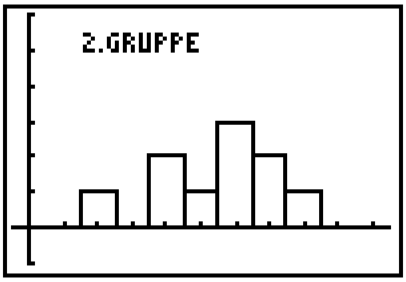
Um eine Aussage über die Homogenität zu machen, bietet sich eine Darstellung der Ergebnisse über ein Streifendiagramm an.

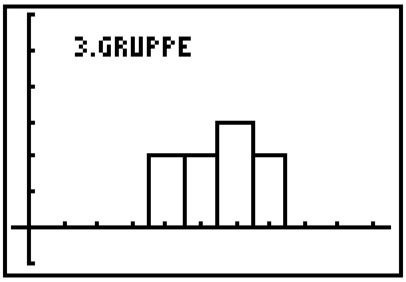
Auf der Rechtsachse ist die Anzahl der korrekten Antworten abgetragen, auf der Hochachse die absolute Häufigkeit, mit der die Anzahl der korrekten Antworten in jeder Gruppe auftaucht.



Wichtig ist, dass Xscl auf 1 gesetzt wird. Dadurch hat jeder Streifen eine Breite von 1. Ist

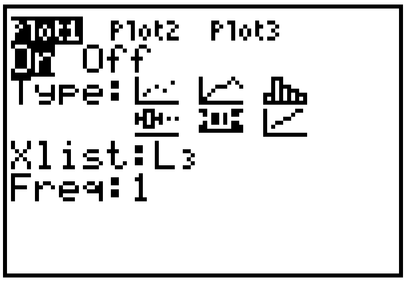
Xmin= -0.5, werden die Streifen bezogen auf die Rechtsachse passend gesetzt.





Es ist zu erkennen, dass die 3. Gruppe die größte Homogenität aufweist. Gleichzeitig weist die 3. Gruppe die geringste Spannweite auf.
Auf der anderen Seite gibt es in der ersten Gruppe 2 Schülerinnen/Schüler, die 8 bzw. 9 korrekte Antworten gegeben haben. Allerdings gibt es in derselben Gruppe zwei Schülerinnen/Schüler, mit nur 3 richtigen Antworten.
Ein Vergleich zwischen der ersten und zweiten Gruppe zeigt, dass aus Gruppe 2 zwar keine Schülerin/kein Schüler 9 und mehr richtige Antworten hervorgebracht hat, dafür gibt es in dieser Gruppe aber auch weiniger Ausfälle nach unten.

Insgesamt lässt sich zeigen, dass eine Darstellung mit Hilfe des Streifendiagramms sowie die Berechnung bestimmter Lagemaße zusätzliche Informationen und dadurch Kriterien für eine begründete Entscheidung zugunsten der einen oder anderen Gruppe liefern.



Auf der anderen Seite muss deutlich gesagt werden, dass es von der Wahl der Kriterien abhängt, welche Gruppe als Sieger gekürt wird. Insofern können verschiedene Jurys nach wie vor zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen. Ihre Entscheidungen können aber nachvollzogen werden.

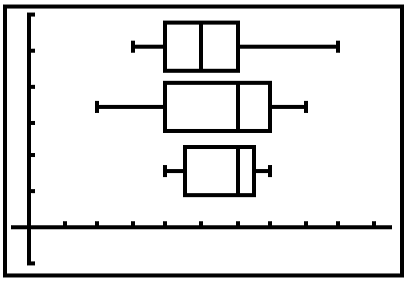
Die verschiedenen Lagemaße, sowie die Quartile als Streuungsmaß können zusätzlich mit Hilfe des sogenannten Box-Plots graphisch dargestellt werden.

Der Vorteil besteht zusätzlich darin, dass alle drei Box-Plots gemeinsam in einem Fenster dargestellt und dennoch voneinander unterschieden werden können.

Das ist bei den Streifendiagrammen mit einem TI-83 so nicht möglich.

Im STAT-Plot-Menü wird der Box-Plot definiert und aktiviert.

Die WINDOW-Einstellungen werden vorher übernommen.



Es ergeben sich folgende Box-Plots. Der obere Box-Plot gehört zur 1. Gruppe, der mittlere zur 2. Gruppe, der untere zur 3. Gruppe.

Bis auf das arithmetische Mittel können jetzt alle Lage- und Streumaße auf einen Blick betrachtet werden.

Auch hier zeigt sich, dass die 3. Gruppe in der Anzahl ihrer richtigen Antworten sehr homogen ist. Die zweite Gruppe zeigt trotz des gleichen Medians wie die 3. Gruppe eine größere Breite bei der mittleren Hälfte der Daten.

2.5.3 „Wechseln oder nicht?“ - Einführung in den Wahrscheinlichkeitsbegriff

Problemstellung

„Sie sind Teilnehmer an einer Spielshow und haben die Wahl zwischen drei Türen. Hinter einer Tür ist ein Auto, hinter den anderen Ziegen. Sie wählen eine Tür aus. Der Spielleiter öffnet nun eine der beiden anderen Türen, hinter der eine Ziege steht. Sie können nun erneut eine der beiden Türe wählen, um das Auto zu gewinnen.“

Mögliche Präsentationsformen:

- Rollenspiel, in dem der Lehrer den Moderator mimt. Etwa so: An die Tafel können drei DIN-A 4 Zettel mit den Buchstaben A, B und C geklebt werden, die die Türen darstellen. Eine Schülerin/ein Schüler, die Kandidatin/der Kandidat wird vor die Tür geschickt, während hinter die Zettel auf die Tafel zwei Ziegen und ein Auto gemalt werden. Die Schülerin/der Schüler kommt nun herein und das Spiel beginnt.
- Videoaufnahme aus der SAT1-Sendung „Geh aufs Ganze"
- Zeitungsartikel
- ...

Aufforderung zur Stellungnahme: „Wie würdet ihr euch entscheiden?"

Hypothesenbildung I

(RRL: „Formulieren einer Erwartungshaltung")

⇨ siehe Arbeitsblatt 1

Meinungen werden ausgetauscht, diskutiert, analysiert. Die Lehrkraft kann die Meinungen auf einer Handfolie festhalten und diese zusammenfassend am Ende der Diskussion auf dem Overheadprojektor präsentieren. Sie weist ggf. auf zwei sich widersprechende Hypothesen hin („kognitiver Konflikt").
Erneute Aufforderung zur Stellungnahme: „Wie würdet ihr euch entscheiden?"

Exploration

(RRL: „Durchführen von Zufallsexperimenten")
⇨ siehe Arbeitsblatt 1

Das „Ziegenproblem" wird in Gruppenarbeit weiter untersucht, die Schülerinnen und Schüler sind in der Auswahl der Methoden frei. Praktischerweise könnten sie das Spiel nachspielen, z. B. mittels Spielkarten (eine rote und zwei schwarze) oder mit drei Plastikbechern und einem Radiergummi. Zudem sollten sie verschiedene Gewinnstrategien verfolgen („jedes Mal wechseln", „jedes Mal nicht-wechseln", „mal so, mal so", ...) und die Entscheidungsmöglichkeiten des Moderators analysieren („mal kann er sich zwischen beiden nichtgewählten Türen entscheiden, mal kann er nur eine der zwei nichtgewählten Türen öffnen").
Für eine später erfolgende systematische Auswertung der Gruppenergebnisse ist es schon an dieser Stelle wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler zu jedem einzelnen Spiel ihre Entscheidung aufzeichnen („Ich wechsle jetzt" bzw. „Ich wechsle jetzt nicht").

Hypothesenbildung II

(RRL: „Kritische Überprüfung der Hypothese“)

⇨ siehe Arbeitsblätter 2 und 3

Die Ergebnisse der Gruppen werden präsentiert und miteinander verglichen:

- sind die gewählten Simulationsformen gleichwertig? Führen sie nur zufällig zu unterschiedlichen Ergebnissen?
- welche Fragestellung wurde jeweils eigentlich untersucht? (Gewinnhäufigkeit bei konstant verfolgter „Wechselstrategie“, keine Strategie, ...)
- bei unterschiedlich langen Versuchsreihen kann man absolute Gewinnhäufigkeiten nicht vergleichen, besser sind relative Häufigkeiten.

Hinweis: Die Arbeitsblätter 2 und 3 können auch mit dem TI-83/89/92 bearbeitet werden. Anfänger können zur Übung zunächst den Inhalt des Arbeitsblattes 2 in den Rechner übertragen und dann das Arbeitsblatt 3 selbstständig mit dem Rechner bearbeiten. Hinweise hierzu folgen im Anhang.

Exkurs 1: Letzte Gewissheit mittels einer Computersimulation

⇨ Siehe Arbeitsblatt 4

Eine lange Versuchsreihe dürfte mehr Klarheit über eine erfolgversprechende Gewinnstrategie bringen, aus praktischen Gründen mittels einer Blackbox-Computersimulation (TI-83, Excel, ...) mit Projektionsmöglichkeit.

Jede Schülerin/jeder Schüler wird je nach Meinung als „Wechsler“, „Nichtwechsler“, ... definiert. Das Programm gibt für eine wachsende Anzahl an Spieldurchführungen die relative Häufigkeit der Gewinne an. Es zeigt sich: Die „Wechsler“ gewinnen auf Dauer mehr!

Exkurs 2: Datenerhebung und -analyse beim Drei-Türen-Problem

Jede/jeder einzelne Schülerin/Schüler der Lerngruppe gibt zu unterschiedlichen Zeiten drei Antworten auf die Frage nach einer erfolgversprechenden Strategie, zum Beispiel

- „egal, welche Tür“
- „weiß nicht“
- „wechseln ist besser“
- ...

Erstellen eines Meinungsbildes in Form eines Histogramms, eines Kuchendiagramms, ... , Verfolgen des sich verändernden Meinungsbildes der Klasse, Vergleichen mit Meinungsbildern von Parallelklassen, Familien, Verwandten, ...

Lösung und Definition des Begriffs „Wahrscheinlichkeit“

⇨ siehe Materialblatt 5

Hat man sich für die Strategie „Wechseln“ entschieden, so ist auf lange Sicht die relative Gewinnhäufigkeit etwa 2/3. Die relative Gewinnhäufigkeit für die Strategie „Nichtwechseln“ ist auf lange Sicht etwa 1/3.

Die geschätzte relative Häufigkeit bezeichnen wir als „Wahrscheinlichkeit“ des betrachteten Ereignisses.

Zur Vertiefung bieten sich klassische Nicht-Laplace-Versuche an wie

- Werfen einer Reißzwecke, Werfen eines Legobausteins
- Augensumme beim Wurf zweier (dreier, vierer) Würfel
- Auszählen der relativen Häufigkeiten der einzelnen Buchstaben in einem beliebigen Text. „Warum zeigen die Finger beim Schreibmaschinenschreiben in der sogenannten Grundstellung auf die Buchstaben a, s, d, f, j, k, l, ö“?
- Zählen von vorbeifahrenden Automarken
- ...

Theorie

(vorbereitende Phase für den an anderen Problemstellungen noch zu konkretisierenden Aspekt der RRL: „Berechnen von Wahrscheinlichkeiten“)

⇨ siehe Material 2

Eventuell sind während der Gruppenarbeitsphase Beobachtungen gemacht worden, die Aussagen über die Struktur des Drei-Türen-Problems erlauben („der Moderator kann die Tür, die er öffnen will, nicht immer frei wählen“). Hiervon ausgehend kann eine theoretische Analyse des Problems erfolgen. In jedem Fall dürften die Schülerinnen und Schüler mittlerweile soviel Erfahrung mit dem Drei-Türen-Problem gemacht haben, dass sie ein Zitat aus einem Leserbrief diskutieren können.

2.5.4 „Wechseln oder nicht?“ - Arbeitsblätter und Materialien

Arbeitsblatt 1

Unsere Gruppe heißt :_____________________

Das „Drei-Türen-Problem“

> *„Sie sind Teilnehmer an einer Spielshow und haben die Wahl zwischen drei Türen. Hinter einer Tür ist ein Auto, hinter den anderen Ziegen. Sie wählen eine Tür aus. Der Spielleiter öffnet nun eine der beiden anderen Türen, hinter der eine Ziege steht. Sie können nun erneut eine der beiden Türen wählen, um das Auto zu gewinnen.“*

1. Diskutiere mit deinen Nachbarn: Wie würdest du dich entscheiden?

Meine Meinung ist:

2. Führe das Spiel mehrmals vereinfacht durch. Welche Beobachtungen machst du? Protokolliere deine Ergebnisse, notiere dabei insbesondere, wann du die Tür wechselst bzw. wann du bei deiner ursprünglichen Türwahl bleibst.

Meine Meinung ist jetzt:

3. Beschreibe die vereinfachten Durchführungen (Simulationen) der anderen Gruppen.

4. Beurteile die Simulationen der anderen Gruppen bezüglich der Genauigkeit, der Effektivität und der Zuverlässigkeit. (Vielleicht fallen dir ja noch mehr Kriterien ein.)

Arbeitsblatt 2, Teil 1

Der intelligente Rat einer Frau: „Sie sollten wechseln!“

„Die amerikanische Journalistin Marylin vos Savant gilt als der Mensch mit dem höchsten Intelligenzquotienten der Welt,“ wird 1991 in einem Zeitungsartikel berichtet. Und weil sie in einer Illustrierten dazu riet, bei einem Spiel wie dem Drei-Türen-Problem die zuerst gewählte Tür zu wechseln, bekam sie eine ganze Reihe an verärgerten Leserbriefen. Die Zeitung zitiert einige dieser Leserbriefe: „Es gibt schon genug mathematische Unwissenheit in diesem Land. Wir brauchen nicht den höchsten IQ der Welt, um diese Unwissenheit zu vertiefen. Schämen Sie sich!“ Ein anderer Leser schrieb: „Vielleicht haben Frauen eine andere Sicht mathematischer Probleme als Männer.“

1. In welchen Spielen deiner Gruppe hätte die Frau gewonnen, in welchen nicht?

Spiel Nr.													
gewechselt?													
vos Savant hätte gewonnen?													

2. Sammle die Ergebnisse aller Gruppen, die zur Strategie des oben genannten Zeitungsartikels passen. Diskutiere die Ergebnisse!

Name der Gruppe														
Anzahl der Gewinne														
Anzahl der Nieten														
Anzahl der Durchführungen														

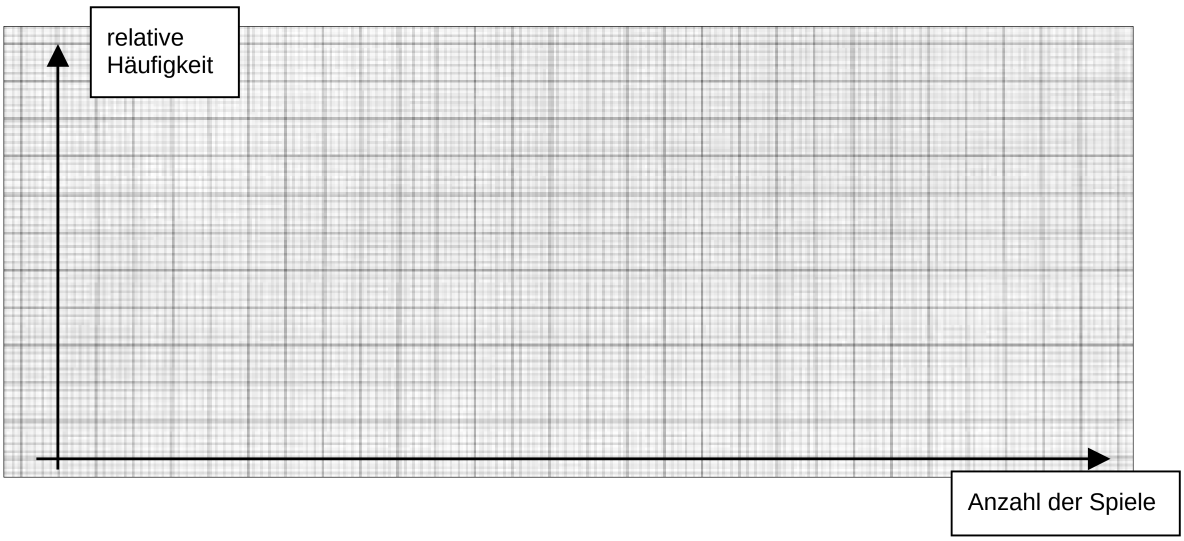
Arbeitsblatt 2, Teil 2

3. Addiere auf!

Anzahl der Gewinne														
Anzahl der Nieten														
Anzahl der Durchführungen														

4. Berechne die relativen Häufigkeiten der Gewinne und trage sie in ein Koordinatensystem ein!

relative Häufigkeit der Gewinne = Anzahl der Gewinne/Anzahl aller Spiele														

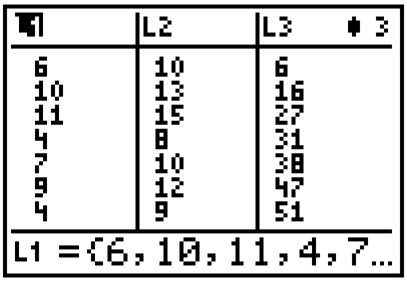


Ich finde, dass Marylin vos Savants Position richtig/nicht richtig ist, denn...

Arbeitsblatt 2, Teil 3: Hinweise zur Bearbeitung mit dem TI-83, Beispiel

Name der Gruppe	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Anzahl der Gewinne	6	10	11	4	7	9	4	11	6	6	9	5	10	6	9
Anzahl der Nieten	4	3	4	4	3	3	5	3	2	5	3	4	5	4	4
Anzahl der Durch-führungen	10	13	15	8	10	12	9	14	8	11	12	9	15	10	13

<u>Übertrag der Tabelle in den Listen-Editor des TI-83</u>



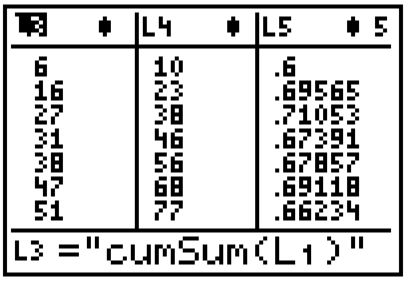
L1 Anzahl der Gewinne

L2 Anzahl der Durchführungen

L3 =cumSum(L1)
(die kumulierende Summe über die Einträge von L1)

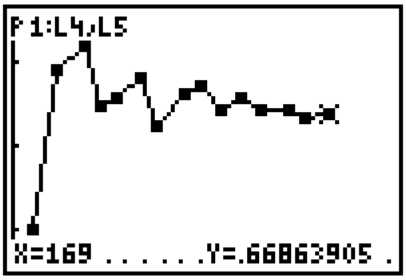
L4 =cumSum(L2)

L5 =L3/L4

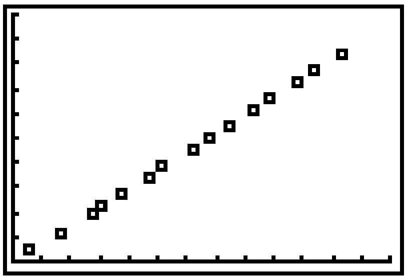


<u>Graphische Darstellung der Häufigkeiten</u>

absolute Häufigkeit
StatPlot:
xList: L4
yList: L3



relative Häufigkeit
StatPlot:
xList: L4
yList: L5

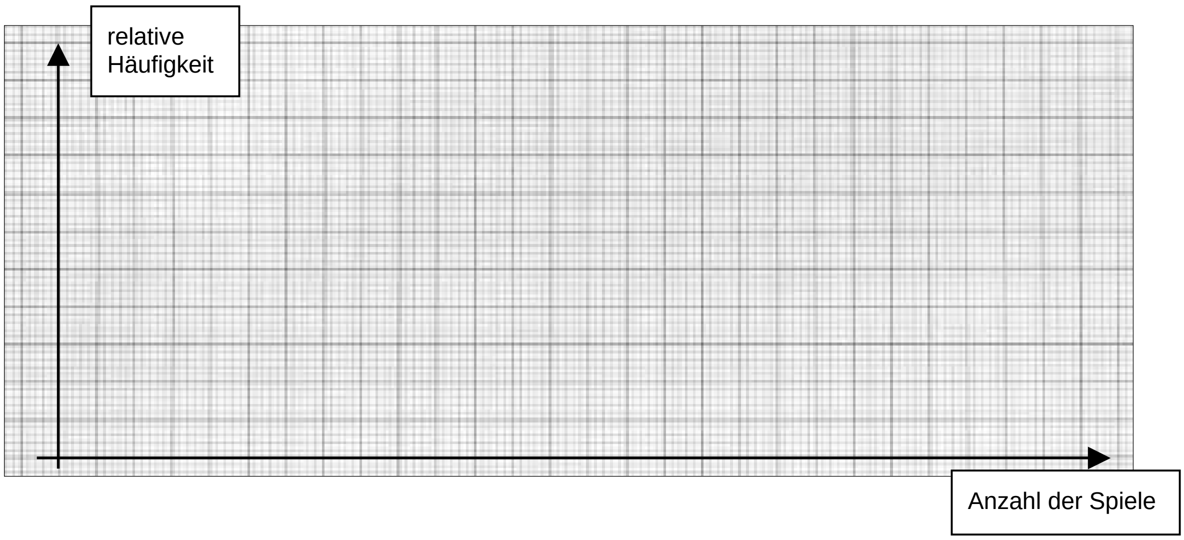


Arbeitsblatt 3

„Es ist egal ob man wechselt oder nicht, deshalb kann man genauso gut immer nichtwechseln!“

1. Wie sähen die Gruppenergebnisse aus, wenn du die Strategie des Nichtwechselns konsequent verfolgt hättest?

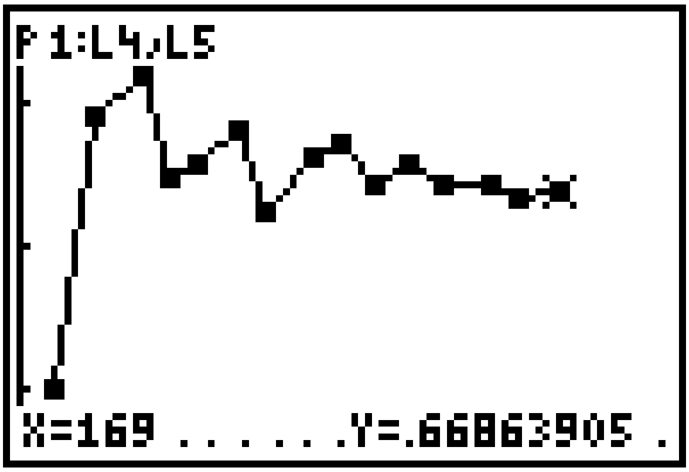
Name der Gruppe														
Anzahl der Gewinne														
Anzahl der Nieten														
Anzahl der Durchführungen														



2. Führe für diesen Fall die Arbeitsschritte entsprechend des Arbeitsblattes 2 durch.

relative Häufigkeit der Gewinne = Anzahl der Gewinne/Anzahl aller Spiele														

Arbeitsblatt 4



1. Stelle eine Vermutung darüber an, wie sich die relative Häufigkeit auf lange Sicht entwickelt.
2. Ergänze:

Es lässt sich feststellen, dass die _________________ eines Ereignisses nach einer _________ Anzahl von Versuchen ungefähr gleich einem festen

Dies nennt man das empirische Gesetz der großen Zahlen. Hieraus wollen wir ableiten, was wir in Zukunft unter „Wahrscheinlichkeit“ verstehen wollen:

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses gibt an, welche relative Häufigkeit man bei häufiger Versuchsdurchführung für dieses Ergebnis erwarten kann. Sie ist der Wert, um den die relativen Häufigkeiten schwanken. Daher lassen sich Wahrscheinlichkeiten erst nach vielen Versuchsdurchführungen einigermaßen genau bestimmen.

3. Überlege Beispiele, in denen du die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, ohne eine Versuchsreihe durchzuführen, angeben kannst. Erläutere deine Überlegungen.

Arbeitsblatt 5

Jemand hat behauptet, man könnte die Lösung des Ziegenproblems auch so erklären.

„Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wagen hinter der erstgewählten Tür ist, beträgt 1/3. *Die Wahrscheinlichkeit, dass er hinter einer der anderen beiden Türen ist, beträgt somit 2/3.* *Wenn ich nun erfahre, hinter welcher der beiden anderen Türen er nicht ist, weiß ich sofort die Tür, hinter der er mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 ist.“*

Nimm Stellung! Überlege dir noch andere sinnvolle Erklärungen!

2.5.5 Literatur

[1] Böhm, J. u. a.: T^3 Europe, Stochastik. Texas Instruments.
[2] Herget, W., Lehmann, B.: Stochastik. Schroedel Verlag, Hannover 2001.
[3] von Randow, G.: Das Ziegenproblem. Denken in Wahrscheinlichkeiten. Rowohlt Verlag, Hamburg 1998.
[4] Wollring, B.: Schülerversuche zur Wahrscheinlichkeit/Simulationen zum Drei-Türen-Problem - erste Evaluation. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1992, S. 513-516.

2.5.6 Kontakt

Clemens Diemer	*C.Diemer@gmx.de*
Guido Pinkernell	*guido.pinkernell@gmx.de*
Stefan Schlie	*stefanschlie@gmx.de*
Reinhard Zimmer	*Reinhard.Zimmer@t-online.de*

2.6 Dosenwerfen

Intentionen

Im Mittelpunkt der ersten sieben Stunden steht ein für die Schülerinnen und Schüler komplexes Spiel, das aus drei nichtgleichwahrscheinlichen Ereignissen besteht, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung ohne experimentelle Durchführung nicht zuverlässig eingeschätzt werden kann. Durch die Komplexität des Spiels werden die Schülerinnen und Schüler schrittweise an stochastische Denkweisen herangeführt. Zudem ermöglicht die ausführliche Behandlung des Spiels auf unterschiedlichen Erkenntnisstufen die Einführung der in den Rahmenrichtlinien geforderten Begriffe und Methoden. Je nach Schwerpunktsetzung kann ein graphikfähiger Taschenrechner oder Excel eingesetzt werden.

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler sollen eine stochastische Problemstellung modellieren und mathematisieren und grundlegende Begriffe und Verfahrensweisen erklären und anwenden können.

Lernvoraussetzungen

Einführung in die Prozentrechnung

Beschreibung der Unterrichtseinheit

Der *Einstieg* in die Unterrichtseinheit erfolgt über ein Zufallsexperiment „**Gewinnspiel für unser Schulfest**"(siehe Arbeitsblatt 1). Die Schülerinnen und Schüler sollen sich für dieses Gewinnspiel eine Gewinnausschüttung überlegen, welche vorgegebene Kriterien berücksichtigt. Da für die Schülerinnen und Schüler auf Grund der drei nicht gleichwahrscheinlichen Ereignisse und der vorgegebenen Kriterien die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht vorhersagbar ist, müssen sie zur zuverlässigen Vorhersage das **Spiel real durchführen**. Die **Versuchsergebnisse** werden auf einem Arbeitsblatt **gesammelt und ausgewertet**.

In der *nächsten Stunde* können die Schüler mithilfe der ausgewerteten Versuchsergebnisse eine erste **Bewertung ihrer Vorhersage** vornehmen. Sie kommen zu dem Schluss, dass zu einer zuverlässigen Vorhersage **zusätzliche Versuchsergebnisse notwendig** sind. Da die reale Durchführung des Spiels sehr aufwendig ist, muss eine Simulation entwickelt werden. Folgende **Kartensimulation** bietet sich an: Vier Schülerinnen und Schüler bilden jeweils eine Gruppe. Drei Schülerinnen und Schüler erhalten jeweils vier Karten, die mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 versehen sind. Sie decken gleichzeitig jeweils eine beliebige der vier Karten auf. Die/der vierte Schülerin/Schüler notiert die drei aufgedeckten Nummern.

In der *dritten Stunde* soll diese entwickelte **Simulation** bis zu 40 mal je Gruppe **durchgeführt** wer-

den, so dass zur **Bewertung der Vorhersage** nun ca. 240 Versuchsergebnisse zur Verfügung stehen. Die Versuchsergebnisse werden erneut gesammelt und dargestellt. Als Voraussetzung für den Vergleich der einzelnen Ergebnisse muss nun der Begriff der **relativen Häufigkeit eingeführt** werden. Durch schrittweises graphisches Zusammenfügen der Gruppenergebnisse wird eine **Stabilisierung der relativen Häufigkeit** sichtbar. In der *vierten Stunde* kann die Prognose nun erneut beurteilt und verbessert werden. Die Diskussion der zusammengefassten Ergebnisse erfordert wiederum eine **Erhöhung der Versuchsanzahl** und führt somit zur **Computer- bzw. Taschenrechnersimulation**. Aus der graphischen Darstellung der Simulation entwickeln die Schülerinnen und Schüler nun das **empirische Gesetz der großen Zahlen**. In der *fünften Stunde* wird der **Wahrscheinlichkeitsbegriff** eingeführt. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler durch **systematisches Auszählen aller Versuchsergebnisse** mithilfe eines Arbeitsblattes und durch Darstellung der absoluten und relativen Häufigkeiten die **gefundene Wahrscheinlichkeitsverteilung erläutern**. In der *sechsten Stunde* soll nun unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse eine **Gewinnausschüttung festgelegt** werden. Durch **Reflexion der Versuchsbedingungen** wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff vertieft. In der *siebten Stunde* sollen durch Modulation des Spiels und durch anschließende Darstellung und Diskussion der Versuchsergebnisse die **eingeführten Begriffe und Methoden angewendet werden.** In den *Stunden acht bis dreizehn* sollen anhand von klassischen Zufallsexperimenten die Begriffe **Mittelwert** und **Zentralwert** eingeführt werden und **Übungen** und **Vertiefungen** stattfinden.

Besondere Materialien/Technologie:	**Dauer der Unterrichtseinheit:**
Für eine umfassende Simulation ist der Einsatz eines • grafikfähigen Taschenrechners • einer Tabellenkalkulation • ggf. eines Computer-Algebra-Systems notwendig	ca. 16 Unterrichtsstunden (mit Klassenarbeit)

Gliederung

2.6.1 *Übersicht über die Stundeninhalte*

Stunde	Inhalte	Medien
1	• Vorstellung des Spiels • Prognose der Gewinnverteilung • reale Durchführung • Darstellung der Versuchsergebnisse auf dem Arbeitsblatt	Abl 1 Folie 1
2	• Diskussion der Ergebnisse • Verbesserung der Prognose mit Hilfe der Versuchsergebnisse • Entwicklung einer Simulation	
3	• Durchführung der Simulation in Gruppen • Darstellung der einzelnen Versuchsergebnisse • Zusammenfassung der Ergebnisse • Einführung der relativen Häufigkeiten als Voraussetzung für den Vergleich der einzelnen Ergebnisse • Darstellung und Diskussion der zusammengefassten Ergebnisse	Abl 2 Folie 2
4	• Verbesserung der Prognose mit Hilfe der Versuchsergebnisse • Computersimulation mit einer Tabellenkalkulation bzw. Simulation mit Hilfe eines grafikfähigen Taschenrechners • Entwicklung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen aus der grafischen Darstellung der Simulation	PC/TC
5	• Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs • systematische Betrachtung aller möglichen Versuchsergebnisse durch Auszählen • Darstellung der absoluten und relativen Häufigkeiten • Vergleich der relativen Häufigkeiten mit dem Ergebnis der Simulation	Abl 3
6	• Festlegung der Gewinnausschüttung unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse • Vertiefung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs durch Reflexion der Versuchsbedingungen	
7	• Modulation des Spiels (z.B. Veränderung der Anzahl der Dosen bzw. der Anzahl der Spieler) • Sammlung und Sicherung der Ergebnisse	
8-13	Klassische Zufallsexperimente unter Berücksichtigung der Lagemaße	
14-16	Vorbereitung, Durchführung und Rückgabe einer Klassenarbeit	

2.6.2 Erläuterungen zu den Stundeninhalten

Stunde	Erläuterungen
1	• Die Aufgabenstellung zum Gewinnspiel erfordert eine Diskussion darüber, dass für den für die Klasse ungünstigsten Fall eine Gewinnausschüttung überlegt werden muss. Es wird folglich davon ausgegangen, dass immer alle treffen. • Die Aufgabenstellung sorgt dafür, dass aus dem mehrstufigen Zufallsexperiment ein einstufiges Zufallsexperiment wird.
3	• Da davon ausgegangen wird, dass nicht alle Schülergruppen 40 Versuche durchführen, muss zum Vergleich der Gruppenergebnisse der Begriff der relativen Häufigkeit eingeführt werden. • Die Gruppenergebnisse sollen durch schrittweises Zusammenfügen der Gruppenergebnisse graphisch dargestellt werden (z. B. Säulendiagramm). Dadurch wird die Stabilisierung der relativen Häufigkeit mit zunehmender Versuchsanzahl sichtbar.
6	• An dieser Stelle sollen die Schülerinnen und Schüler formulieren, dass die Überlegungen nur relevant sind, wenn während des Schulfestes die Anzahl der durchgeführten Spiele hinreichend groß ist. Zudem soll berücksichtigt werden, dass in der 1. Stunde vom ungünstigsten Fall - jeder Wurf ist ein Treffer - ausgegangen wurde.

2.6.3 Vorschläge zur Formulierung der geforderten Begriffe und Sätze

- absolute Häufigkeit: ausgezählte Anzahl des Eintreffens eines Ereignisses

- relative Häufigkeit: $\dfrac{\text{ausgezählte Anzahl des Eintreffens eines Ereignisses}}{\text{Anzahl aller Ereignisse}}$

- empirische Gesetz der großen Zahlen:

  Je mehr Versuchsergebnisse betrachtet werden, desto geringer sind die Schwankungen der relativen Häufigkeit eines Ereignisses.

- Wahrscheinlichkeit:

  Die Wahrscheinlichkeit ist eine Zahl zwischen Null und Eins, deren Wert (bzw. Betrag) angibt, welche Erwartung für den Eintritt eines Ereignisses besteht.

2.6.4 Materialien

Arbeitsblatt 1

Gewinnspiel für unser Schulfest

Auf einem Schulfest soll jede Klasse ein Spiel anbieten. Dazu hat sich die Klasse ... folgendes Spiel überlegt:
Es melden sich drei Spieler und setzen jeder 0,5 € ein. Vor jedem Spieler sind jeweils 4 nummerierte Dosen (Nr.1, Nr.2, Nr.3, Nr.4) in *zufälliger* Reihenfolge aufgebaut.
Jeder Spieler wirft *einmal* auf eine der vor ihm stehenden 4 Dosen[1].

Gewinne

- Fallen 3 Dosen mit verschiedenen Nummern um, so erhalten die Spieler den Hauptgewinn.
- Fallen 2 Dosen mit verschiedenen Nummern um, so erhalten die Spieler ebenfalls einen Gewinn.
- Fallen 3 Dosen mit den gleichen Nummern um, so gibt es keinen Gewinn.

Aufgabe
Überlege dir eine Gewinnausschüttung, die sicher stellt, dass am Ende des Schulfestes Geld für die Klassenkasse übrig bleibt!

Tabelle für 20 Durchführungen des Spiels

				Anzahl getroffener Dosen gleicher Nummer		
	1.Werfer	**2.Werfer**	**3.Werfer**	**1**	**2**	**3**
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
10.						
11.						
12.						
13.						
14.						
15.						
16.						
17.						
18.						
19.						
20.						
Summe der Ergebnisse →						

[1] Eine modifizierte Variante kann mit drei Glücksrädern durchgeführt werden, die jeweils 4 gleich große, mit den Zahlen 1-4 beschriftete Felder haben und gleichzeitig gedreht werden müssen.

Folie 1: Auswertung des Spiels

				Anzahl getroffener Dosen gleicher Nummer		
	1.Werfer	**2.Werfer**	**3.Werfer**	**1**	**2**	**3**
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
10.						
11.						
12.						
13.						
14.						
15.						
16.						
17.						
18.						
19.						
20.						
Summe der Ergebnisse →						

Arbeitsblatt 2

				Anzahl getroffener Dosen gleicher Nummer		
	1.Werfer	**2.Werfer**	**3.Werfer**	**1**	**2**	**3**
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
10.						
11.						
12.						
13.						
14.						
15.						
16.						
17.						
18.						
19.						
20.						
21.						
22.						
23.						
24.						
25.						
26.						
27.						
28.						
29.						
30.						
31.						
32.						
33.						
34.						
35.						
36.						
37.						
38.						
39.						
40.						
Summe der Ergebnisse →						

Folie 2: Auswertung der Simulation

	Anzahl getroffener Dosen gleicher Nummer		
Gruppe	**1**	**2**	**3**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Summe der Ergebnisse			

Arbeitsblatt 3

Spieler 1	Spieler 2	Spieler 3	0 gleiche Nummern	1 gleiche Nummer	2 gleiche Nummern		Spieler 1	Spieler 2	Spieler 3	0 gleiche Nummern	1 gleiche Nummer	2 gleiche Nummern
1	1	1					3	1	1			
1	1	2					3	1	2			
1	1	3					3	1	3			
1	1	4					3	1	4			
1	2	1					3	2	1			
1	2	2					3	2	2			
1	2	3					3	2	3			
1	2	4					3	2	4			
1	3	1					3	3	1			
1	3	2					3	3	2			
1	3	3					3	3	3			
1	3	4					3	3	4			
1	4	1					3	4	1			
1	4	2					3	4	2			
1	4	3					3	4	3			
1	4	4					3	4	4			
2	1	1					4	1	1			
2	1	2					4	1	2			
2	1	3					4	1	3			
2	1	4					4	1	4			
2	2	1					4	2	1			
2	2	2					4	2	2			
2	2	3					4	2	3			
2	2	4					4	2	4			
2	3	1					4	3	1			
2	3	2					4	3	2			
2	3	3					4	3	3			
2	3	4					4	3	4			
2	4	1					4	4	1			
2	4	2					4	4	2			
2	4	3					4	4	3			
2	4	4					4	4	4			
Summe der Ergebnisse							Summe der Ergebnisse					
Gesamtsumme aller Ergebnisse →												

2.6.5 Klassenarbeitsaufgabe

Max kommt zu Besuch und erzählt, dass er ziemlich sicher ist, dass die neue CD von den Backstreet Boys mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 in der ersten Woche auf Platz 1 der Top 100 sein wird. Erkläre ausführlich, wie Max zu dieser Äußerung kommen könnte!

Die Ausarbeitung einer Klassenarbeit war während der viertägigen Veranstaltung aus Zeitgründen nicht mehr realisierbar. Die obige Aufgabe soll als Anregung für eine offenere Aufgabenstellung verstanden werden.

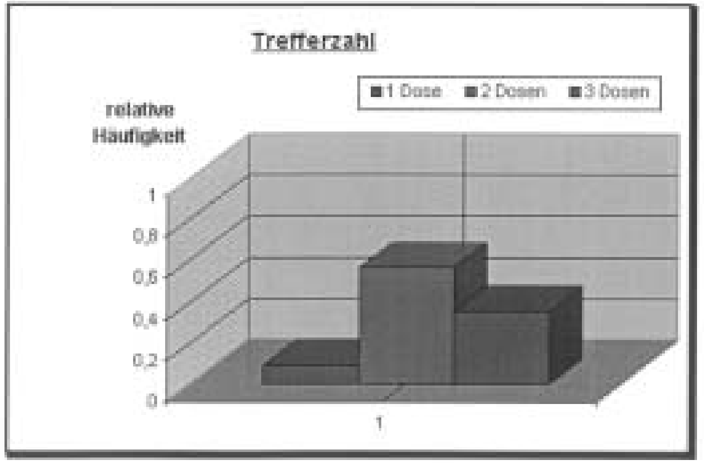
Weitere (übliche) Aufgaben ergeben sich aus den Inhalten der Stunden 8-13.

Simulation des Dosenwerfens

1. Werfer	2. Werfer	3. Werfer	Anzahl getroffener Dosen gleicher Nummer: 1	2	3
3	4	2	0	0	1
3	4	3	0	1	0
2	3	2	0	1	0
4	2	1	0	0	1
3	1	3	0	1	0
1	3	1	0	1	0
4	1	1	0	1	0
1	2	1	0	1	0
4	3	1	0	0	1
1	4	4	0	1	0
4	3	2	0	0	1
4	3	2	0	0	1
2	4	2	0	1	0
2	1	1	0	1	0
3	2	2	0	1	0
3	3	3	1	0	0
4	4	1	0	1	0
1	1	4	0	1	0
4	4	1	0	1	0
1	3	3	0	1	0
4	3	2	0	0	1
4	2	2	0	1	0
1	3	4	0	0	1

Anzahl der Würfe:	100	Drücke F9 zur Simulation !

	1 Dose	2 Dosen	3 Dosen	Gesamt
Trefferzahl:	9	56	35	100
relative Häufigkeit:	0,09	0,56	0,35	1



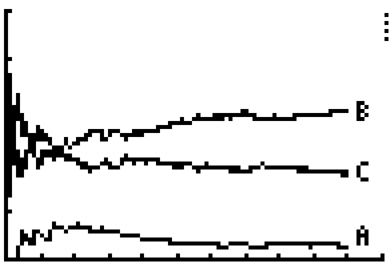
2.6.7 TI-83 Simulationsprogramme

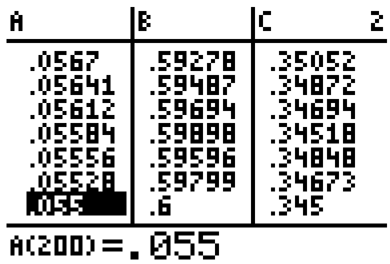
I) **Langsame Version (100 Versuche ≡ 40 s) - entspricht in der Vorgehensweise der Auswertung der Versuchslisten von Hand**

```
FnOff:ClrHome:Disp ""                      ; Kommentar
Disp "   SIMULATION":Disp ""
Disp "JE 100 VERSUCHE"
Disp "  CA. 40 SEK.":Disp ""
Input "ANZAHL: ",N
seq(randInt(1,4),X,1,N,1)üL               ; jeweils N Zufallszahlen werden berechnet
seq(randInt(1,4),X,1,N,1)üL‚              ; und in den Listen L1, L2 und L3 gespeichert
seq(randInt(1,4),X,1,N,1)üLƒ
seq(0,X,1,N,1)üL„                         ; die Ergebnislisten L4, L5 und L6 werden mit N Nullen
L„üL…                                      ; initialisiert
L„üL†
seq(X,X,1,N,1)üáX                          ;áX enthält die Versuchsnummern
For(I,1,N,1)                               ; Auswertung: Listenelemente werden einzeln verglichen
If (L   (I)=L‚(I)) and (L   (I)=Lƒ(I)):Then
1üL„(I)                                    ; drei gleiche Zahlen
Else
If (L   (I)øL‚(I)) and (L   (I)øLƒ(I)) and (L‚(I)øLƒ(I)):Then
1üL†(I)                                    ; drei ungleiche Zahlen
Else
1üL…(I)                                    ; zwei gleiche Zahlen
End:End:End                                ; EndIf:EndIf:EndFor
cumSum(L„)üáA                              ; Die Ergebnisse werden kumuliert.
cumSum(L…)üáB                              ; absolute Häufigkeiten
cumSum(L† )üáC
áA/áXüáA                                   ; relative Häufigkeiten
áB/áXüáB
áC/áXüáC                                   ; grafische Darstellung - relative Häufigkeit über Versuchs
                                             nummer
Plot1(xyLine,áX,áA,Ò):Plot2(xyLine,áX,áB,Ò):Plot3(xyLine,áX,áC,Ò)
0üXmin:1.1*NüXmax:N/10üXscl:0üYmin:1üYmax:.2üYscl
DispGraph
Text(round(56*(1-áA(N)),0),88,"A")        ; Grafik beschriften
Text(round(56*(1-áB(N)),0),88,"B")        ; A: drei gleiche / B: zwei gleiche / C: drei ungleiche
Text(round(56*(1-áC(N)),0),88,"C")
```

<u>Beispiel für N=200:</u>

relative Häufigkeiten in der grafischen Darstellung und im Listeneditor





II) **Optimierte Version (100 Versuche ≡ 25 s) - für Schüler schlecht zu durchschauen**

```
FnOff
ClrHome
Disp "
Disp "   SIMULATION
Disp "
Disp "JE 100 VERSUCHE
Disp "  CA. 25 SEK.
Disp "
Input "ANZAHL: ",N
seq(randInt(1,4),X,1,NüL
seq(randInt(1,4),X,1,NüL,
seq(randInt(1,4),X,1,NüLƒ
Nüdim(L„
Fill(0,L„
L„üL…
L„üL†
seq(X,X,1,NüáX
L   =L, and L   =LƒüL„
L   øL, and L  øLƒ and LøLƒüL†
not(L„ or L†)üL…
cumSum(L„)/áXüL
cumSum(L…)/áXüL,
cumSum(L†)/áXüLƒ
Plot1(xyLine,áX,L   ,Ò
Plot2(xyLine,áX,L,,Ò
Plot3(xyLine,áX,Lƒ,Ò
0üXmin:1.1*NüXmax:N/10üXscl:0üYmin:1üYmax:.2üYscl
DispGraph
Text(round(56*(1-L   (N)),0),88,"A
Text(round(56*(1-L,(N)),0),88,"B
Text(round(56*(1-Lƒ(N)),0),88,"C
Pause
```

2.6.8 Kontakt

Frauke Seeger *fraukeseeger@yahoo.de*

Elmar Haberich *haberich@yahoo.com*

Gerhard Hillers *ghillers@t-online.de*

Jörg Wimmel *JWIMMEL@gmx.de*

3 Mehrstufige Zufallsexperimente und Baumdiagramme

3.1 Rahmenrichtlinien - Baustein „Mehrstufige Zufallsexperimente und Baumdiagramme“

Baumdiagramme sollen als grundlegendes Hilfsmittel zur Untersuchung mehrstufiger Experimente eingesetzt werden. Dabei soll auch die Fähigkeit zur Auswahl eines geeignet vereinfachten Baumdiagramms geschult werden. Die Wahrscheinlichkeit des betrachteten Ereignisses wird mithilfe der Pfadregeln berechnet.

Schülerinnen und Schüler sollen geeignete Versuche als mehrstufige Zufallsexperimente interpretieren und hierfür angemessene Baumdiagramme entwickeln, Ereignisse im Baumdiagramm kennzeichnen und ihre Wahrscheinlichkeiten berechnen. Die Pfadregeln werden aus den bekannten Eigenschaften der relativen Häufigkeiten entwickelt.

Das Abwägen von Chancen und Risiken führt bei Glücksspielen auf intuitive Weise zur Untersuchung des zu erwartenden Gewinns oder Verlustes und ermöglicht so einen propädeutischen Zugang zum Begriff des gewichteten Mittels (Erwartungswert). Zentrale Aspekte sind hierbei die Prognose für das Eintreten von Ereignissen und die Fairness bei Glücksspielen.

Inhalte und Verfahren	**Hinweise**
Mehrstufige Zufallsexperimente Ereignisse Darstellung mittels Baumdiagramm strukturierendes Arbeiten: zielgerichtete Reduktion auf das Wesentliche (reduziertes Baumdiagramm) Modellbildung (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) Pfadregeln - Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten Multiplikationsregel Additionsregel ausgewählte Glücksspiele Gewinnerwartung faire Spiele	VERNETZUNG Modellbildung und Simulation Mittelwert als fundamentale Idee Anwendung algebraischer Verfahren: Bruchrechnung Prozentrechnung (3.2.7) DIDAKTIK/METHODIK handlungsorientiertes und experimentelles Arbeiten ERWEITERUNG klassische Probleme der Stochastik

(aus: Niedersächsisches Kultusministerium: Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, Schuljahrgänge 7-10, Mathematik. Anhörfassung 2002, Seite 18)

3.2 Ein möglicher Unterrichtsgang

Beim Einstieg in die Unterrichtseinheit wird an den Baustein „Daten und Prognosen“ angeknüpft. Das Einstiegsbeispiel ist so gewählt, dass einerseits der Modellbildung eine zentrale Rolle zukommt und andererseits das Baumdiagramm als ordnende Strukturierungshilfe eingeführt wird. Die vorgestellten Aufgaben berücksichtigen unterschiedliche Aspekte bei der Verwendung von Baumdiagrammen: • Pfadregeln • reduzierte Baumdiagramme • Interpretationen von Baumdiagrammen • Erstellen von Baumdiagrammen aus vorgegebenen Daten Zum Abschluss der Unterrichtseinheit wird ein Glücksspiel untersucht, zu dem sich eine Excel-Simulation anbietet.	
Besondere Materialien/Technologie: Excel	**Dauer der Unterrichtseinheit:** 12 Unterrichtsstunden

Gliederung

3.2.1 Lehrer Lämpel - Zensuren mit vier Münzen[1]

Freier Lehrervortrag

Lehrer Lämpel hat wegen eines überraschenden Frühlingseinbruchs leider keine Zeit, die Stochastik-Klassenarbeiten ausführlich zu korrigieren. Letztes Jahr hat er in einer ähnlichen Lage die Noten einfach mit einem schlichten Würfel ausgewürfelt - aber leider gab es dabei ungefähr ein Drittel Fünfen

[1] zitiert nach W. Herget: Wahrscheinlich? Zufall? ... in: mathematik lehren 85 (1997)

und Sechsen und entsprechend viel Ärger mit der Klasse, den Eltern und mit dem Schulleiter. Er vergibt daher diesmal die Noten wie folgt:
Für jede Arbeit wirft er vier (ideale) Münzen, zählt, wie oft dabei „Wappen“ gefallen ist, addiert 1 und notiert dieses Ergebnis als Note.
(Damit kommen höchstens die Noten 1, 2, 3, 4 und 5 vor.)
Möglicher handlungsorientierter Impuls: „Hannes, wirf uns mal deine Deutschnote“.
An dieser Stelle entwickeln die Schülerinnen und Schüler selbst Fragen, was eine entsprechende Unterrichtskultur voraussetzt.
Anderenfalls: „Wie wird wohl die Klassenarbeit ausfallen?“ „Wird es diesmal weniger Ärger geben?“

Sammlung möglicher Erwartungsmuster

Jede Schülerin/jeder Schüler sollte für sich eine Hypothese notieren. Hier wird nichts berechnet, die Schülerinnen und Schüler können erste Argumente über ihre Hypothesen austauschen. Diese Sammlungsphase wird die Lehrkraft strukturieren, ohne zu werten.
Zu erwartende Hypothesen, die festgehalten werden:
Gleichwahrscheinlichkeit, symmetrische und unsymmetrische Verteilungen

Die experimentelle Phase

Es folgt eine Simulation mithilfe eines Experiments in Kleingruppen, die Ergebnisse werden in einer Tabelle fixiert.
(Jede Gruppe würfelt einen Klassenspiegel, z. B. 26 Noten.)

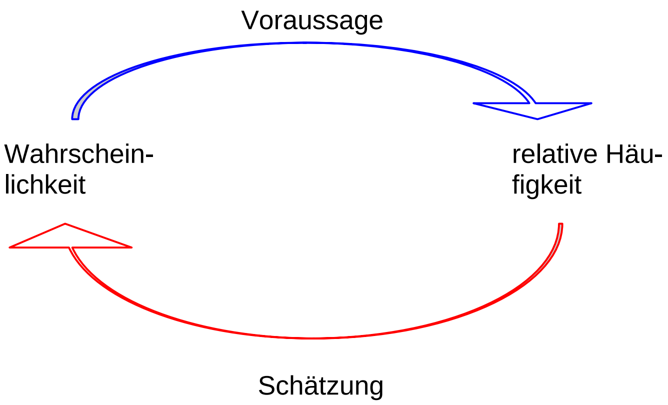
Anzahl Wappen	0	1	2	3	4
Note	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Malte/Felix					
Anne/Maria					
….					
.....					

Diskussion

Die Ergebnisse der Gruppen sollten eingehend besprochen werden (z. B. Ausreißer, Regelmäßigkeiten).
Aus den Einzelexperimenten wird eine verbesserte Prognose ermittelt und als gemeinsam erwarteter Notenspiegel festgehalten. Hierbei müssen Symmetrieeigenschaften berücksichtigt werden, eine einfache Mittelbildung ist ungeeignet.

Anzahl Wappen	0	1	2	3	4
Note	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
gemeinsam erwarteter Notenspiegel					
prozentualer Anteil					

Wahrscheinlichkeit als bestmögliche Prognose

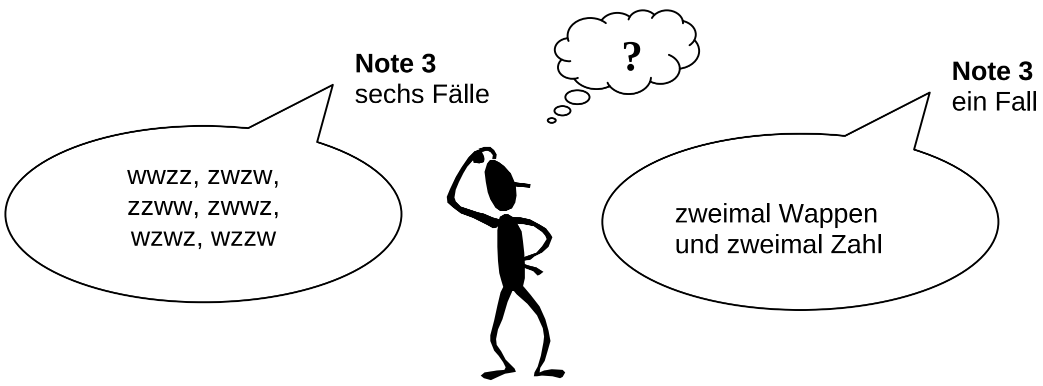


Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Folgende mögliche Fragestellung führt zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

„Wie kommt es, dass die Note 3 am häufigsten auftaucht?“

Diese Frage führt zum Kernproblem: Welcher Ergebnisraum ist für die Modellierung dieses Zufallsexperiments geeignet?



Die Validierung der beiden Modelle durch Rückgriff auf das Experiment führt zu der Einsicht, dass das zweite Modell (zweimal Wappen und zweimal Zahl) unter der Prämisse der Gleichwahrscheinlichkeit verworfen werden muss (Modellbildungskreislauf).

Methodische Hilfen: Simulation mit einer Münze, vier unterscheidbare (ideale) Münzen, ...

Hierbei sollten zwei wichtige Hilfsmittel zum Einsatz kommen, um unterschiedliche Lerntypen anzusprechen: Auflistung des Ergebnisraumes und das Baumdiagramm.

1. Hilfsmittel: Aufzählung aller Elementarereignisse

wwww → Note 5

....

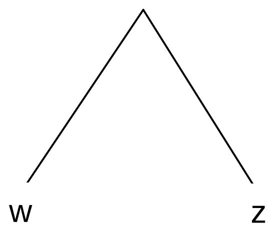
zzzz → Note 1

2. Hilfsmittel: Baumdiagramm

Bei der Auflistung der Elementarereignisse ergeben sich zwangsläufig die folgenden Fragen:

- „Sind wir sicher, dass alle Möglichkeiten erfasst sind?“
- „Geht das nicht systematischer, einfacher, anschaulicher?“

Ein erster Lehrerimpuls könnte sein:



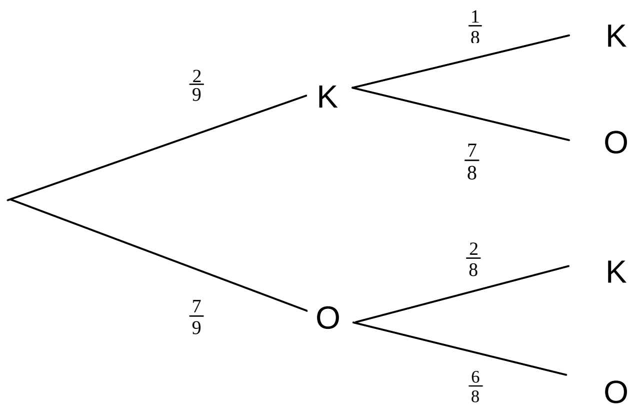
Die Schülerinnen und Schüler entwickeln das vollständige Baumdiagramm.
Danach muss eine Interpretation im Hinblick auf ein vollständiges und strukturiertes Erfassen aller Elementarereignisse erfolgen.
Durch Auszählen erhält man die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die der erstellten Prognose gegenüber gestellt werden muss.
Hinweis: An diesem Beispiel könnten auch die beiden Pfadregeln hergeleitet werden.
Gehaltvoller ist die Erarbeitung an einem Beispiel mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten.

Fazit

Anknüpfend an Klasse 7 wird das Aufstellen und Testen von Prognosen wiederholt. Am Begriff der Wahrscheinlichkeit als beste Prognose wird die Frage der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten angeknüpft. Zentrale Schwierigkeit ist dabei die Identifizierung der Elementarereignisse. Im Sinne der Modellbildung wird der Gedanke eines mehrstufigen Zufallsexperimentes vorbereitet. Es wird das strukturierte Erfassen durch die Erstellung von Baumdiagrammen eingeführt und die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten nach *Laplace* wieder aufgegriffen.

3.2.2 Die „K.O." - Aufgabe - ein Weg zur Pfad- und Summenregel

In einem Strumpf befinden sich sieben Kugeln mit der Beschriftung „O" und zwei Kugeln mit der Beschriftung „K". Man zieht zweimal ohne Zurücklegen. Beim Ziehen des Wortes „OK" gewinnt man, beim Ziehen von „KO" verliert man. Bestimme die Gewinnchancen.
<u>Hinweis:</u> Das Spiel sollte exemplarisch durchgeführt werden, um ein Gefühl für die zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeiten (Möglichkeiten) zu erhalten und erste Hypothesen zu erstellen.
Bei der Verifizierung der Hypothesen führt das erste Hilfsmittel - die Auflistung der Elementarereignisse - zu großen Problemen. Die Vorzüge des Baumdiagramms liegen auf der Hand: zum einen die Strukturierung und zum anderen die Darstellung der Wahrscheinlichkeiten an den einzelnen Pfaden.



Das Beispiel führt die Schülerinnen und Schüler zur Multiplikationsregel - der Weg über absolute Häufigkeiten kann hilfreich sein.
Die Diskussion über die beiden nicht genutzten Pfade und ihre gemeinsame Eigenschaft (Spiel endet unentschieden) führt zur Additionsregel.

<u>Variation der Aufgabe:</u> Ziehen mit Zurücklegen.

3.2.3 Weitere Aufgaben

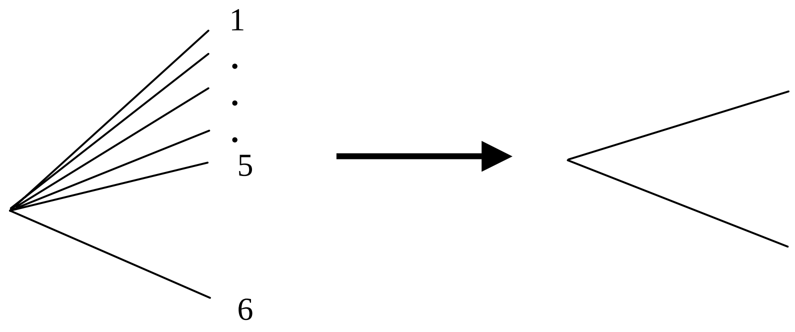
Aus einem Kanon zu bearbeitender Übungsaufgaben sollte genetisch auf die Problematik des reduzierten Baumdiagramms hingearbeitet werden.

Eine geeignete Aufgabe, die auf ein reduziertes Baumdiagramm führt, ist:

<u>Warten auf die Sechs</u>
Heike benötigt beim „Mensch ärgere dich nicht-Spiel" eine „Sechs", um wieder ins Spiel zu kommen.

a) Sie behauptet: „Mit spätestens dem sechsten Wurf habe ich meine ‚Sechs'." „Gib eine Begründung, mit der Heike den Fehler in ihrer Behauptung erkennt."

b) „Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit dem 6. (5., 4., 3., 2., 1.) Wurf die erste ‚Sechs' zu werfen."

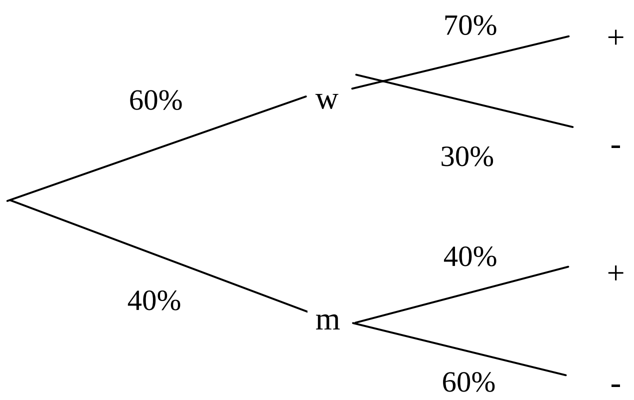


Bei der Auswahl der Übungsaufgaben sollte auch berücksichtigt werden, dass Baumdiagramme in anderen Zusammenhängen verwendet werden. So ist hier z. B. eine Vernetzung mit der Prozentrechnung sinnvoll.

Marktforschung

1000 Besucher eines Pop-Konzerts wurden gefragt, ob ihnen das Konzert gefallen hat (+) oder nicht (-).

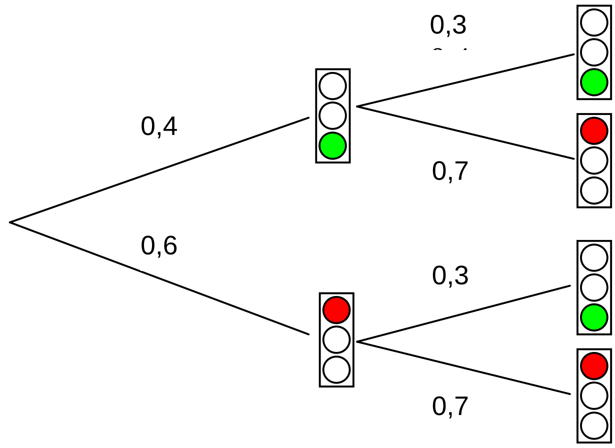
„Ermittle mithilfe eines Baumdiagramms den Anteil der weiblichen Besucher bzw. den Anteil der Besucher, denen das Konzert gefallen hat."



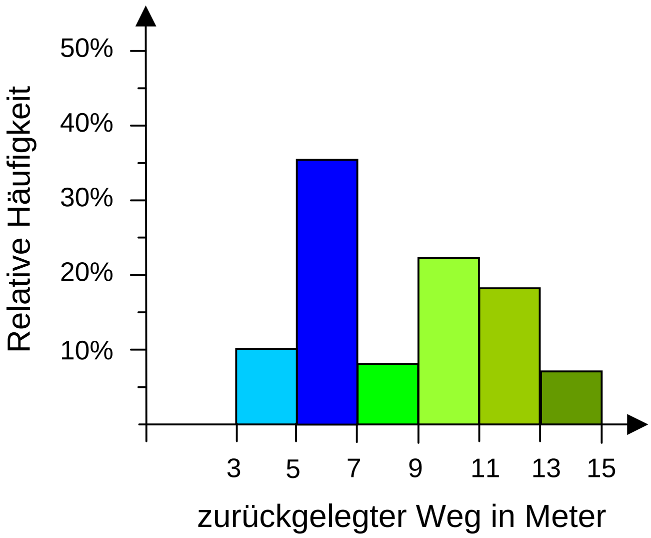
Warten an der Ampel

Auf seinem Schulweg muss Ole mit dem Mountainbike zwei Ampeln überqueren. Häufig muss er vor beiden Ampeln warten. Er stellt fest, dass die Grünphase bei der ersten Ampel 80 s und die Rotphase 120 s beträgt, die zweite Ampel zeigt 60 s grün und 140 s rot.
„Stelle in einem Baumdiagramm alle Möglichkeiten dar."
„Berechne die Wahrscheinlichkeit für die Grünphase (zweimal grün)."

Lösung zur Ampelaufgabe:



__Der Papierflieger__



Das Histogramm stellt die Papierflieger-Daten dar.

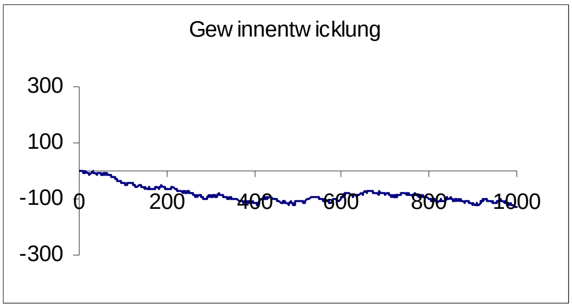
„Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der nächsten beiden Flüge ein Blindgänger (d. h. weniger als 7 m) und der andere ein Erfolg (d. h. mindestens 7 m) wird."

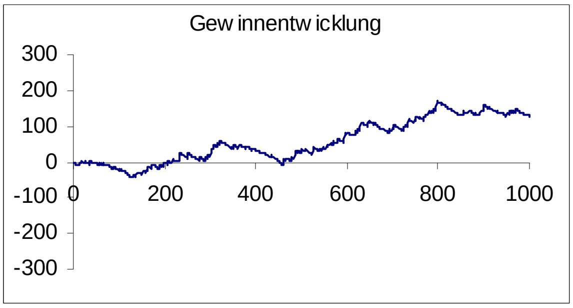
3.2.4 *Gewinnerwartung - faire Spiele*

In der Einstiegsphase präsentiert der Lehrer die folgende Spielidee:
Bei einem Glücksspiel werden zwei Würfel geworfen. Der Spieler erhält für die Augensummen 2 und 12 den Betrag von 8 Cent, für die Augensummen 3 und 11 den Betrag von 4 Cent ausgezahlt. Der Einsatz pro Spiel beträgt 1 Cent.
Exemplarisch inszenierte Spielsituationen führen auf verschiedene Fragestellungen:
Rollenverteilung?
Ist das Spiel fair?
Ist ein Gewinn zu erwarten? Wenn ja, wie hoch wäre er?
Anzahl der Spielrunden?

Dies sollte in der Formulierung einer ersten Hypothese münden (Bank oder Spieler?).
Beide Hilfsmittel (Aufzählung und Baumdiagramm) tragen zur Lösungsfindung bei.
Die Schülerinnen und Schüler können sich selbstständig - z. B. in Gruppenarbeit - in den Kern des Problems einarbeiten (gewichtetes Mittel).
Als weiterführende Fragestellung bietet sich an dieser Stelle an:
„Verändere die Spielsituation, damit das Spiel fair wird.“

In diesem Zusammenhang ist auch die Verwendung einer EXCEL-Simulation des Spiels möglich, wenn die Schwankungsbreite diskutiert und veranschaulicht werden soll.





Die Grafiken zeigen die kumulierte Gewinnentwicklung (in Cent) für zwei Simulationen über 1000 Spiele.

Eine komplexere Aufgabe zur Vertiefung:

<u>Die Differenz zählt</u>

Nicole besitzt einen Würfel, dessen Flächen mit 1, 4, 4, 4, 4, 6 beschriftet sind. Jorid hat einen Würfel mit 2, 2, 3, 5, 5, 5. Zuerst wirft Jorid ihren Würfel und dann Nicole. Wer die niedrigere Augenzahl hat, zahlt der anderen die Differenz in Cent.

3.2.5 *Aufgaben für eine Klassenarbeit*

1.) Hans hat in seiner Hosentasche 7 rote, 8 grüne und 5 blaue gleich große Murmeln.

a) Er zieht eine Murmel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, (i) eine rote, (ii) eine grüne, (iii) eine blaue Murmel aus der Hosentasche zu ziehen?

b) Hans zieht nacheinander zwei Murmeln ohne Zurücklegen der ersten Murmel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er (i) zwei rote, (ii) zwei grüne, (iii) zwei blaue, (iv) zwei gleichfarbige Murmeln? „Zeichne den zugehörigen Baum."

c) „Beantworte die Fragen aus b), wenn Hans mit Zurücklegen zieht." „Zeichne ebenfalls einen Baum."

2.) In einer Schale liegen 24 Lutscher, 12 mit Cola-, 8 mit Limo- und 4 mit Spezigeschmack. Da sie gleich aussehen, muss man sie lutschen, um sie zu unterscheiden.

a) „Zeichne das Baumdiagramm mit den Wahrscheinlichkeiten, wenn man 2 Lutscher nacheinander probiert."

b) „Bestimme die Wahrscheinlichkeit ‚der Geschmack ist verschieden' und erläutere dein Ergebnis am Baumdiagramm."

c) Man gewinnt 300 Cent, wenn man Spezi schmeckt, 120 Cent bei Limogeschmack und verliert 180 Cent bei Colagenuss. „Ist das Spiel fair?"

3.2.6 *Kontakt*

Peter Fricke

Christian Gott *christian.gott@debitel.net*

Hans Kramer *Hkramer01@aol.com*

Stefan Luislampe *rade.luislampe@t-online.de*

Reimund Vehling *R.Vehling@t-online.de*

Wilhelm Weiskirch *w.weiskirch@t-online.de*

3.3 Alternativer Einstieg

das Baumdiagramm als Hilfsmittel zur Untersuchung mehrstufiger Experimente eine schülerzentrierte Einführung in die Thematik	
Materialien/Technologie: Socken und Holzklötzchen Papierbögen, Klebeband, Edding	**Dauer der Unterrichtseinheit:** 4 Unterrichtsstunden

Gliederung

Ziel des hier vorgestellten Unterrichtsganges ist es, die Schülerinnen und Schüler mathematische Inhalte soweit wie möglich selbstständig erforschen und gestalten zu lassen. Grundvorstellungen zu Begriffen, Verfahren und Argumentationsmustern entwickeln sich über subjektive Erfahrungen. Diese Lernvoraussetzungen sind in einer ersten Phase zu erfassen. Gleichzeitig soll für die Schülerinnen und Schüler der Weg der Erkenntnisgewinnung sichtbar werden. Methodischer Schwerpunkt ist die in Phase 2 vorgestellte Gruppenarbeit (s. u.) und deren Auswertung in Phase 3, für die ausreichend Zeit zur Verfügung gestellt werden muss. Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten der Gruppenmitglieder, aber auch deren Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen sind für den Erkenntnisprozess im Team zu nutzen. Die Lehrkraft hat dabei eine beobachtende und beratende Funktion.

Der Unterrichtsgang eröffnet auch Möglichkeiten einer inhaltlichen Vernetzung mit anderen Bereichen des Unterrichts. Insbesondere ergeben sich sinnvolle Wiederholungen zu den Themenbausteinen 3.2.1 „Daten und Prognosen“ und 3.2.7 „Zuordnungen, Proportionalität und Dreisatz“, die in die Erarbeitung des neuen Stoffes integriert werden. Gerade beim Aufbau eines individuellen Wissensnetzes kann dadurch für die Schülerinnen und Schüler der allmähliche Kompetenzzuwachs erfahrbar werden.

3.3.1 *Experiment „Oma aus der Socke“*

⇨ Einführung in den Sachverhalt mittels des Experiments „Zieh die Oma aus der Socke“ [4].
(1 Stunde)

Es soll die Schülerinnen und Schüler veranlassen, ihre Vorstellungen zu artikulieren und eine motivierende Lernausgangssituation bewirken.

Lehrerinformation zum Experiment

Verwendet werden insgesamt neun gleichartige Klötzchen mit den Buchstaben O, M oder A, die auf zwei Socken verteilt werden. Socke 1 enthält je ein Klötzchen mit den Buchstaben O, M und A, Socke 2 zwei Klötzchen mit den Buchstaben O, zwei mit M und zwei mit A. Zieht man die Buchstaben OMA in dieser Reihenfolge aus einer Socke, so gewinnt man einen Euro, Bonbons o. ä.. Eine Schülerin oder ein Schüler entscheidet sich für eine Socke und zieht dann nacheinander drei Klötzchen, ohne sie zurückzulegen.

Einstieg

Die Lehrkraft erklärt das Experiment und stellt die Ausgangsfrage: „Aus welcher Socke würdet ihr ziehen?“

Mögliche Gelenkstellen zur Aufbereitung der Lernausgangssituation:

- spontane Entscheidungen für eine Socke werden an der Tafel fixiert*;* Schülerinnen und Schüler ordnen sich entsprechend ihren Entscheidungen räumlich getrennten Gruppen zu
- Diskussion der Begründungen für eine Socke
- Erarbeitung einer Hypothese zu Gunsten einer Socke, durch
  - Einsicht als Ergebnis der Diskussion
  - Simulation des Experimentes (z. B. Würfel, Karten, TI-83/89…)
  - Vergabe des Euros durch abwechselndes Ziehen aus beiden Socken
  - arbeitsteiliges Experimentieren (mögliches Ergebnis: $n=100$, $k_1=15$, $k_2=5$)

Abschließend

zusammenfassende Mehrheitsentscheidung für (oder gegen) die Hypothese:

„Socke 1 ist günstiger als Socke 2“ als Lernausgangssituation für die 2. Phase

3.3.2 *Gruppenarbeit*

⇨ Gruppenarbeit zur Analyse der Sachstruktur und Variation des Experiments
Die Schülerinnen und Schüler sollen bei gleicher Ausgangssituation Regeln finden, so dass das Experiment mit beiden Socken zur gleichen Gewinnerwartung führt (1 Stunde).

Lehrerinformation zur Gruppenarbeit

Die nachfolgende Gruppenarbeit sollte in etwa 5 Gruppen mit höchstens 6 Schülerinnen und Schülern erfolgen.

Für jede Gruppe wird ein großer Papierbogen, z. B. aus Zeitungsendrollen, bereitgestellt. Auf dem Rand notieren die Gruppenmitglieder spontane Ideen, die für einen gemeinsamen Gruppenvorschlag auszuwerten sind. Das Diskussionsergebnis wird mit einem dicken Faserschreiber im mittleren Rechteck dokumentiert. Zur Präsentation der Gruppenvorschläge werden die Papierbögen aller Gruppen z. B. an die hintere Klassenwand mit Klebeband angebracht. Die Ergebnisse sind von Gruppenmitgliedern vorzustellen.

Einstieg

Die Lehrkraft erläutert die Gruppenarbeit und erteilt den folgenden Arbeitsauftrag: „Variiert die Regeln so, dass ein faires Spiel entsteht, wobei die Socken mit Inhalt als Ausgangssituation unverändert bleiben! Begründet euren Vorschlag!“

Mögliche Zielsetzungen in den Gruppen:
1. Anpassung des jeweiligen Gewinns
2. Varianten der Ziehung mit und ohne Zurücklegen
3. Anpassung der Trefferzahl bei mehrfacher Versuchsdurchführung
4. Zusatzbedingungen für Socke 2
5. ....

Lehrerinformation zur Begleitung der Gruppenaktivitäten

Während der Gruppenarbeit sollten die Schülerinnen und Schüler eigenständig ohne Lenkung der Lehrkraft forschen. So wird mathematische Kreativität und Phantasie gefordert und gefördert. Schülerinnen und Schüler dieser Altersstufe sind an Spielsituationen stark interessiert und werden durch Fragen nach Fairness und Gerechtigkeit im Spiel stark motiviert sich mit diesem Problem auseinandersetzen. Deshalb sollte der Arbeitsauftrag für die Gruppenarbeit so knapp und präzise wie möglich formuliert werden, ohne mögliche Lösungsansätze vorweg zu nehmen.

Die Lehrkraft bleibt beobachtend und beratend im Hintergrund. In dieser Phase ist an mathematischen Inhalten von der Argumentation mittels relativer Häufigkeit bis hin zu einem Baumdiagramm alles an Schülerideen möglich. Diese Vielfalt sollte auch zugelassen werden. Beratung bedeutet hier nicht, alle Gruppen zum Baumdiagramm zu lenken, sondern jede Gruppe in dem von ihr selbst gewählten Ansatz zu unterstützen und eine Ausschärfung der darin enthaltenen mathematischen Inhalte und Begriffe zu fördern. Es ist damit zu rechnen, dass einzelne Gruppen versuchen, alle möglichen Ergebnisse aufzuschreiben, die beim Ziehen aus den Socken auftreten können. Hier ergeben sich Vernetzungsmöglichkeiten mit den Inhalten des Vorunterrichts. In jedem Fall kann das Baumdiagramm als Hilfsmittel bei der Darstellung angeboten werden.

3.3.3 Auswertung (Entwicklung eines Baumdiagramms)

(1-2 Stunden)

Lehrerinformation

In dieser Phase stellen die einzelnen Gruppen ihre Ergebnisse vor, erläutern also die von ihnen entwickelten Spielregeln, die zu einem fairen Spiel führen. Dabei sollen die vortragenden Schülerinnen und Schüler ihre Denkvorgänge offen legen, den Mitschülerinnen und Mitschülern vermitteln, mit ihnen weiterentwickeln und kritisch reflektieren.

Eine mathematische Ausschärfung hinsichtlich der Begriffe Baumdiagramm (Pfadregeln) und Gewinnerwartung soll erfolgen. Zu welchem Zeitpunkt dieser Phase und in welcher Vollständigkeit dieses geschieht, ist von den Ergebnissen der Gruppenarbeit abhängig und hängt auch davon ab, in welcher Form die Lehrkraft später im Rahmen des vernetzenden Lernens auf diese Kenntnisse zugreifen will.

Mögliche Gruppenvorschläge

zu 1:

- Auf der Grundlage des durchgeführten Experiments und angenommenen absoluten Häufigkeiten ist für die Ziehung aus Socke 1 ein Gewinn von 1 Euro, für die aus Socke 2 ein Gewinn von 3 Euro fair.
- Anpassung durch Untersuchung der Elementarereignisse (Permutation):
  Socke 1: **OMA**, OAM, MAO, MOA, AMO, AOM
  Socke 2: $\mathbf{O_1M_1A_1}$, $\mathbf{O_1M_1A_2}$, $\mathbf{O_1M_2A_1}$, $\mathbf{O_1M_2A_2}$, $\mathbf{O_2M_1A_1}$, $\mathbf{O_2M_1A_2}$, $\mathbf{O_2M_2A_1}$, $\mathbf{O_2M_2A_2}$, $M_1A_1O_1$, $M_2A_1O_1$, ... (120 Elementarereignisse)

Es ergibt sich ein faires Spiel bei einem Gewinn von 1 Euro (Socke 1; p = $\frac{1}{6}$) bzw. 2,5 Euro (Socke 2; p = $\frac{1}{15}$).

Während diese Aufzählung bei Socke 1 von allen Schülerinnen und Schülern realisiert werden kann, wird die Untersuchung der Elementarereignisse bei der Ziehung aus Socke 2 wegen der großen Anzahl und der notwendigen Unterscheidung gleicher Buchstaben viele überfordern. Möglich sind z. B. falsche Aufzählungen. Diese Schwierigkeiten erfordern ein neues Hilfsmittel, welches an geeigneter Stelle (z. B. bei der Präsentation anderer Gruppenergebnisse) zu entwickeln ist.

- Anpassung durch Untersuchung von Pfaden (grafische Darstellung der „Chancen"). Dieser Ansatz führt direkt zu Baumdiagrammen.

zu 2:
Kinder neigen dazu, benachteiligten Spielern eine zusätzliche Chance zu geben.
Beispiele:

- Ist der erste Zug aus Socke 2 kein O, darf neu begonnen werden.
- Man zieht aus Socke 2 wie aus Socke 1 alle Steine und gewinnt, wenn an irgend einer Stelle die Buchstabenfolge OMA auftritt, z. B. $O_1\mathbf{O_2M_1A_1}M_2A_2$.
- ....

zu 3:
Anpassung durch Festlegung der Trefferzahl bei mehrfacher Durchführung des Experimentes, Beispiele:

- viermalige Durchführung bei Socke 1 und zehnmalige Durchführung bei Socke 2
- .....

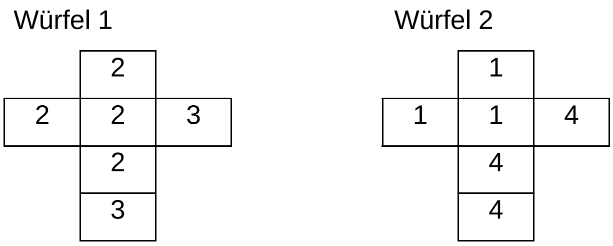
zu 4:
vielfältige Möglichkeiten, z. B. durch zusätzliches Würfeln

Lehrerinformation zur Auswertung der Gruppenbeiträge

Aus allen Möglichkeiten ergibt sich für die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, ein Baumdiagramm als tragfähiges Hilfsmittel zu entwickeln. Insbesondere lassen sich Fehlvorstellungen für Verbesserungen nutzen. In intuitiver Weise werden Pfadregeln und Gewinnerwartung mit erschlossen. Dieser Unterrichtsgang ermöglicht den Schülerinnen und Schülern einen hohen Gestaltungsanteil. Durch weitgehend selbstbestimmtes Handeln erschließen sie neue Gesetzmäßigkeiten und gelangen somit reflektierend zu einer tieferen Durchdringung der Inhalte und Methoden. Die Gruppenarbeit fördert den sachbezogenen Dialog, die konstruktive Kritik und die Bereitschaft zum gemeinsamen Arbeiten. Die Dokumentation weist nicht nur die fertigen Ergebnisse aus, sondern auch den Prozess der Erkenntnisgewinnung. Zusätzlich fördert die Präsentation der Arbeitsergebnisse die Fähigkeit, mathematische Sachverhalte angemessen darzustellen.

3.3.4 Aufgabenvorschläge

<u>Aufgabe 1</u>



a) Spielregel: Man gewinnt, wenn man bei 2 Würfen einen Pasch wirft. „Welchen Würfel würdest du bei diesem Spiel wählen?“ „Begründe deine Entscheidung ausführlich!“
b) Ina schlägt folgende neue Spielregel vor: Die beiden Würfel werden den Spielern zufällig zugeteilt. Jeder Spieler würfelt mit seinem Würfel zweimal. Gewonnen hat der Spieler mit der höheren Augensumme. „Ist das Spiel fair?“ „Begründe ausführlich!“

<u>Aufgabe 2</u>

Florian behauptet, beim gleichzeitigen Werfen mit 4 Münzen folgendes Ergebnis erzielt zu haben:

Anzahl der Wappen	0	1	2	3	4
Florian	10	35	35	20	0

„Kommentiere!“ „Benutze die Begriffe **absolute** und **relative Häufigkeit**, **Wahrscheinlichkeit**, **Baumdiagramm** und **Pfadregel**.“

<u>Aufgabe 3</u>

Ina behauptet: „Baumdiagramme sind Quatsch, die braucht doch kein Mensch!“
„Überzeuge sie vom Gegenteil!“

3.3.5 *Literatur*

[1] Niedersächsisches Kultusministerium: Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, Schuljahrgänge 7-10, Mathematik. Anhörfassung 2002.

[2] Borovcnik, M. u. a.: Anregungen zum Stochastikunterricht. Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin 2001.

[3] Cukrowicz, J., Zimmermann, B. (Hrsg.): MatheNetz 8. Westermann Verlag, Braunschweig 2000.

[4] Nach einem Vortrag von Dr. Wolfgang Riemer, Köln in Loccum am 5.02. 2002.

3.3.6 *Kontakt*

Rudolf Berding	*rudolf.berding@ewetel.net*
Reinhold Hoffmann	*k.r.hoffmann@t-online.de*
Antje Jung	*jung-leer@t-online.de*
Sabine Meyer	*swen.meyer@t-online.de*
Hartmut Müller-Sommer	*mueller-sommer@t-online.de*

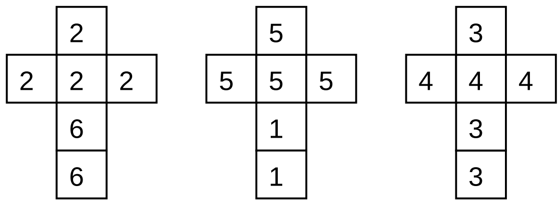
3.4 Chinesische Würfel

Anknüpfend an relative Häufigkeiten soll ein Würfelspiel mit überraschendem Ausgang analysiert werden. ***Baumdiagramme*** sollen als geeignete Hilfsmittel zur Untersuchung ***mehrstufiger Zufallsexperimente*** eingeführt und die ***Pfadregeln*** erarbeitet werden.	
Besondere Materialien/Technologie: Würfel nach BRADLEY EFRON (chinesische Würfel)	**Dauer der Unterrichtseinheit:** ca. 6 Unterrichtsstunden

Gliederung

3.4.1 Der Einstieg - Die Wette

Zu Beginn dieser Unterrichtseinheit wird der Klasse ein „eigenartiger" Würfelsatz[2] vorgestellt, bestehend aus drei Würfeln A, B und C mit den folgenden Augenzahlen:[3]



A **B** **C**

Natürlich soll mit diesen Würfeln auch gespielt werden, und zwar nach folgenden Regeln.

[2] Unbeschriftete Würfel kann man im Spielwarenhandel erhalten. Man kann sich die Würfel von Bradley Efron auch aus normalen Würfeln selbst herstellen, indem man diese mit Klebepunkten beklebt und die erforderlichen Augenzahlen draufschreibt.
[3] Im Anhang sind weitere mögliche Würfelsets beschrieben.

Die Spielregeln:	Zwei Spielerinnen/Spieler wählen nacheinander je einen Würfel und würfeln mit diesen gegeneinander. Die höhere Augenzahl gewinnt.

Diese Würfel haben eine paradoxe Eigenschaft: Würfel A gewinnt im Durchschnitt gegen Würfel B, Würfel B gewinnt gegen Würfel C und überraschenderweise gewinnt C wiederum gegen A (s. u.); es gibt also keinen besten Würfel. Dieser Effekt soll den Schülerinnen und Schülern zu Beginn der Einheit im Rahmen einer Wette vor Augen geführt werden.

Dazu werden ca. 5 Schülergruppen gebildet. ***Der Lehrer wettet mit der Klasse***, dass er nach jeweils 5 Spielen gegen jede Gruppe insgesamt mehr Spiele gewonnen hat als die Klasse, wobei die Schülerinnen und Schüler immer als erste einen Würfel wählen dürfen (müssen!).

Die Schülerinnen und Schüler werden motiviert sein, eine für sich optimale Strategie zu finden („Nimm Würfel X, der ist der Beste!“). Im Zuge des Wettspiels werden sie jedoch in der Regel feststellen, dass sie im Durchschnitt gegen den Lehrer verlieren[4]. Es ergibt sich folgendes „echtes“ Problem:

Frage: ***Warum gewinnt meistens der Lehrer das Spiel*?**

(Sollte das Spielergebnis die vorstehende Frage nicht aufwerfen, so kann im Folgenden diskutiert werden, ob es eine optimale Gewinnstrategie gibt und wie diese ggf. lautet.)

Den Schülergruppen sollte nun Zeit gegeben werden, das Würfelspiel entsprechend der Fragestellung näher zu untersuchen.

3.4.2 Auswertung des Würfelexperiments und Vorstellung der Methoden

Die Schülergruppen stellen ihre Analyse des Spiels vor (Tafel, Overheadprojektor, Papier, ...). Vermutlich werden zwei Hauptargumentationsrichtungen auftreten:

1. *Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit:* „Zum Beispiel ist Würfel A besser als Würfel B, weil zwei Sechsen immer gewinnen und die Zweien auch noch gegen die Einsen gewinnen!“ In diesem Fall kann direkt über die Diskussion der Einzelwahrscheinlichkeiten bzw. über die Diskussion einer entsprechenden Visualisierung (Matrix) mit der *Einführung des Baumdiagramms* (s. u.) fortgefahren werden.
2. *Häufigkeitsbetrachtungen:* „Wir haben oft gegeneinander gewürfelt. Bei uns hat Würfel A meistens gegen B gewonnen und gegen C verloren!“ In diesem Fall sind wieder zwei weiterführende Wege denkbar:

[4] Bei 25 Versuchen wird dies mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 71,3% der Fall sein.

a) Das Würfelset wird systematisch auf die relativen Häufigkeiten der Gewinne jeder Würfelkombination untersucht (Strichliste, vgl. Baustein „Daten und Prognosen“). Über die Frage nach der besten Prognose (evtl. auch durch den Vergleich mit den Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit, vgl. 1) gelangt man wieder zur Wahrscheinlichkeitsberechnung und damit zum Baumdiagramm.

b) Ein neues (paradoxes) Würfelset (siehe Anhang), das lediglich in einer Ausfertigung vorhanden ist, soll mangels Zeit ohne Häufigkeitsanalyse untersucht werden.
   → Einführung des Baumdiagramms

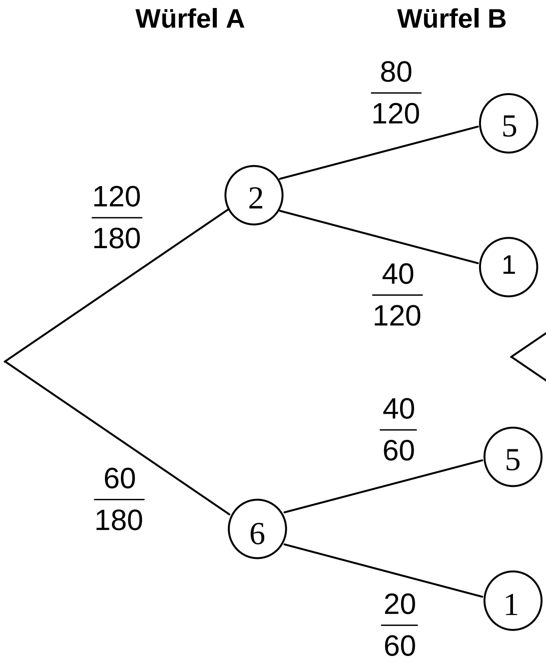
Im Sinne einer Methodenreflexion sollten die beiden aufgezeigten Argumentationsmuster - wenn sie parallel auftreten - verglichen werden.

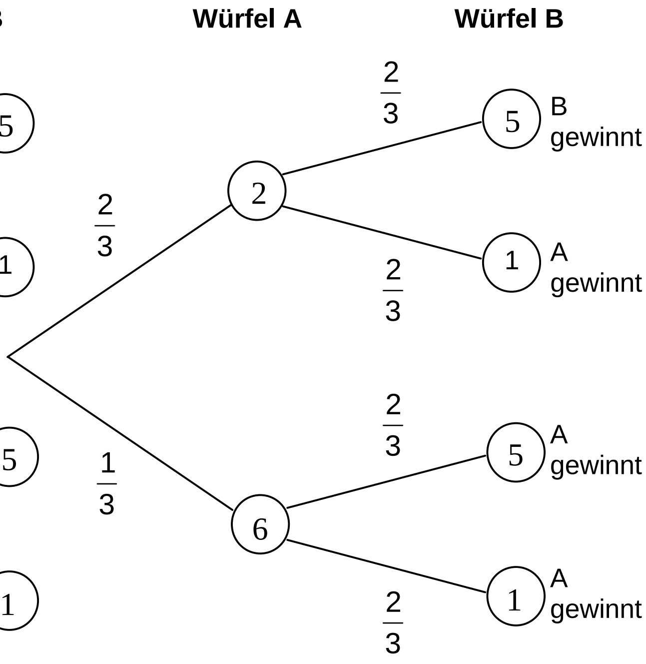
3.4.3 Einführung des Baumdiagramms

Zu Beginn beschränkt man sich auf die ***Untersuchung <u>eines</u> Würfelpaares***, hier z. B. A gegen B. Über die Frage, wie man alle Elementarereignisse („Welche Spielausgänge sind möglich?“) anschaulich ermitteln kann, gelangt man zum Baumdiagramm, wobei ein zentraler Schritt (im Sinne eines Modellbildungsprozesses) sicherlich folgende Feststellung sein muss:

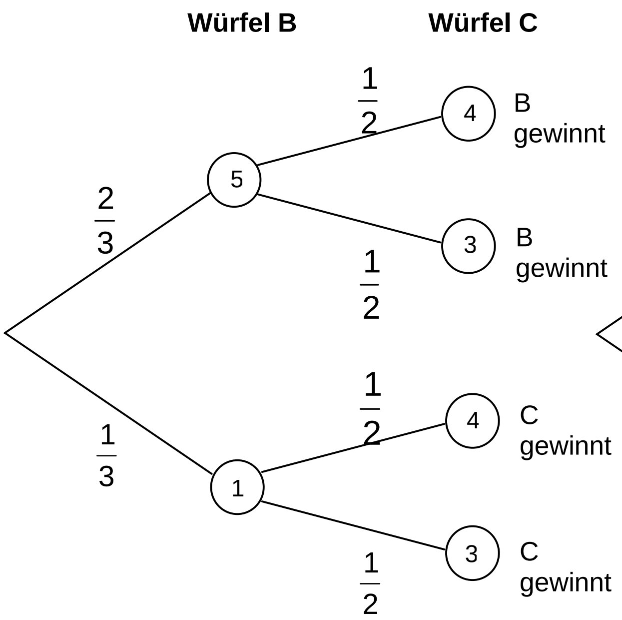
Ein einzelnes Würfelspiel mit diesen Würfeln lässt sich unabhängig von der Art der Versuchsdurchführung (gleichzeitiges Werfen oder Nacheinanderwerfen) als zweistufiger Versuch auffassen.

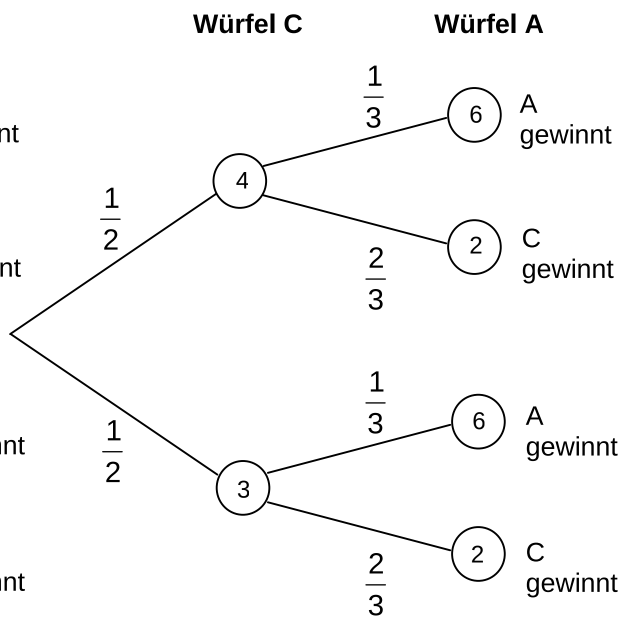
Die Einzelwahrscheinlichkeiten lassen sich über die den Schülerinnen und Schülern bekannte LAPLACE-Regel bestimmen. Schließlich gelangt man bei der Anwendung des Baumdiagramms auf zunächst absolute Häufigkeiten, mit Hilfe des intuitiven Verständnisses von Erwartungswerten für eine große Versuchsanzahl (z. B. 180) zu den beiden Pfadregeln. Dabei ergibt sich im Übrigen auch der Begriff des Ereignisses (z. B. „A gewinnt“) zur Formulierung der Pfadsummenregel zwanglos aus dem Spiel heraus.





Feststellung: P(A gewinnt gegen B) = $\frac{40+40+20}{180} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$

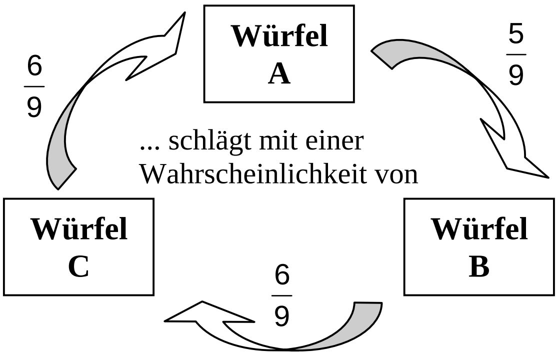




Baumdiagramme für die beiden anderen Würfelpaare:

P(B gewinnt gegen C) = $\frac{6}{9}$ P(C gewinnt gegen A) = $\frac{6}{9}$

Ergebnis



Es gibt zu einem vorgegebenen Würfel immer einen „besseren" Würfel, d. h. die ***optimale Strategie*** lautet:
„Lasse zunächst den Gegner wählen und wähle dann den entsprechend besseren Würfel."

Diese intransitive Relation zwischen den Würfeln mag hier überraschen, aber bei dem Spiel: Stein schlägt Schere, Schere schlägt Papier und Papier schlägt Stein scheint sie uns ganz selbstverständlich. Niemand würde hier auf die Idee kommen, als Erster zu „wählen".

3.4.4 Mögliche Fortsetzungen/Übungen

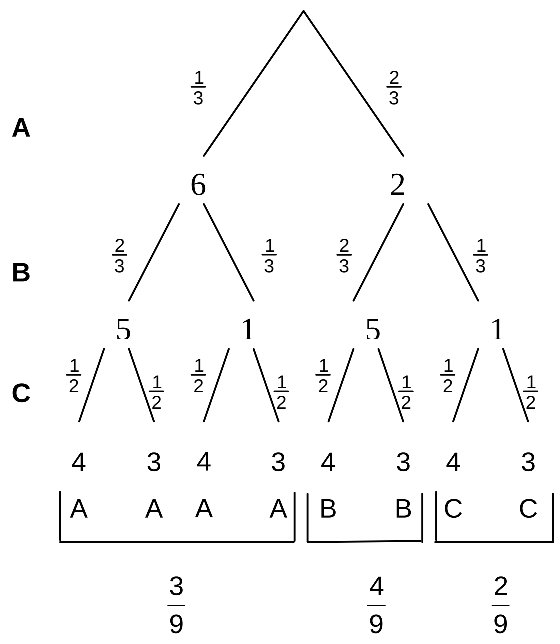
Es werden im Folgenden Aufgaben vorgestellt, die sich als Fortsetzung anbieten. Die jeweilige Kurz-Lösung ist kursiv gedruckt.

1. Entwickle ein Würfelpaar, bei dem ein Würfel mit einer festgelegten Wahrscheinlichkeit (hier p = $\frac{5}{9}$) gegen einen anderen gewinnt!

   Anwendung der Pfadregeln unter einem neuen Blickwinkel. Mögliche Lösung: A: 2/2/4/4/4/4 und B: 5/5/1/1/1/1.

2. Sandra behauptet: „Wenn wir zu dritt je mit einem der oben genannten Würfel spielen, dann gibt es einen besten Würfel". „Was meinst du dazu?"

   Damit wird ein dreistufiges Experiment behandelt, das mit den bekannten Pfadregeln ausgewertet werden kann. Erstaunlicherweise gibt es nun einen besten (B) und schwächsten Würfel (C)!



3. In einer Socke befinden sich 2 schwarze und 4 weiße Kugeln. Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. „Sollte man auf das Auftreten zweier weißer Kugeln wetten?“

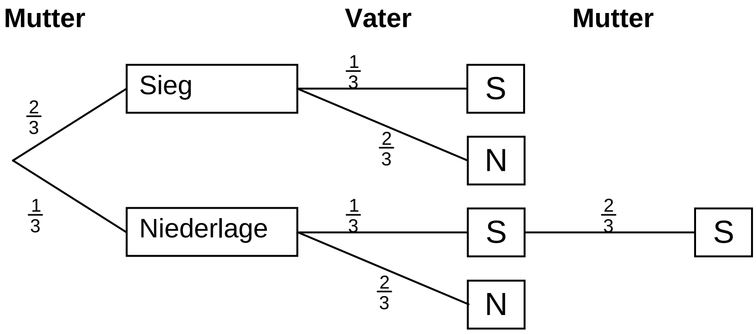
   Das Baumdiagramm ist identisch mit dem allerersten Baumdiagramm zu Würfel A: 6/6/2/2/2/2 gegen Würfel B: 5/5/5/5/1/1, wenn die erste schwarze Kugel als „6“ und die zweite schwarze Kugel als „1“ aufgefasst werden.

4. In einem Gefäß befinden sich zehn Kugeln: neun schwarze und eine weiße. „Du und ein Spielpartner ziehen abwechselnd eine Kugel. Wer die weiße Kugel zieht, gewinnt. Möchtest du mit dem Ziehen beginnen?“

   Es spielt keine Rolle, wer mit dem Ziehen beginnt, was man einem entsprechenden Baumdiagramm entnehmen kann.

5. Im Jahre 2017 soll Jaden Gil einen Sportwagen erhalten, wenn er von drei Tennisspielen abwechselnd gegen Mutter Steffi und Vater Andre zwei in Folge gewinnt. Auf Grund zahlreicher Trainingsspiele weiß Jaden Gil, dass er in der Regel in 2 von 3 Spielen gegen den Vater verliert, aber gegen die Mutter 2 von 3 Spielen gewinnt. Welche Spielreihenfolge soll er wählen?

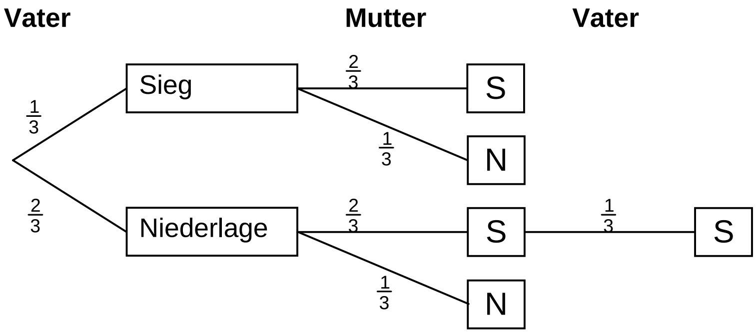
   Intuitiv wird man eher Mutter - Vater - Mutter favorisieren, da damit die schwächere Mutter zweimal spielen muss. Das verkürzte Baumdiagramm zeigt, dass die andere Strategie besser ist:



$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P_{MVM}(E) = \frac{8}{27}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$$



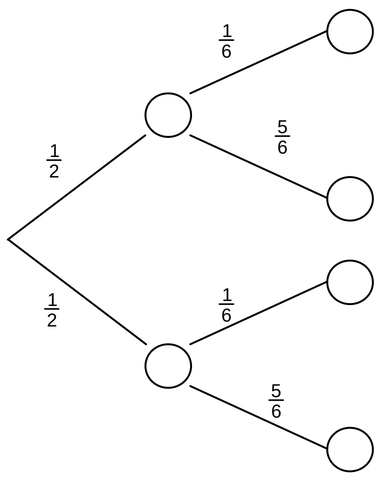
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P_{VMV}(E) = \frac{10}{27}$$

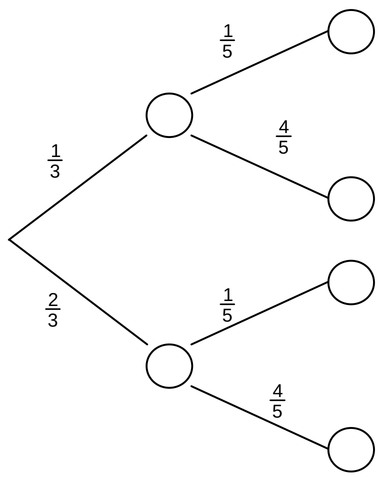
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$$

6. „Entwickle und notiere zu folgenden Baumdiagrammen ein Spiel mit zugehörigen Regeln! Wie lauten die Gewinnwahrscheinlichkeiten?“

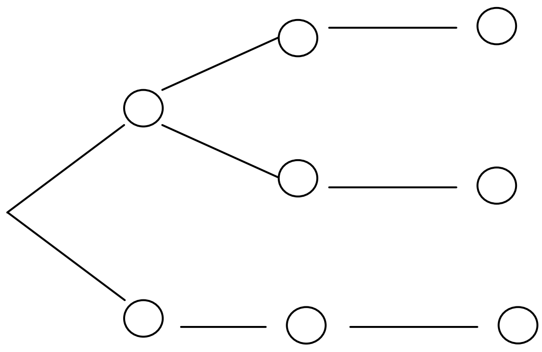
(a)



(b)



(c)



3.4.5 Anlagen

Übersicht über mögliche Netze

Drei Würfel mit A schlägt B schlägt C schlägt A:

A: 6/6/2/2/2/2 ,   B: 5/5/5/5/1/1 ,   C: 4/4/4/3/3/3

A: 6/6/2/2/2/2 ,   B: 5/5/5/5/0/0 ,   C: 4/4/3/3/3/3

A: 6/6/2/2/2/2 ,   B: 5/3/3/3/3/3 ,   C: 4/4/4/4/1/1

Vier Würfel mit A schlägt B schlägt C schlägt D schlägt A:

A: 9/9/3/3/3/3 ,   B: 8/8/8/2/2/2 ,   C: 7/7/7/7/1/1 ,   D: 5/5/6/6/4/4

A: 6/6/2/2/2/2 ,   B: 5/5/5/1/1/1 ,   C: 4/4/4/4/0/0 ,   D: 3/3/3/3/3/3

3.4.6 Literatur

[1] Krämer, W.: Denkste! Trugschlüsse aus der Welt der Zahlen und des Zufalls. Piper Verlag, München 1999[2].

[2] Kütting, H.: Stochastisches Denken in der Schule - Grundlegende Ideen und Methoden. In: Der Mathematikunterricht 1985, 4, S. 87 ff.

[3] PROST - Problemorientierte Stochastik. Stochastik-Sammlung 1, MUED-Schriftenreihe Materialsammlungen. Appelhülsen 1999. [www.mued.de]

3.4.7 Kontakt

Sandra Behsler *s.behsler@web.de*

Dr. Martin Koch *m.b.koch@t-online.de*

Lars Schoppmann *lars.schoppmann@t-online.de*

Dr. Ingo Stübig *ingo.stuebig@t-online.de*

3.5 Erwartungswert - Faires Spiel

Ausgehend von dem Würfelspiel „Chuck your Luck“ wird in einem mehrstufigen Zufallsexperiment der Erwartungswert (der zu erwartende Gewinn) eingeführt. Im Sinne einer didaktischen Reduktion wurden die Originalspielregeln etwas geändert.	
Voraussetzungen: Baumdiagramm - Summenregel - Pfadregel	**Dauer der Unterrichtseinheit:** 4 - 5 Unterrichtsstunden

Gliederung

3.5.1 „Chuck your luck”

1. Stunde

Einstieg

Beschreibung des Spiels
Der Spieler darf eine der 6 Würfelzahlen wählen (hier wurde im Sinne einer didaktischen Reduktion ausschließlich die 6 gewählt) und zahlt einen Euro an die Bank. Der Spieler würfelt mit drei Würfeln. (Im Originalspiel werden nicht Ziffern gewählt sondern Symbole wie Anker und Kronen.)

Als Gewinn werden folgende Quoten „ausgezahlt“:

Ergebnisse	keine 6	eine 6	zwei 6en	drei 6en
Aktion	Geld bleibt bei der Bank	1 € wird gezahlt	2 € werden gezahlt	3 € werden gezahlt
Verlust/Gewinnrechnung	-1 €	0 €	+ 1 €	+ 2 €

Problemstellung

„Würdest du mitspielen? - Wer nimmt die Bank?“

Hypothesenbildung

S: „A nimmt die Bank, weil ...“

Experiment

Spielen in Zweiergruppen; die Ergebnisse werden wie folgt protokolliert:
(15 Arbeitsgruppen mit 50 Spielen liefern 750 Ereignisse)

Summe\Treffer	**keine 6**	**eine 6**	**zwei 6en**	**drei 6en**
Gewinn	-1 €	0 €	+1 €	+2 €
Ergebnisse				
50	27	20	3	0
50	25	19	5	1
50	...	...	...	...
50	...	...	...	...
Summe z. B.	52	39	8	1

(Daten sammeln in Tabellenform; evtl. Einsatz einer Tabellenkalkulation oder des TI-92 mit dem Tabellenkalkulationsmodul; evtl. Säulendiagramme)

Erste Analyse/Beobachtungen

- das Spiel ist ungerecht, weil bei über 50 % aller Spiele das Geld verloren geht, d. h., die Bank gewinnt fast 50 % der Spiele
- nur wenige Spiele liefern Gewinn
- ungefähr 50 % der Spiele sind wertneutral

Vorläufiges Ergebnis

Die Bank gewinnt immer, der Spieler wird „über den Tisch gezogen“.

Hausaufgaben

a) 50 Spiele zu Hause durchführen und protokollieren
b) Wie viel Geld ist eingesetzt worden - wie viel Geld wurde ausgezahlt?

2. Stunde

Einstieg unter Einbeziehung der Hausaufgabe

- evtl. Vergrößerung des Datenmaterials
- neue Erkenntnisse diskutieren
- von 750 eingezahlten Euros werden 370 Euros ausgezahlt

Problemstellung

Wie erkennt man vor dem Geldverlust, ob ein angebotenes Spiel gerecht ist?

Impuls

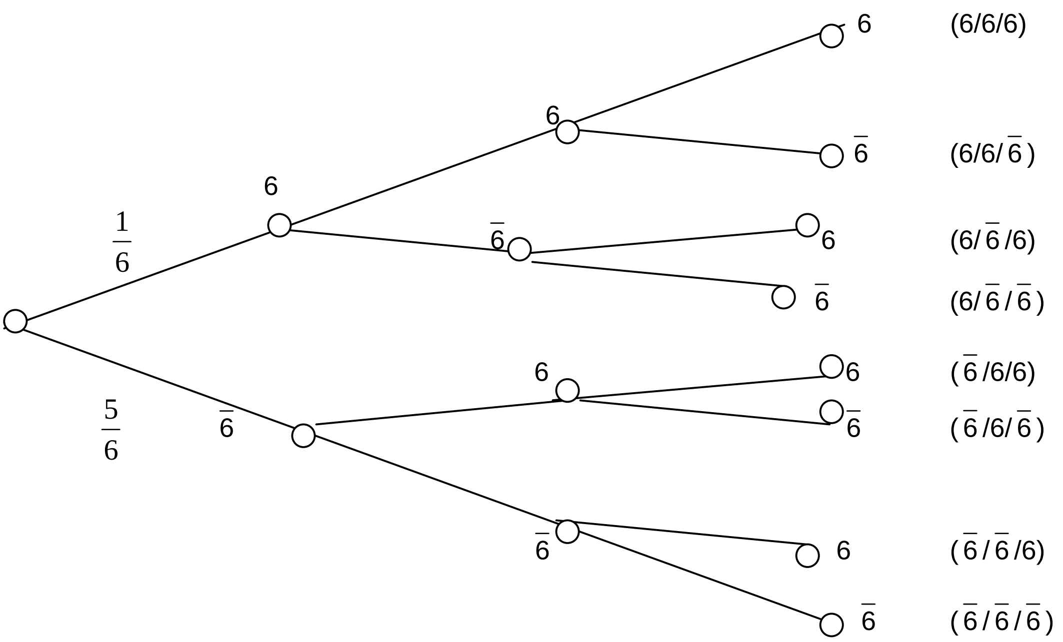
Aktuelle Gesetzeslage: 60 % des eingezahlten Geldes muss ausgezahlt werden.
Die Spielcasinos von Las Vegas werben damit, dass sie 97 % wieder auszahlen.

Problemlösung

- Vorschläge von Schülern einholen
- Ergebnismenge als Liste aufzählen (sie fällt sehr umfangreich aus)
- Baumdiagramm
- Diskussion der Möglichkeiten

Arbeitsphase - Gruppenarbeit

„Finde einen Rechenweg zur Bestimmung des Gewinns."



$p(\bar{6}/\bar{6}/\bar{6}) = \frac{125}{216}$

$p(\bar{6}/\mathit{6}/\bar{6}) = \frac{25}{216}$

$p(\mathit{6}/\bar{6}/\bar{6}) = \frac{25}{216}$

$\mathbf{p}(\mathbf{6}/\mathbf{6}/\bar{6}) = \frac{5}{216}$

$p(\bar{6}/\bar{6}/\mathit{6}) = \frac{25}{216}$

$\mathbf{p}(\bar{6}/\mathbf{6}/\mathbf{6}) = \frac{5}{216}$

$\mathbf{p}(\mathbf{6}/\bar{6}/\mathbf{6}) = \frac{5}{216}$

$p(6/6/6) = \frac{1}{216}$

eine 6: *kursiv*　　　zwei 6en: **Fett**

	keine 6	**eine 6**	**zwei 6en**	**drei 6en**
Gewinn-Verlust	-1 €	0 €	+1 €	+2 €
Wahrscheinlichkeit	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Ergebnissammlung

Die Schülerinnen und Schüler könnten folgende Vorschläge machen:

Bei 216 Spielen ergibt sich:	$-1€ \cdot 125 + 0€ \cdot 75 + 1€ \cdot 15 + 2€ \cdot 1 = -108€$
Bei 50 Spielen ergibt sich:	$-1€ \cdot \frac{125}{216} \cdot 50 + 0€ \cdot \frac{75}{216} \cdot 50 + 1€ \cdot \frac{15}{216} \cdot 50 + 2€ \cdot \frac{1}{216} \cdot 50 = -25€$
Bei 1 Spiel ergibt sich:	$-1€ \cdot \frac{125}{216} + 0€ \cdot \frac{75}{216} + 1€ \cdot \frac{15}{216} + 2€ \cdot \frac{1}{216} = -0{,}5€$
Bei 750 Spielen ergibt sich:	$-1€ \cdot \frac{125}{216} \cdot 750 + 0€ \cdot \frac{75}{216} \cdot 750 + 1€ \cdot \frac{15}{216} \cdot 750 + 2€ \cdot \frac{1}{216} \cdot 750 = -375€$

Diskussion der Lösungswege

Ergebnisformulierung

50 % des eingezahlten Geldes geht verloren. Das Spiel ist unfair.

Hausaufgaben

Man würfelt nun mit zwei Würfeln. Die Regeln entsprechen dem obigen Beispiel.

	keine 6	**eine 6**	**zwei 6en**
Gewinn-Verlust	-1 €	0 €	+1 €

3. Stunde

Hausaufgabe

	keine 6	**eine 6**	**zwei 6en**
Gewinn-Verlust	-1 €	0 €	+1 €
Wahrscheinlichkeit	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

bei einem Spiel ergibt sich	$-1€ \cdot \frac{25}{36} + 0€ \cdot \frac{10}{36} + 1€ \cdot \frac{1}{36} = -\frac{2}{3}€$

Bewertung

Das Spiel ist noch unfairer.

Problemstellung

Wie soll man sich verhalten?

- man spielt nicht mehr
- Regeln werden geändert
- wie kann man das Spiel fair machen?

Hypothesenbildung (Lehrer-Schüler-Gespräch)

Einsatz ändern - Auszahlungsplan ändern - ...
z. B.: 1 € an die Bank zahlen; die Auszahlung um 1 € erhöhen.

	keine 6	**eine 6**	**zwei 6en**	**drei 6en**
Gewinn-Verlust:	-1 €	1 €	+2 €	+3 €
Wahrscheinlichkeit:	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

bei einem Spiel ergibt sich	$-1€ \cdot \frac{125}{216} + 1€ \cdot \frac{75}{216} + 2€ \cdot \frac{15}{216} + 3€ \cdot \frac{1}{216} = -0{,}079€$

Bei einem Spiel beträgt der Verlust im Durchschnitt 8 Cent. Das Spiel ist unfair, aber in Anbetracht der Nebenkosten der „Bank“ akzeptabel.

Arbeitsphase

Die Schülerinnen und Schüler rechnen weitere Beispiele unter Änderung der Regel.

Änderung

0,5 € an die Bank zahlen; die Auszahlung bleibt unverändert.

	keine 6	**eine 6**	**zwei 6en**	**drei 6en**
Gewinn-Verlust	- 0,5 €	+ 0,5 €	+1,5 €	+2,5 €
Wahrscheinlichkeit	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

bei einem Spiel ergibt sich	$-0{,}5 \cdot \frac{125}{216} + 0{,}5€ \cdot \frac{75}{216} + 1{,}5€ \cdot \frac{15}{216} + 2{,}5€ \cdot \frac{1}{216} = 0€$

Das Spiel ist fair.

Änderung

1 € an die Bank zahlen; die Auszahlung verdoppelt sich.

	keine 6	**eine 6**	**zwei 6en**	**drei 6en**
Gewinn-Verlust	-1 €	+1 €	+3 €	+5 €
Wahrscheinlichkeit	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

bei einem Spiel ergibt sich	$-1€ \cdot \frac{125}{216} + 1€ \cdot \frac{75}{216} + 3€ \cdot \frac{15}{216} + 5€ \cdot \frac{1}{216} = 0€$

Das Spiel ist fair.

Änderung

...

Ergebnissicherung

Vorstellung und Bewertung der Schülerergebnisse.
Es gibt Regeländerungen, die das Spiel fair machen.

„Definition“ erwarteter Gewinn

Den zu erwartenden Gewinn pro Spiel berechnet man, indem man die Gewinne bei den einzelnen möglichen Spielergebnissen mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multipliziert und die Produkte dann addiert.

Hausaufgabe

„Verändere die Spielregeln der Hausaufgabe mit den zwei Würfeln so, dass das Spiel fair wird.“

4. Stunde

Besprechung der Hausaufgaben

Lösungsvorschläge der Schülerinnen und Schüler erörtern

3.5.2 Übungsmaterial - Variationen

1. „Augensumme“

   Zwei Würfel werden geworfen und die Augensumme gebildet. Der Einsatz beträgt 80 Cent pro Spiel. Der Spieler erhält nach dem Wurf das 10-fache der Augensumme ausgezahlt.

   a) Berechne den zu erwartenden Gewinn pro Spiel. Untersuche, ob das Spiel fair ist.

   b) Ändere das Spiel so, dass es fair wird.

   <u>Lösung:</u>

   a) Der durchschnittliche Verlust beträgt 10 Cent pro Spiel.

   b) Bei einem Einsatz von 70 Cent wird das Spiel fair.

2. „Pasch-Spiel“ (zwei Würfel)

   Markus schlägt Simone folgendes Würfelspiel vor: Tritt ein Pasch auf, so hat Simone gewonnen und erhält 2 € . Im anderen Fall hat Markus gewonnen und er erhält 1 € .

   a) Simone findet die Regel unfair und fordert 3 € . „Was meinst du dazu?“

   b) Markus bietet eine neue Regel an: Simone erhält beim Pasch 1 1 €, bei Pasch 2 2 €, …. „Begründe deine Meinung.“

   c) „Ändere die Spielregel von b so ab, dass das Spiel fair wird.“

   <u>Lösung:</u>

   a) E(X) = $-\frac{1}{2}$; E(X) = $-\frac{1}{3}$; Simone verringert zwar ihren Verlust, erhält aber immer noch keinen Gewinn.

   b) E(X) = $-\frac{1}{4}$; Simone wird noch immer „über den Tisch gezogen“.

   c) Es bieten sich viele Möglichkeiten an, die diskutiert werden können.

3. „Zeitungskiosk“

   Ein Kioskbesitzer bezieht wöchentlich 3 Exemplare einer selten gekauften Wochenzeitschrift. Die Nachfrage nach diesem Blatt gibt die Figur nach seiner Erfahrung wieder.

Anzahl der nachgefragten Exemplare	kein Exemplar	ein Exemplar	zwei Exemplare	drei Exemplare und mehr
Wahrschein-lichkeit	0,1	0,4	0,3	0,2

Er kauft das Blatt für 1,50 €. Er verkauft es für 2,80 €. Unverkaufte Exemplare kann er nicht zurückgeben.

a) Lohnt sich das Geschäft auf lange Sicht?

b) Ändert sich die Situation zu seinen Gunsten, wenn er nur zwei Exemplare einkauft? Diskutiere die Auswirkungen auf sein Geschäft.

Lösung:

a) Auf lange Sicht macht er einen Verlust von 2 Cent.

b) Wenn er nur zwei Zeitungen bezieht, wird er langfristig einen Gewinn von 92 Cent haben.

3.5.3 Klassenarbeitsaufgaben

1. „Ölsuche“

Eine Ölgesellschaft steht vor folgender Entscheidung: Sie kann sich in zwei verschiedenen Ölfeldern die Bohrrechte sichern.

Bohrfeld	Wahrscheinlichkeit, Öl zu finden	Gesamtgewinn nach Abzug der Kosten, wenn Öl gefunden wird	Kosten, die immer entstehen
Ölfeld 1	0,6	600 000 €	100 000 €
Ölfeld 2	0,8	400 000 €	50 000 €

Lösung:

erwarteter Gewinn bei Feld 1: 600 000 · 0,6 – 100 000 · 0,4 = 320 000

erwarteter Gewinn bei Feld 2: 400 000 · 0,8 – 50 000 · 0,2 = 310 000

Die Gesellschaft wird sich für das erste Feld entscheiden

Zur Verkürzung der Aufgabe kann der Erwartungswert für das 2. Feld vorgegeben werden.

2. „Die böse 3“

Beim Würfelspiel „Die böse 3“ beträgt der Einsatz 3 €. Dann werden zwei Würfel geworfen. Fällt keine „3“, so erhält der Spieler 6 € ausgezahlt. Fällt genau einmal die „3“, so geht der Einsatz an die Bank. Fallen zwei „3en“, muss er weitere 3 € an die Bank zahlen.

a) Erstelle ein geeignetes Baumdiagramm! Berechne den erwarteten Gewinn pro Spiel!

b) Begründe, dass das Spiel unfair ist! Verändere die Regeln des Spiels so, dass das Spiel fair wird!

<u>Lösung:</u>

	keine 3	**eine 3**	**zwei 3en**
Gewinn-Verlust	+3 €	-3 €	-6 €
Wahrscheinlichkeit	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

bei einem Spiel ergibt sich	$3€ \cdot \frac{25}{36} - 3€ \cdot \frac{10}{36} - 6€ \cdot \frac{1}{36} = +\frac{39}{36}$ €

Die Bank verliert. Für die Spieländerung ergibt es viele Möglichkeiten.

3. „Karten ziehen“

Aus einem Kartenpack mit 3 Buben, 2 Damen und 4 Königen werden nacheinander 2 Karten ohne Zurückstecken gezogen.

a) Zeichne ein Baumdiagramm!

b) Bestimme Ergebnismenge und Wahrscheinlichkeitsverteilung!

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist bei den zwei Zügen wenigstens eine Dame dabei?

<u>Verkürzte Lösung:</u>

a) Baumdiagramm wie immer

b)

Ereignisse	**BB**	**BD**	**BK**	**DB**	**DD**	**DK**	**KB**	**KD**	**KK**
Wahrscheinlichkeit	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$

c) Folgende Ereignisse erfüllen die geforderte Bedingung: BD, DB, DD, DK, KD

Mit Benutzung der Summenregel ergibt sich die Wahrscheinlichkeit P= $\frac{1}{12}$

4. „Spielautomat“

Dauert ein Spiel zwischen 30 und 60 Sekunden, muss der wieder ausgezahlte Betrag 70% des Einsatzes betragen.

Ausgezahlter Betrag	**0,00 €**	**0,10 €**	**0,20 €**	**0,50 €**	**1 €**	**2 €**
Wahrscheinlichkeit	$\frac{63}{100}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$

a) Zeige, dass bei einem Einsatz von 0,20 € die gesetzliche Bestimmung nicht erfüllt ist!

b) Wie muss der Einsatz qualitativ verändert werden, damit die gesetzliche Auflage erfüllt ist? Erläutere deine Überlegungen!

Verkürzte Lösung:

Der erwartete Gewinn pro Spiel beträgt - 0,1 €, d. h. er verliert von seinem Einsatz die Hälfte. Die gesetzliche Auflage ist nicht erfüllt. Um die gesetzliche Auflage zu erfüllen, hätte man nur 0,06 € pro Spiel verlieren dürfen, d. h. der erwartete Gewinn muss - 0,06 € betragen.
Der Einsatz muss verringert werden.

3.5.4 Literatur

[1] Cukrowicz, J., Zimmermann, B. (Hrsg.): MatheNetz 8. Westermann Verlag, Braunschweig 2000.

[2] Schönbeck, I., Schupp, H. (Hrsg.): Plus; Mathematisches Unterrichtswerk, Klasse 9. Schöningh Verlag, Paderborn 1978.

[3] Schmid, A., Schweizer, W.: Lambacher-Schweizer, Stochastik Grundkurs. Klett Verlag, Stuttgart 1986.

3.5.5 Kontakt

Ulrich Kuhlmann *Ulli.Kuhlmann@t-online.de*

Werner Riedel *Werner_Riedel@t-online.de*

Renate Rathje

4 Rückwärtsschließen im Baumdiagramm

Hinweise

Es gibt grundsätzlich unterschiedliche Ansätze, diesen Baustein zu behandeln. Da ist zunächst das Konzept, nur innerhalb eines Baumdiagramms rückwärts auf die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen zu schließen. Andererseits kann man auch in stochastisch iterativen Prozessen mit dem Satz von Bayes den Zugewinn an Sicherheit bei der Beurteilung von Hypothesen berechnen. Insbesondere für diese iterative Betrachtungsweise sind die vorgestellten elektronischen Werkzeuge sinnvoll und notwendig. Die dahinter liegenden Programme können im Unterricht exemplarisch entwickelt werden. Sie sind gut geeignet, die Struktur der Iteration aufzuzeigen.

In den Titeln der einzelnen Unterkapitel wird der Ansatz bereits deutlich:
In dem Kapitel *Vom Experiment zur Realsituation* wird am Experiment handlungsorientiert auf der Basis von Baumdiagrammen ein Werkzeug zur Beurteilung realer Vorgänge bzw. der in den Medien publizierten Fehler entwickelt.
In dem Kapitel *Bayes Iteration* soll anhand einer Aufgabe aus dem Glücksspielbereich durch iteratives Nutzen neuer Informationen (wiederholtes Anwenden der Regel von Bayes) die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit einer zu treffenden Entscheidung erhöht werden.
In *Einsatz von Tabellenkalkulation und GTR* werden Programme (Excel und TI-83) zur algebraischen Bearbeitung und graphischen Aufbereitung von Problemen aus dem Bereich der Bayes Iteration vorgestellt.
Im Kapitel *Vom Problem zum Werkzeug* werden neben Verfahren, die auf der Betrachtung von absoluten und relativen Zahlen in Baumdiagrammen basieren, auch Vierfeldertafeln als Prognoseinstrument entwickelt. Hierbei werden unterschiedliche Zugänge bzgl. absoluter und relativer Häufigkeiten vorgestellt.
In dem Kapitel *Schätzen und Berechnen von Bayes-Wahrscheinlichkeiten* wird zunächst die subjektive Behandlung des Problemfeldes angesprochen, bevor auf der Basis der Baumdiagramme der umgekehrte Wahrscheinlichkeitsbaum als Mittel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten erarbeitet wird.
In allen Beiträgen wird auf eine rein formale Betrachtung der Bayes-Theorie zu Gunsten einer handlungsorientierten Behandlung verzichtet. Die schülernahe und realitätsbeschreibende Untersuchung entsprechender Problemsituationen steht hierbei stets im Vordergrund.

Kontakt

Heiko Knechtel *HKnechtel@aol.com*

4.1 Rahmenrichtlinien - Baustein „Rückwärtsschließen im Baumdiagramm“

Von grundlegendem Interesse für alltägliches Denken ist die Möglichkeit, von einem Ereignis auf ein anderes rückzuschließen und sich der dabei möglichen Fehlschlüsse bewusst zu sein. Die dazu erforderlichen Überlegungen sollen unter Ausnutzung der bereits bekannten Pfadregeln auf intuitive Weise zu der Bayes-Formel führen, ohne dass der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit explizit formuliert bzw. formal behandelt wird.

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses unter der Voraussetzung einer vermuteten Ursache („günstig für das Ereignis“) und die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses („möglich für das Ereignis“) werden mithilfe von Baumdiagrammen veranschaulicht und nachvollziehbar. Durch Bilden des Quotienten, ähnlich wie bei der Laplace-Wahrscheinlichkeit $\frac{p(\text{"günstig für das Ereignis"})}{p(\text{"möglich für das Ereignis"})}$, erhält man eine vereinfachte Form der Bayes-Regel, die für die Schülerinnen und Schüler dieser Altersstufe gut handhabbar ist.

Bei konkreten Berechnungen ist es häufig anschaulicher, mit absoluten Häufigkeiten zu arbeiten. Die Vierfeldertafel ist daher neben dem Baumdiagramm ein gleichwertiges, zugleich ergänzendes Werkzeug.

Neue Einsichten oder Beobachtungen führen manchmal zu der Erkenntnis, dass Entscheidungen revidiert werden müssen. Die bereits in den Klassenstufen 7 und 8 erfahrene Einsicht, dass sich geschätzte „Wahrscheinlichkeiten“ auf Grund neuer Informationen ändern können, führt hier durch das wiederholte Anwenden des entsprechenden Prozesses zu veränderten Wahrscheinlichkeitswerten, die schrittweise die Sicherheit der Aussagen erhöhen. Dadurch wird das Abwägen des Risikos von Fehlentscheidungen möglich.

Inhalte und Verfahren	**Hinweise**
Darstellung in Baumdiagrammen unter Verwendung von Häufigkeiten Berechnung der benötigten Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln „Umkehrung" der Blickrichtung als heuristische Strategie Anwendung der vereinfachten Bayes-Formel Berechnung von geschätzten „Wahrscheinlichkeiten“ in mehrstufigen Prozessen Verbesserung von Hypothesen durch Informationszuwachs.	VERNETZUNG langfristige Vorbereitung auf Fragestellungen der beurteilenden Statistik (3.3.2) DIDAKTIK/METHODIK Darstellung des Alltagsproblems in Häufigkeitsrastern elektronische Hilfsmittel für das wiederholte Anwenden der Bayes-Formel (Vorhersagen unter Unsicherheit)

(aus: Niedersächsisches Kultusministerium: Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, Schuljahrgänge 7-10, Mathematik. Anhörfassung 2002, Seite 26)

4.2 Vom Experiment zur Realsituation

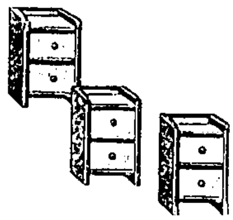
<table>
<tr><td colspan="2">Der gewählte Einstieg in die Unterrichtseinheit soll den Schülerinnen und Schülern einen intuitiven Zugang zur Thematik ermöglichen. Die wiederholte Ausführung eines Experimentes soll dazu verhelfen, ein Gefühl für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und ihre Veränderung von Stufe zu Stufe zu entwickeln.
Dabei können wichtige Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (a-priori-, a-posteriori-, Irrtumswahrscheinlichkeit) zur Sprache kommen oder zumindest propädeutisch erarbeitet werden. Es geht an dieser Stelle nicht darum, die Bayes-Formel zu entwickeln. Zur Visualisierung der gefundenen Zusammenhänge werden vereinfachte Bayes-Diagramme und geeignete Tabellen benutzt.
Das Einstiegs-Experiment ist eine Abwandlung des Bertrand´schen Schubladenproblems.
Die Bearbeitung realer (Test-)Situationen schließt sich an.</td></tr>
<tr><td>Unterrichtsorganisation:
• Problemorientierung, Realitätsbezug, Modellierung, Verbalisierung
• Öffnen von Lernsituationen, variationsreiches Üben, verbunden mit Eigentätigkeit</td><td>Dauer der Unterrichtseinheit:
5 - 6 Unterrichtsstunden</td></tr>
<tr><td>Besondere Materialien/Technologie:
Socken als Urnen
ggf. graphikfähiger Taschenrechner, Taschencomputer oder Computer mit Simulationsprogrammen</td><td>Notwendige Vorkenntnisse:
Baumdiagramm und Pfadregeln</td></tr>
</table>

Gliederung

4.2.1 Bertrands Schubfachproblem und Bayes-Diagramme

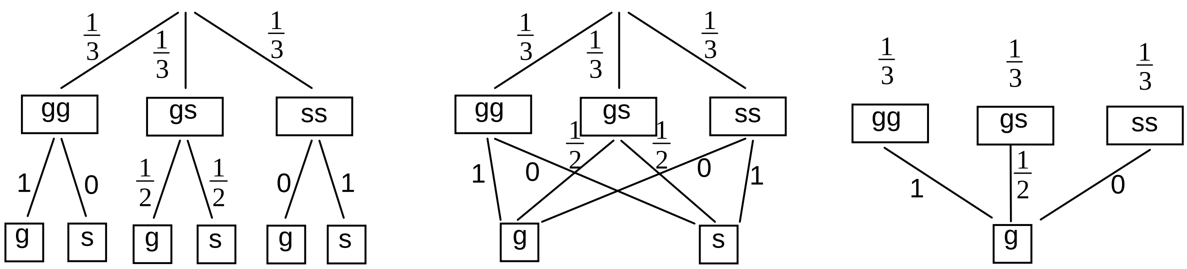
Zu Beginn werden das Bertrand´sche Schubfachproblem und das Hilfsmittel „Bayes-Diagramm“ vorgestellt (nach Lit. [2]).

Bertrand hat drei gleich aussehende Schränke mit je zwei Schubladen. In jeder Schublade liegt eine Münze.
Im ersten Schrank gg enthalten beide Schubladen Goldmünzen, im zweiten Schrank gs liegt eine Gold- und eine Silbermünze. Im dritten Schrank ss enthalten die beiden Schubladen Silbermünzen.
Du wählst zufällig ein Schränkchen und darin eine Schublade aus und siehst nach dem Öffnen eine Goldmünze. Wie groß ist nach dieser Entdeckung die Wahrscheinlichkeit, dass auch die zweite Schublade eine Goldmünze enthält?



Zur Veranschaulichung der Situation dienen das Baumdiagramm, das reduzierte Baumdiagramm und das Bayes-Diagramm, in welchem nur das tatsächlich beobachtete Indiz interessiert.

Baumdiagramm: reduziertes Baumdiagramm: Bayes-Diagramm:



4.2.2 Erstes Experiment

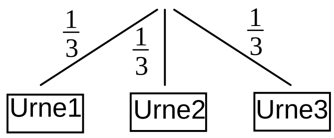
Als erstes Experiment kann entweder das unten ausgeführte „Sockenexperiment“ oder die Version „Sockenspiel“ (siehe „Aufgaben- und Arbeitsblätter“, S. 146) durchgeführt werden.
Die Variante mit dem Spiel bietet den Vorzug, dass nicht sofort eine der Auswahlmöglichkeiten aus der weiteren Betrachtung herausfällt und obendrein die Wiederholung des Experiments qua Spielidee begründet wird.
Natürlich kann auch das unten aufgeführte „Sockenexperiment“ in einer Spielversion durchgeführt werden.

Das „Sockenexperiment“ liefert sehr übersichtlich die Ideen zur Lösung des Problems.
Die Beschreibung des Experimentes und die Durchführung erfolgt im Klassengespräch.

Drei Urnen sind mit Euro- und Centmünzen gefüllt. In Urne 1 befinden sich 10 Euromünzen. In Urne 2 sind 5 Euro- und 5 Centmünzen. Urne 3 ist mit 10 Centmünzen gefüllt.

Eine Urne wird verdeckt ausgewählt. Eine Münze wird gezogen und zunächst nicht gezeigt. Die Schülerinnen und Schüler sollen entscheiden, aus welcher Urne das Geldstück stammt.

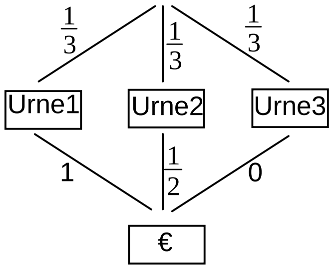
Die Schülerinnen und Schüler werden relativ schnell erkennen, dass alle Urnen mit gleicher Chance ausgewählt werden könnten:



Erst jetzt wird die Art der gezogenen Münze genannt.

<u>(Die folgende Betrachtung geht von einem gezogenen Euro aus.)</u>
Die Schülerinnen und Schüler sollen nun zu den Chancen erneut Stellung nehmen; ggf. revidieren sie ihre vorherige Ansicht. Es ist klar, dass dabei eine Urne herausfällt, in diesem Beispiel die ausschließlich mit Centstücken gefüllte.
Es wird sich ein zweigeteiltes Meinungsbild ergeben: Die einen Schülerinnen und Schüler werden sagen, dass sich die Chancen gleich verhalten; die anderen werden der Euro-Urne höhere Chancen geben.

Bei der Erarbeitung der Lösung wird in einer neuen Diagrammdarstellung (Bayes-Diagramm) die Situation dargestellt und das Chancenverhältnis von 2:1 ablesbar. Gleichzeitig wird in einer Tabelle eine Übersicht begonnen, die die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen „H_i: Das Geldstück kommt aus Urne U_i“ enthält.



	H_1	H_2	H_3
Vorher-Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Nachher-Wahrscheinlichkeit	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

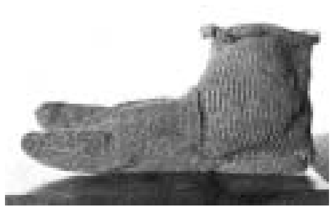
P(€ und aus Urne 1) = $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

P(€ und aus Urne 2) = $\frac{1}{6}$

P(€ und aus Urne 3) = 0

An dieser Tabelle soll deutlich werden, dass sich die Wahrscheinlichkeiten geändert haben. Aus dem Unterrichtsgespräch müsste sich ergeben, dass die Hypothese H_1 vorzuziehen ist, aber auch mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ falsch ist. Ggf. kann jetzt schon der Begriff der Irrtumswahrscheinlichkeit eingeführt werden.
Diese Unsicherheit legt eine Wiederholung des Experiments nahe. (Es sollte das vorher gezogene Geldstück wieder in der Urne sein - „Ziehen mit Zurücklegen“!)

Wiederholung des Experimentes (2. Stufe):

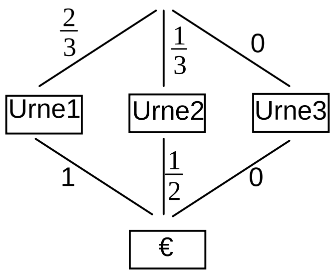


Aus der ausgewählten Urne wird wieder ein Geldstück gezogen und die Art wie zuvor nicht genannt.
Die Schülerinnen und Schüler sollen wieder entscheiden, aus welcher Urne das Geldstück stammt.

Jetzt müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Wahrscheinlichkeiten für die H_i am Ende des ersten Zuges (Nachher-Wahrscheinlichkeiten) zu neuen Wahrscheinlichkeiten vor dem jetzigen Zug werden (Vorher-Wahrscheinlichkeiten).

Fortsetzung des Experimentes:

Die Art des gezogenen Geldstücks wird nun genannt.
Je nach Versuchsergebnis ergibt sich Sicherheit (bei gezogenem Centstück) oder ein neues Chancenverhältnis. Im Diagramm und mit Ergänzung der Tabelle ergibt sich im Falle „€“-„€“ ein Verhältnis von 4:1.



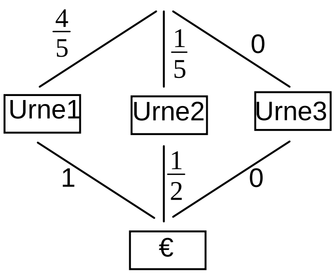
	H_1	H_2	H_3
Vorher-Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Nachher-Wahrscheinlichkeit Vorher-Wahrscheinlichkeit	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
Nachher-Wahrscheinlichkeit	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0

P(€ und aus Urne 1) = $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

P(€ und aus Urne 2) = $\frac{1}{6}$

P(€ und aus Urne 3) = 0

Das Experiment kann man noch einmal durchführen und kommt zu folgendem Ergebnis:



	H_1	H_2	H_3
Vorher-Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Nachher-Wahrscheinlichkeit Vorher-Wahrscheinlichkeit	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
Nachher-Wahrscheinlichkeit Vorher-Wahrscheinlichkeit	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
Nachher-Wahrscheinlichkeit	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$	0

P(€ und aus Urne 1) = $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$

P(€ und aus Urne 2) = $\frac{1}{10}$

P(€ und aus Urne 3) = 0

Eine weitere Fortsetzung ist nicht ratsam, da die Zahlenverhältnisse nicht mehr so einfach überschaubar und einfach auswertbar sind.

Ziele der Stunde sind

- intuitive Erfahrung der Veränderung der Wahrscheinlichkeiten
- Unterscheidung von „Vorher-Wahrscheinlichkeiten“ und „Nachher-Wahrscheinlichkeiten“
- Erkenntnis, dass die gestellte Frage u. U. nur unter Hinnahme einer gewissen Irrtumswahrscheinlichkeit möglich ist

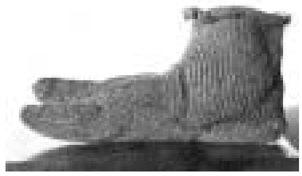
Mögliche Hausaufgabe

10 weitere Eurostücke kommen ins Spiel. Sie werden

a) in die Urne mit den Eurostücken gelegt

b) in einer vierten Urne hinzugefügt

„Untersuche die veränderte Situation wie im Unterricht.
Betrachte dabei die Zugfolge „€“-„€“-„€“ und beliebig weitere!“



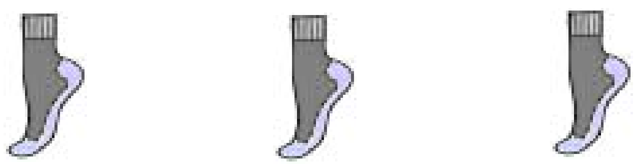
4.2.3 Zweites Experiment

Bei der Besprechung der Hausaufgabe sollte deutlich werden, dass die Anzahl der Eurostücke in Urne 1 irrelevant für die Lösung des gestellten Problems ist. Ggf. kann angesprochen werden, dass das Hinzufügen der 10 neuen Eurostücke in Urne 2 sehr wohl eine Abänderung der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zur Folge hätte.
Im Fall b) sollte darauf hingewiesen werden, dass im Bayes-Diagramm keine vier Verzweigungen nötig sind, sondern die Darstellung mit drei Verzweigungen, bei denen sich die „Vorher-Wahrscheinlichkeit“ für Urne 1 vor dem ersten Zug auf 0,5 und die für die Urnen zwei und drei jeweils auf 0,25 verändert haben, nach wie vor geeignet ist.

Zur Festigung und Variation der bisher erarbeiteten Sachverhalte folgt nun das zweite Experiment:

Drei nicht unterscheidbare Urnen sind mit Geldstücken bestückt:

Urne 1 **Urne 2** **Urne 3**



Urne 1 enthält 7 Euro- und 3 Centstücke, Urne 2 beinhaltet 5 Euro- und 5 Centstücke, in Urne 3 sind 3 Euro- und 7 Centstücke. Eine Urne wird ausgewählt, ein Geldstück daraus gezogen und die Art bekannt gegeben.

Die Frage lautet wieder:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt das Geldstück aus Urne 1, 2 oder 3?

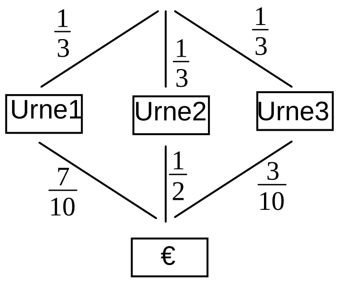
Das Ziehen eines Geldstücks soll anschließend (ohne Wechseln der Urne) zweimal wiederholt werden.

Dieses zweite Experiment unterscheidet sich dadurch von dem vorhergehenden, dass auch bei mehrfacher Iteration keine Alternativen wegfallen.

In Gruppenarbeit sollten die Schülerinnen und Schüler von Stufe zu Stufe diskutieren, für welche der Hypothesen sie sich entscheiden und wie groß dabei jeweils das Risiko einer Fehlentscheidung ist. Es bietet sich an, bei der anschließenden Auswertung auf die Anzahl und Aussagekraft der verschiedenen Zugfolgen einzugehen. Die Schätzwerte sollten anschließend durch Rechnung überprüft und die Ergebnisse auf einem entsprechenden Arbeitsblatt (siehe „Aufgaben- und Arbeitsblätter“, Seite 147) festgehalten werden.

Eine mögliche Lösung ist:

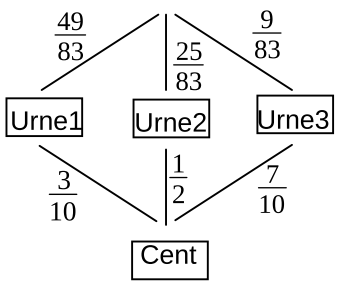
1. Iterationsschritt („“)



P(€ und aus Urne 1) = $\frac{7}{30}$	P(€ und aus Urne 2) = $\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$	P(€ und aus Urne 3) = $\frac{3}{30}$

2. Iterationsschritt (Es wird „“ gezogen. Das Diagramm wird hier nicht dargestellt.)

3. Iterationsschritt („“)



P(Cent und aus Urne 1) = $\frac{147}{830}$	P(Cent und aus Urne 2) = $\frac{125}{830}$	P(Cent und aus Urne 3) = $\frac{56}{830}$

Mögliche Hausaufgabe

siehe Hausaufgabe „Würfel“ (in „Aufgaben- und Arbeitsblätter“, Seite 149)

4.2.4 Tests und ihre Probleme

Das rückwärtige Schließen im Baumdiagramm findet seine praktische und relevante Anwendung in der Konstruktion und Durchführung von Tests zur Erkennung seltener Krankheiten.
Diese Tests finden mit hoher Zuverlässigkeit Infizierte unter den Untersuchten und klassifizieren mit hoher Sicherheit Nicht-Infizierte als solche. Trotzdem hat ein positives Testergebnis bei einem Test eine hohe Fehlerquote. Dieser Sachverhalt soll aufgeklärt und die Empfehlung für einen zweiten Test begründet werden. Die Frage nach einer Wiederholung des Tests bietet einen Einstieg in eine iterative Betrachtungsweise (vgl. Lit. [3] und Lit. [4]).
(Die Darstellung des Lösungsgangs beschränkt sich hier im Wesentlichen auf das Baumdiagramm und die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Ausführliche Erläuterungen und Begründungen zu Darstellungsformen finden sich im Teil „Werkzeug“ zum Baustein 4.4, Seite 172-179 in diesem Band.)!

<u>BSE - Schnelltests</u>

Seit November 2000 muss bei geschlachteten Rindern über 30 Monaten ein Schnelltest auf BSE durchgeführt werden.
Frankreich hatte „seinen“ BSE-Skandal schon ab Mitte 2000. Gemäß „Weser Kurier“ vom 12.12. 2000 teilte die französische Behörde für Verbraucherschutz mit, dass sich nach Auswertung der bis dahin durchgeführten 15.000 Schnelltests eine Erkrankungsrate von 2 von 1.000 Tieren ergeben habe.
Nehmen wir an, dass diese Daten auch für Deutschland zutreffen.
Nehmen wir weiter an, dass ein Schnelltest mit 98,5 %iger Wahrscheinlichkeit eine Infektion als solche erkennt und mit 99,9 %iger Wahrscheinlichkeit die Nicht-Infektion diagnostiziert.

a) „Kläre“ die Bedeutung der Begriffe „Testsensitivität“ und Testspezifität“!
b) Gib ohne zu rechnen vorab eine Einschätzung: sind Positiv-Fehldiagnosen ungewöhnlich selten und nicht beachtenswert oder kommen sie häufiger vor?
c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Test positiv oder negativ ausfällt!

d) **Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Rind mit negativem Testergebnis tatsächlich erkrankt?**

e) **Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Rind mit negativem Testergebnis tatsächlich nicht erkrankt?**

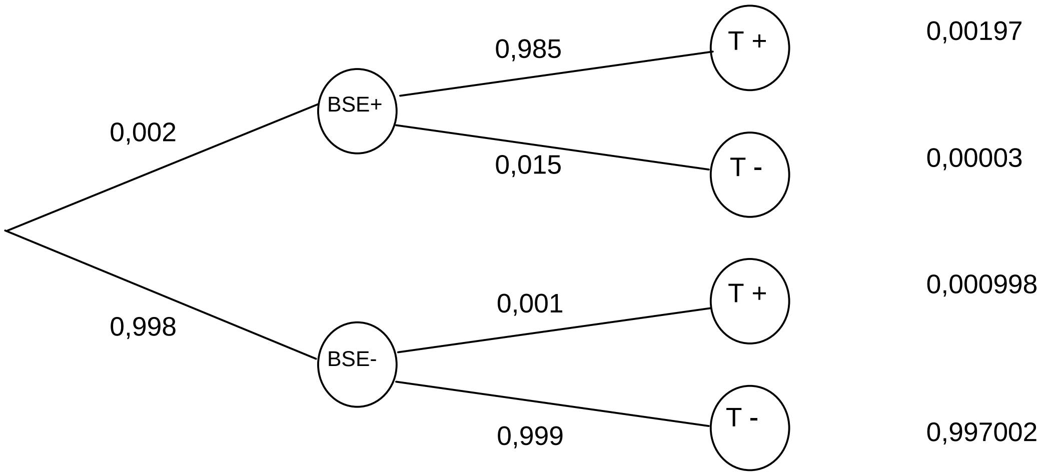
f) **Welche Folgerungen sind aus den letzten beiden Punkten bezüglich der Frage: „Was leistet ein Schnelltest und was leistet er nicht ?“ zu ziehen. Welche Konsequenzen hat das?**

Die Angaben bezüglich der Sensitivität und Spezifität von BSE-Schnelltests sind angenommene Werte. Sie sind so gewählt, dass sie mit den bislang bekannten Ergebnissen nicht im Widerspruch stehen. Auf Anfrage teilte das Bundesministerium für Verbraucherschutz, Ernährung und Landwirtschaft im März 2001 mit: „Bei Sicherheit von BSE-Tests handelt es sich um sensible Daten. Diese werden zur Zeit nicht veröffentlicht.“

Eine erste Bewertung der Testdaten legt nahe, dass der BSE-Schnelltest wohl tauglich ist, man ihm mit akzeptablen Unsicherheiten trauen kann.

Liefert er jedoch die Sicherheiten, die wegen bevölkerungspolitischer und individueller Konsequenzen zu fordern sind?

Klärung liefert hier ein Baumdiagramm mit den angegebenen Pfadwahrscheinlichkeiten:



Darin bedeutet:

BSE +: es liegt eine BSE-Infektion vor

T +: das Testergebnis ist „positiv“

BSE -: es liegt keine BSE-Infektion vor

T -: das Testergebnis ist „negativ“

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Test positiv bzw. negativ ausfällt, ist demnach:

P(Test positiv)= $0{,}002 \cdot 0{,}985 + 0{,}998 \cdot 0{,}001 = 0{,}002968$

P(Test negativ)= $0{,}002 \cdot 0{,}015 + 0{,}998 \cdot 0{,}999 = 0{,}997032$

Ist das ein beruhigendes Ergebnis?
Schauen wir dazu genauer hin:
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Tier mit negativem Testergebnis in Wirklichkeit erkrankt ist, beträgt

$$P(BSE+ / T-) = \frac{0{,}00003}{0{,}002 \cdot 0{,}015 + 0{,}998 \cdot 0{,}999} \approx 0{,}00003.$$

Also, wir können beruhigt sein! Der Test klassifiziert mit hoher Sicherheit Nicht-Infizierte als solche!
Wie sieht es aber bei der umgekehrten Fragestellung aus?
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Tier mit positivem Testergebnis in Wirklichkeit nicht erkrankt ist, beträgt

$$P(BSE- / T+) = \frac{0{,}000998}{0{,}002 \cdot 0{,}985 + 0{,}998 \cdot 0{,}001} = 0{,}33625.$$

In zirka einem Drittel aller Fälle ist ein Rind bei positivem Testergebnis tatsächlich aber nicht erkrankt!

Fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, dass ein Tier mit positivem Testergebnis tatsächlich erkrankt ist, so ergibt sich

$$P(BSE+ / T+) = \frac{0{,}00197}{0{,}002 \cdot 0{,}985 + 0{,}998 \cdot 0{,}001} = 0{,}66375.$$

Ein Tier mit negativem Testergebnis ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(BSE- / T-) = \frac{0{,}997002}{0{,}002 \cdot 0{,}015 + 0{,}998 \cdot 0{,}999} = 0{,}9999699$$

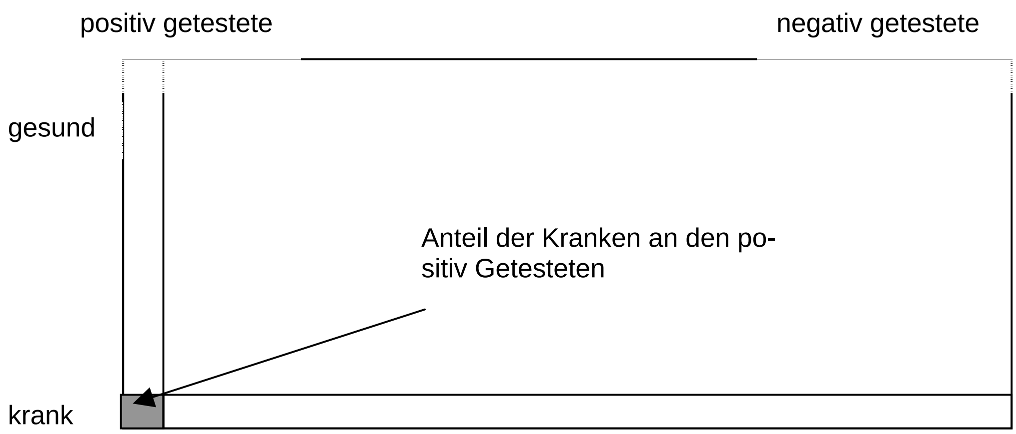
tatsächlich nicht erkrankt.

<u>Zur Verdeutlichung der Situation, ein neuer Anlauf mit absoluten Zahlen!</u>
Nehmen wir an, 1 Million Rinder werden getestet. Von diesen sind im Durchschnitt 2000 BSE-infiziert, die restlichen 998.000 Rinder sind gesund. 98,5 % aller 2000 Infizierten erfasst der Test, mit 1970 also fast alle. Zur Diagnose der Infektion bei tatsächlich Infizierten ist der Test sehr gut tauglich.
Von den Nicht-Infizierten 998.000 Rindern werden 0,1%, also rund 1000 Rinder, irrtümlich als BSE-infiziert diagnostiziert. Das bedeutet zwar 99,9 % richtige Testergebnisse, aber doch auch eine hohe Zahl von Test-Fehlurteilen. Von den 2970 „positiven“ Testergebnissen stimmen nur 1970, das sind 66,3 %. Die restlichen rund 33,7 % sind falsch.
Die folgende Tabelle zeigt, wie diese Überlegungen aussehen, werden sie als Vierfelder-Tafel mit absoluten Häufigkeiten geschrieben:

	Test positiv	Test negativ	Summe
BSE infiziert	1.970	30	2.000
BSE nicht infiziert	1000	997.000	998.000
Summe	2.970	997.030	1.000.000

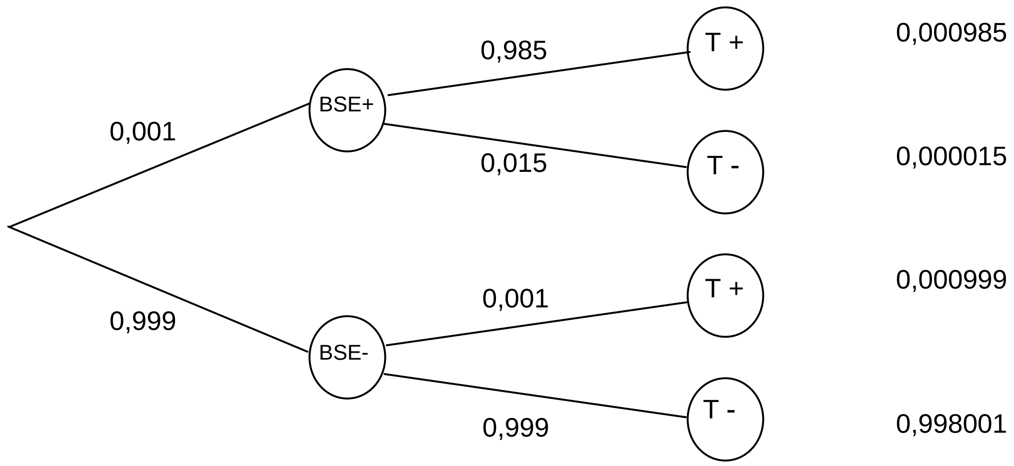
Mit Hilfe der Tabelle können die Schülerinnen und Schüler eine Bewertung ihrer oben gemachten subjektiven Einschätzung vornehmen.

Zur Vermeidung von Fehleinschätzungen bei derartigen Testverfahren können alle Pfade des Baumdiagramms analysiert und in der folgenden, **nicht maßstäblichen** Weise visualisiert werden.



Man kann so erkennen, dass die Krankheit bei „sehr vielen“ der tatsächlich Erkrankten auch erkannt und nur bei „sehr wenigen“ der Gesunden fälschlich diagnostiziert wird. Es gibt aber trotzdem „ein Vielfaches mehr“ gesunde Personen als kranke mit positiven Testergebnis. Auch der Grund hierfür wird offensichtlich: es gibt viel mehr Gesunde als Kranke.
Auf der Grundlage dieser Erkenntnis kann auch über den Nutzen flächendeckender Vorsorgeuntersuchungen diskutiert werden.

Es stellt sich die Frage, welche Auswirkungen eine Halbierung der „Durchseuchungsrate“ auf 1 Promille hätte. Wieder liefert das Baumdiagramm die Antwort:



Die interessierenden Wahrscheinlichkeiten sind damit

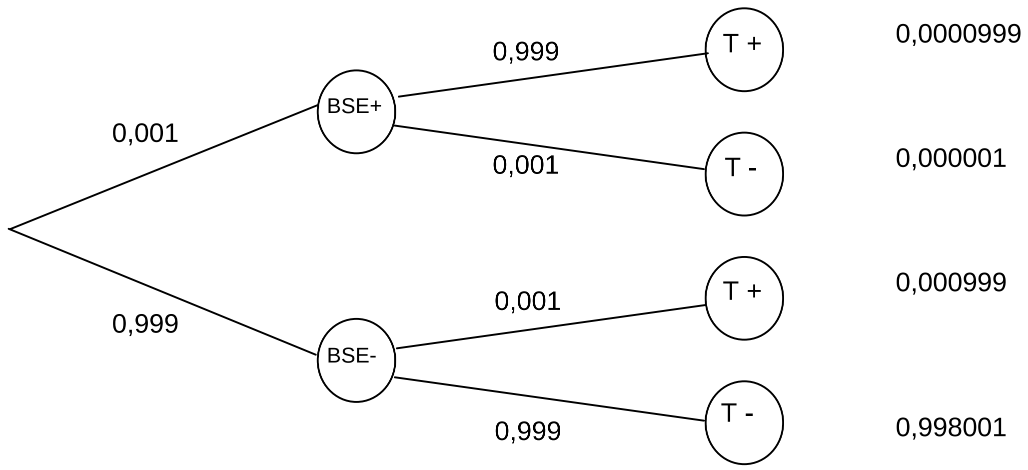
P(BSE+ / T-) = 0,000015 P(BSE+ / T+) = 0,4965

P(BSE- / T-) = 0,999985 P(BSE- / T+) = 0,5035

Das Ergebnis ist nicht besser. 15 von 1 Million Rindern sind krank, obwohl der Test negativ ist.

Kann eine Erhöhung der Sensitivität auf den Wert der Spezifität eine Verbesserung bringen?

Das Baumdiagramm lautet dann:



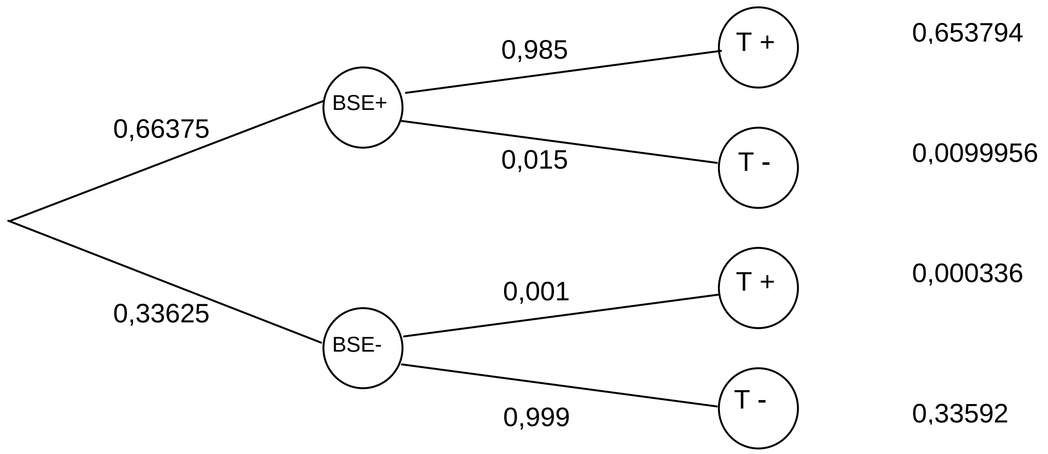
Die interessierenden Wahrscheinlichkeiten sind damit

P(BSE+ / T-) = 0,000001 P(BSE+ / T+) = 0,5

P(BSE- / T-) = 0,999999 P(BSE- / T+) = 0,5

Das Ergebnis ist auch nicht entscheidend besser und lässt erahnen, dass das Problem ein grundsätzliches und in der niedrigen „Durchseuchungsrate“ begründet ist. Die Diagnose seltener Infektionen/Krankheiten/Ereignisse mit in der Realität nicht vollständig richtig operierenden Tests ist problematisch.

<u>Eine neue Idee ist:</u> Kann eine Wiederholung eines „positiven“ Tests bessere Ergebnisse bringen?
Das Baumdiagramm startet also mit den bekannten Ergebnissen für positiven Test und differenziert wie oben. Die entsprechenden Ast-Wahrscheinlichkeiten sind bekannt. Damit ergibt sich folgendes Baumdiagramm:



Die interessierenden Wahrscheinlichkeiten sind damit

P(BSE+ / T+T+) = 0,999486	P(BSE+ / T+T-) = 0,02879
P(BSE- / T-T+) = 0,000514	P(BSE- / T-T-) = 0,97121

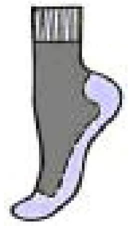
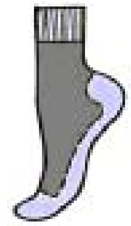
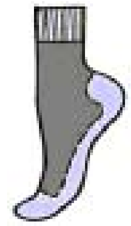
Zu 99,9486 % ist die „Positiv“-Aussage des zweiten BSE-Schnelltests (sofern der erste Test auch „positiv“ war) richtig. Mit verschwindender Wahrscheinlichkeit liefert der zweite Test die „Positiv“-Diagnose irrtümlich.

Die hier angedeuteten Überlegungen können bei anderen Tests wieder aufgegriffen werden.
Insbesondere bei den sogenannten HIV-Tests, Hepatitis C-Tests oder auch beim diskutierten flächendeckenden Screening der weiblichen Brust werden dann einerseits die bevölkerungspolitischen und individuellen Konsequenzen deutlich. Andererseits ist hier Vorsicht geboten, da stets auch „Betroffene“ in der Klasse sein können.

Weitere Informationen finden sich in den folgenden „Aufgaben- und Materialienblättern“.

4.2.5 Aufgaben- und Arbeitsblätter

Sockenspiel

Urne 1	**Urne 2**	**Urne 3**
		
6 Eurostücke	**6 10-Centstücke**	**3 Eurostücke** **3 10-Centstücke**

Den Schülerinnen und Schülern werden drei Socken gezeigt. In einer befinden sich 6 Euro-Stücke, in der zweiten 6 10-Cent-Münzen und in der letzten 3 Euro- und 3 10-Cent-Münzen. Die Socken werden gemischt. Eine wird ausgesucht. Der Spieleinsatz beträgt 2,50 €.

Die Schülerinnen und Schüler haben jetzt folgende Möglichkeiten:

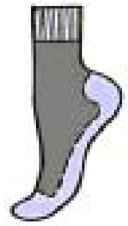
- Sie können sich für eine der drei Socken (inkl. der bereits gezogenen) entscheiden. Der Inhalt gehört ihnen.
- Sie können vom Spielleiter (Schülerin/Schüler oder Lehrer) eine Münze aus der zu Beginn ausgewählten Socke ziehen und sich zeigen lassen. Dieser Zug kostet sie allerdings 10 Cent. Anschließend wird die Münze zurückgelegt. Dieser Vorgang kann so oft wiederholt werden, bis die Schülerinnen und Schüler meinen, eine Entscheidung treffen zu können bzw. zu wollen.

Nachdem das Spiel einige Male durchgeführt wurde, werden sich folgende Fragen ergeben:
Gibt es eine Strategie, mit der ein Gewinn erzielt werden kann?
Welche Situationen sind günstig bzw. ungünstig?
Sollte man gleich am Anfang die Wahl treffen oder lohnt es sich, in jeden weiteren Zug zu investieren?

Arbeitsblatt 1

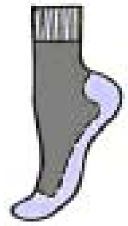
Jede Gruppe erhält 3 Urnen, die in der folgenden Weise bestückt sind:

Urne 1



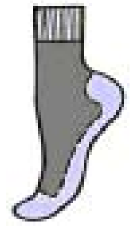
7 Eurostücke
3 Centstücke

Urne 2



5 Eurostücke
5 Centstücke

Urne 3



3 Eurostücke
7 Centstücke

„Bestimmt aus eurer Gruppe einen „Experimentator", der eine der 3 Urnen auswählt und daraus nacheinander (mit Zurücklegen) 3 Geldstücke zieht und deren Art bekannt gibt.
Einigt euch nach jedem Zug auf einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ausgewählten Urne um Urne 1, 2 oder 3 handelt. Protokolliert diese Schätzungen in der folgenden Tabelle."

		Eigener Schätzwert			**Gemeinsamer Schätzwert**		
Zug Nr.	**Art des Geldstücks**	**Urne 1**	**Urne 2**	**Urne 3**	**Urne 1**	**Urne 2**	**Urne 3**
1							
2							
3							

„Vergleicht die Ergebnisse mit denen der anderen Gruppen."
„Überprüft eure Prognosen mit Hilfe geeigneter Diagramme."

Arbeitsblatt 2

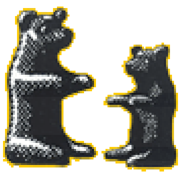
Jede Gruppe erhält 3 Tüten Gummibärchen, die in der folgenden Weise bestückt sind:

Tüte 1	**Tüte 2**	**Tüte 3**
		
7 rote Bärchen **3 gelbe Bärchen**	**5 rote Bärchen** **5 gelbe Bärchen**	**3 rote Bärchen** **7 gelbe Bärchen**

„Bestimmt aus eurer Gruppe einen „Experimentator“, der eine der 3 Tüten auswählt und daraus nacheinander (mit Zurücklegen) 3 Gummibärchen zieht und deren Farbe bekannt gibt.
Einigt euch nach jedem Zug auf einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ausgewählten Tüte um T_1, T_2 oder T_3 handelt. Protokolliert diese Schätzungen in der folgenden Tabelle.“

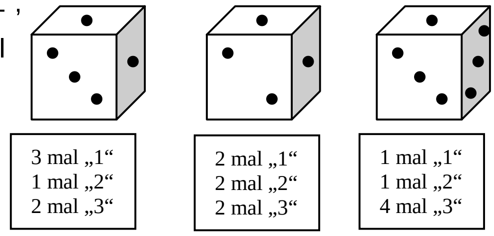
		Eigener Schätzwert			**Gemeinsamer Schätzwert**		
Zug	**Farbe**	**Tüte 1**	**Tüte 2**	**Tüte 3**	**Tüte 1**	**Tüte 2**	**Tüte 3**
1							
2							
3							

„Vergleicht die Ergebnisse mit denen der anderen Gruppen.“
„Überprüft eure Prognosen mit Hilfe geeigneter Diagramme.“



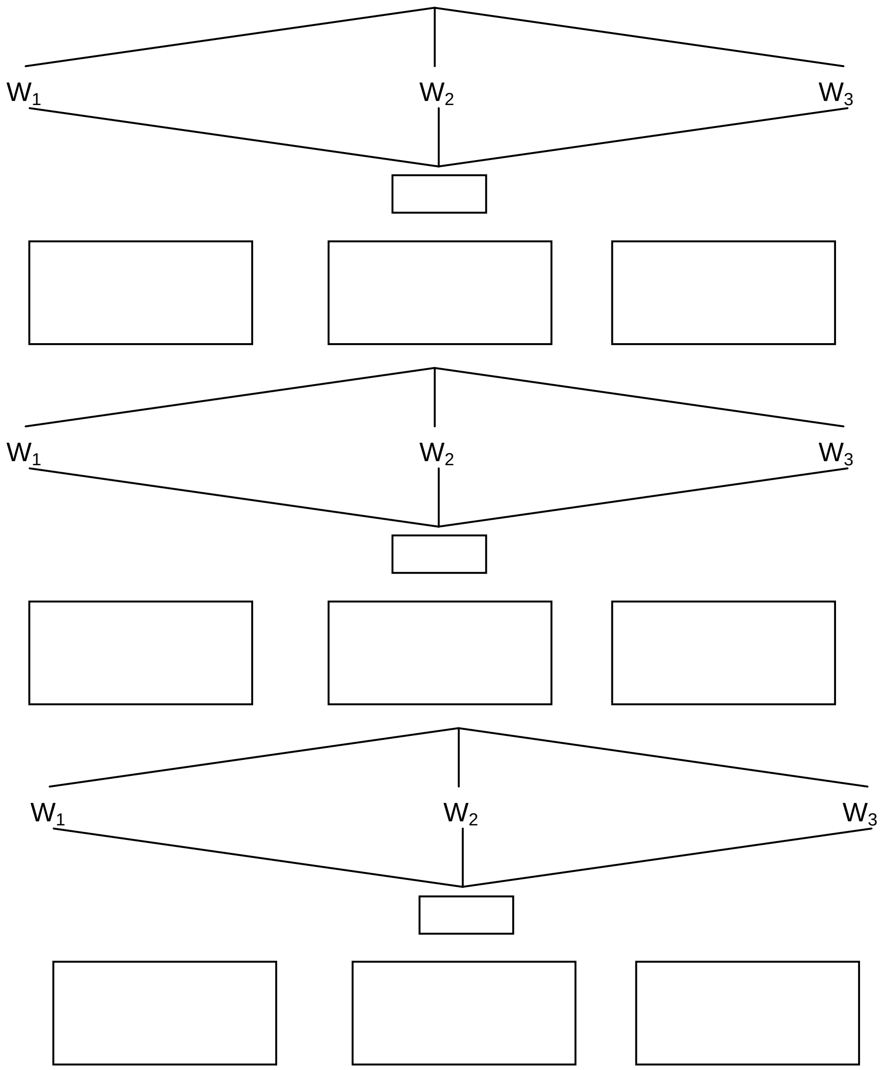
Hausaufgabe „Würfel“

Gegeben sind 3 Würfel. Würfel 1 zeigt auf 3 Flächen die „1“, auf einer Fläche die „2“ und auf 2 Flächen die „3“. Bei Würfel 2 gibt es jeweils 2 Flächen mit „1“, „2“ und „3“. Würfel 3 zeigt jeweils einmal „1“ und „2“ und auf 4 Flächen die „3“. Ein Würfel wird ausgewählt und dreimal geworfen.



a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um Würfel 1, 2 oder 3, wenn die Würfelfolge lautet: „1-1-2“; „3-2-1“; „2-2-2“ ?

b) Welche Würfelfolge wäre für die Entscheidung besonders günstig ?



4.2.6 Weitere Aufgaben

1.) Drei Tümpel enthalten 1 Fisch, 2 bzw. 3 Fische. Ein Tümpel wird zufällig ausgewählt und hier wird ein Fisch gefangen, markiert und wieder freigelassen. Am nächsten Tag wird in demselben Teich wieder ein Fisch gefangen, der markiert (unmarkiert) ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der ausgewählte Tümpel 1 Fisch, 2 bzw. 3 Fische enthält? (aus Lit. [2]).

2.) Fünf gleich aussehende Socken sind wie folgt mit Kugeln gefüllt:
drei Socken mit Füllung rrww
zwei Socken mit Füllung rwwww
Man zieht aus einer zufällig gewählten Socke nacheinander ohne Zurücklegen drei Kugeln. Man möchte herausfinden, aus welcher Socke sie entstammen. Beurteile die Situation, wenn die Zugfolge wie folgt lautet:
a) rww
b) rwr
(aus Lit. [2], abgewandelt).

4.2.7 Materialien zum AIDS - Test

Projekt:
<u>HIV – Antikörper – Test</u>
(nach Lit. [4])

GIB AIDS
KEINE
CHANCE

Er verschenkte seine Eigentumswohnung, er warf seinen Job hin,

Fehldiagnose Aids!

Ärzte ruinierten mein Leben

Die Frau lief ihm weg und
dazu jede Menge Schulden

Falsche AIDS-Diagnose:

Sechs Jahre Todesangst!

Aufgaben

1. Gib eine persönliche Einschätzung: Wie groß ist das Risiko einer Fehldiagnose bei HIV-Antikörper-Tests?
2. Welche individuellen Auswirkungen hätte eine Fehldiagnose?
3. Welche gesellschaftlichen Auswirkungen hätte eine Fehldiagnose?
4. Welche (gesellschaftlichen) Vorteile würde ein Zwangstest bieten?

Tests für große Bevölkerungsteile!

Antreten zum Aids-Test

Manila, 2. März (dpa) Alle 160 000 Angehörigen des philippinischen Militärs, einschließlich des Oberbefehlshabers der Streitkräfte, müssen unverzüglich zum Aids-Test antreten. Nach Angaben eines Militärsprechers vom Dienstag wurde die Untersuchung angeordnet, nachdem bei einem Soldaten der Marine vor einem Einsatz bei den UN-Friedenstruppen in Kambodscha der HIV-Virus festgestellt worden war.

Frankfurter Rundschau, 3.3.93

Aids-Hilfe gegen „Zwangstests". Experte und Dezernentin für routinemäßige HIV-Untersuchung.

„Der Patient muß es wissen und der Arzt, der ihn behandelt, auch." Der Frankfurter Aids-Experte Wolfgang Stille hat den Vorschlag von Bundesgesundheitsminister Horst Seehofer (CSU), Blutproben routinemäßig auf den HIV-Virus zu untersuchen, prinzipiell begrüßt. Gesundheitsdezernentin Margarethe Nimsch (DIE GRÜNEN) betonte, daß solche Tests aber nur mit Einwilligung der Patienten erfolgen dürften.

Der Seehofer-Vorschlag sieht jedoch nach Angaben der hessischen AIDS-Hilfe eine ausdrückliche Einwilligung nicht vor. Dem Patienten werde lediglich ein Widerspruchsrecht eingeräumt. „Wo sich Patienten mit einem lauten Nein und einem Offenbarungseid gegen HIV-Tests wehren müssen, da herrscht Zwang", erklärte die Selbsthilfeorganisation.

Frankfurter Rundschau, 26.11.93

Jelzin unterzeichnet umstrittenes Aids-Gesetz

Der russische Präsident Boris Jelzin hat ein umstrittenes Aids-Gesetz unterzeichnet: Ausländer dürfen danach nur dann länger als drei Monate im Land bleiben, wenn sie nachweisen können, daß sie nicht HIV-infiziert sind.

Das Gesetz, mit dem die Ausbreitung von AIDS in Rußland eingedämmt werden soll, soll am 1. August in Kraft treten.

Das Moskauer Informationszentrum für sexuelle Gesundheit hatte Jelzin aufgefordert, das Gesetz nicht zu unterzeichnen. Es sei der Versuch, einen neuen „eisernen Vorhang" um Rußland zu errichten.

Frankfurter Rundschau, 4.4.95

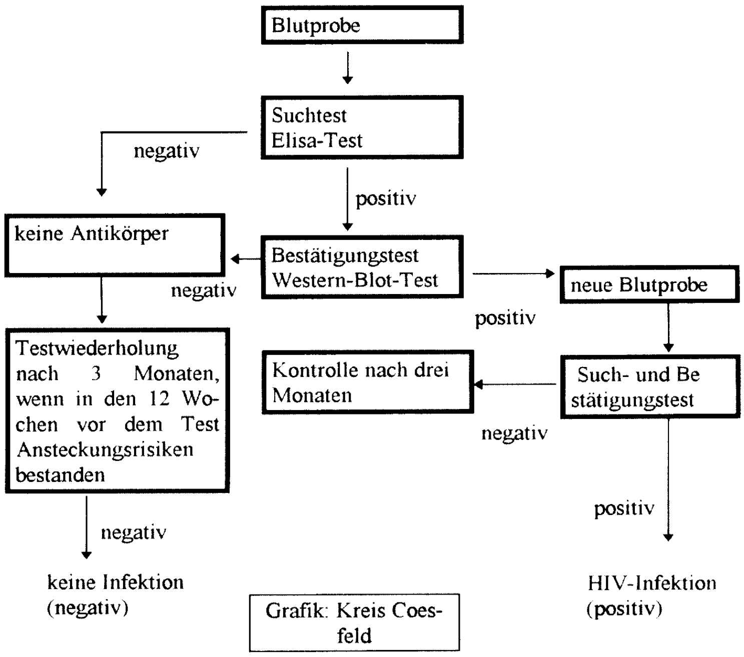
Aufgaben

1. Warum mussten die philippinischen Soldaten zum AIDS-Test antreten?
2. Welchen Vorschlag unterbreitete Horst SEEHOFER?
3. Welche Bestimmungen enthält das von JELZIN unterzeichnete AIDS-Gesetz?

Ablauf eines HIV-Antikörper-Tests

1) Es wird nicht der HIV direkt getestet, sondern es wird geprüft, ob Antikörper gegen den HIV entwickelt wurden. Eine akute Infektion ist nicht nachweisbar, da es mehrere Wochen dauert, bis Antikörper entwickelt werden.

2) Im Suchtest werden alle „verdächtigen“ Blutproben gesucht, i.d.R. zu viele. Die zunächst positiv gewerteten werden im Bestätigungstest genauer untersucht.



AIDS: Acquired Immune Deficiency Syndrom - Erworbene Abwehrschwäche
HIV: Human Immunodeficiency Virus

Aufgaben

1. Erläutere den Testverlauf bis zur Diagnose „keine Antikörper“!
2. Warum ist bei negativem Testergebnis eine Kontrolluntersuchung vorgesehen?
3. Erläutere den Testverlauf bis zur Diagnose „positiv“!

Informationen der Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung

Wie zuverlässig ist der Test?

Im Blut ist eine Vielzahl anderer Antikörper und möglicherweise störender Stoffe vorhanden, die beim Suchtest u.U. ebenfalls reagieren können.
Es besteht daher die Möglichkeit eines irrtümlich („falsch“) positiven Testergebnisses. Deswegen wird ein positives Ergebnis des Suchtests in einem Bestätigungstest (der für diese Fehlerquellen unempfindlich ist) kontolliert, um die irrtümliche Annahme einer Ansteckung auszuschließen.
Lassen Sie sich in jedem Fall individuell beraten, was ein HIV-„negatives“ Testergebnis für Ihre persönlichen Umstände bedeutet. Ein „positiver“ Test sollte zusätzlich mit einer späteren zweiten Blutentnahme überprüft werden.
Aus: Wissenswertes über den HIV-Test

Wenn der HIV-Test positiv ausfällt: Wie geht es weiter?

Ein Nachweis von Antikörpern gegen HIV zeigt, daß eine Ansteckung mit diesem Erreger vorliegt. In ganz seltenen Einzelfällen reagiert der Test positiv, obwohl keine HIV-Antikörper vorhanden sind. Deswegen wird in der Regel empfohlen, einen „positiven“ HIV-Test zusätzlich durch eine zweite Blutprobe zu überprüfen

Aus: Wenn der HIV-Test positiv ausfällt.

Daten - Daten - Daten

Wieviele Personen einer Gesellschaft sind überhaupt HIV-positiv? Hohe Schätzungen sprechen von 0,02% bis 2% (Großraum New York). Das Bundesgesundheitsamt verzeichnet zum 31.12.1990 für die Bundesrepublik Deutschland unter Ausschluß erkennbarer Doppelmeldungen insgesamt 42.744 HIV-positive Seren. Einige Fälle werden nicht erkannt sein, so daß eine gute Schätzung der möglichen Infektionen auf ca. 50.000 kommt. Das ist nicht wenig, immerhin fast ein Promille der Gesamtbevölkerung. Wir beziehen uns hier nur auf die sexuell aktive Bevölkerung und gehen dabei von den heute 18 - 60jährigen aus. Diese Gruppe umfaßt in Deutschland etwa 40 Millionen. Der Anteil der Infizierten beträgt also 0,1 - 0,2%; für die Rechnung benutzen wir 0,1%. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällig ausgewählte Person im sexuell aktiven Alter HIV-infiziert ist, sei also 0,001.

In neuerer Zeit sind sehr empfindliche Testverfahren entwickelt worden. Die Tests haben eine hohe Sensitivität und Spezifität. Mit einer hohen Wahrscheinlichkeit wird eine richtige Diagnose gestellt, d.h. wird eine Person untersucht, die HIV-infiziert ist, so sei die Wahrscheinlichkeit, daß sie als infiziert erkannt wird, 99,8% (dies ist die sog. Sensitivität). Ähnlich gute Schätzungen ergeben sich für die sog. Testspezifität: 0,99. Die Gegenwahrscheinlichkeit 1 - 0,99 ist die Wahrscheinlichkeit für ein (fälschlicherweise) positives Untersuchungsergebnis unter der Bedingung, daß das betreffende Individuum in Wahrheit nicht infiziert ist. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 würde also ein Gesunder fälschlicherweise als infiziert diagnostiziert werden.

Wünschbar hohe [Böer] ... Werte für Sensitivität (=1) und Spezifität (99,995) sind bei HIV-Testkombinationen noch nicht erreicht (letzte Zahlen sind: 99,9% bzw. 99,7%).

Leicht gekürzter Text aus: König, AIDS und Mathematikunterricht, in Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 91/6

Wie bei allen diagnostischen Maßnahmen kommt es auch beim sorgfältig durchgeführten HIV-Antikörpertest sowohl zu falsch-negativen als auch zu falsch-positiven Befunden. Folgt man den Angaben der Hersteller zur technischen Testverträglichkeit, so bleiben 0,5% der HIV-Befunde unentdeckt. Andererseits kann es unter den gleichen Voraussetzungen bei 20.000 Tests im statistischen Mittel einmal zu einem falsch-positiven Ergebnis kommen.

Betrachtet man risikoarme Bevölkerungsgruppen (z.B. Blutspender, alte Menschen oder Kinder), so ist das Risiko, infiziert zu sein, a priori vermutlich unter 1:20.000.

In der Bundesrepublik Deutschland (einschließlich Berlin-West) wurden laut BGA-Zahlen bis Januar 1990 36.709 HIV-Infektionen (ohne Doppelmeldungen) festgestellt, ein Siebtel davon bei Frauen. Daraus folgt, daß durchschnittlich jeder 2.000. Bewohner der Bundesrepublik Deutschland mit HIV infiziert ist.

Da es risikoarme Bevölkerungsgruppen gibt, muß es auch Bevölkerungsgruppen geben, die risikoreich sind, in denen also die Infektion häufiger als 1 : 20.000 ist.

Geht man davon aus, daß nur ein geringer Teil der Bewohner der Bundesrepublik Deutschland risikoreich lebt, dann muß für diese Gruppe die Prävalenz entsprechend höher angesetzt werden (z.B. um den Faktor 10 auf 1 : 200).

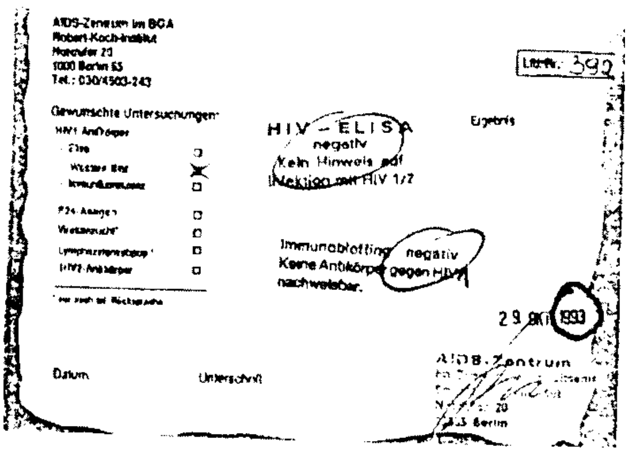
Aus: Deutscher Bundestag (Hg.), AIDS: Fakten und Konsequenzen; Endbericht der Enquete-Kommission des 11. Dt. Bundestages „Gefahren von AIDS und wirksame Wege zu ihrer Eindämmung"; darin: Minderheiten-/Sondervoten zum 2. Kapitel „Beratung und Betreuung von symptomlos HIV-Infizierten"; S. 635 - 639, Bonn 1990

Bei den Elisa-Tests der ersten Generation (die heute kaum mehr verwendet werden) lag die Fehlerquote für falsch-positive Resultate zwischen zwei und sieben Prozent. Inzwischen erreicht die Treffsicherheit, so Professor Kurth, Chef des Frankfurter Paul-Ehrlich-Instituts, Werte zwischen 99,5 und 99,8 Prozent. Verglichen mit anderen Antikörper-Tests, etwa zur Fahndung nach Hepatitis-Viren, sei das „so zeimlich das Beste, was wir haben". Bei korrektem Vorgehen, also bei zweimaliger Überprüfung eines positiven Testbefundes, bedeutet das, daß die Zahl falsch-positiver Resultate sich in der Größenordnung zwischen 1 zu 100.000 und 1 zu 400.000 bewegt.

Aus: Der Spiegel Nr. 17/1988

Aufgaben

1. Entnimm dem Artikel von KÖNIG folgende Daten:
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion in Deutschland ?
   Wie hoch ist die Test-Sensitivität ? Was bedeutet Test-Sensitivität ?
   Wie hoch ist die Test-Spezifität ? Was bedeutet Test-Spezifität ?
2. Notiere einen ersten Kommentar zu obigen Daten:
   Ist der AIDS-Test tauglich?
   Kann man ihm mit akzeptablen Unsicherheiten trauen?
   Liefert er die Sicherheiten, die wegen bevölkerungspolitischer bzw. individueller Konsequenzen zu fordern sind?
3. Entwickle ein Baumdiagramm, welches die o. g. interessierenden Fragen differenziert!
   Berechne die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten!
4. Entwickle aus dem Baumdiagramm eine Vierfeldertafel der relativen Häufigkeiten!
5. Um Vorstellungen von der Größenordnung der Anzahl der betroffenen Personen zu bekommen, ist es sinnvoll, mit absoluten Zahlen zu rechnen. Die Gesamtbevölkerung in Deutschland beträgt ca. 80 Mio. Menschen. Übertrage die Ergebnisse auf eine Vierfeldertafel der absoluten Häufigkeiten!
6. Entwickle ein Baumdiagramm mit vertauschten Merkmalen, also der Testreaktion als erstem Merkmal!
   Berechne die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten!
7. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer zufällig ausgewählten Person tatsächlich eine HIV-Infektion vorliegt, wenn der Test ein positives Ergebnis hatte!
   Nimm Stellung zu deinem Ergebnis!
8. Interpretiere dein Ergebnis aus 7., indem du es auf absolute Zahlen überträgst. Gehe dabei davon aus, dass eine Stichprobengröße von 100.000 Personen vorliegt. Dieses ist eine Größenordnung, wie sie für Massentests vorgeschlagen wurde!
   Nimm erneut Stellung zu deinem Ergebnis!


AIDS-Zentrum im BGA
Robert-Koch-Institut
Tel.: 030/4503-243

Lfd.-Nr.: 392

Gewünschte Untersuchungen:

Ergebnis

HIV – ELISA
negativ
Kein Hinweis auf Infektion mit HIV 1/2

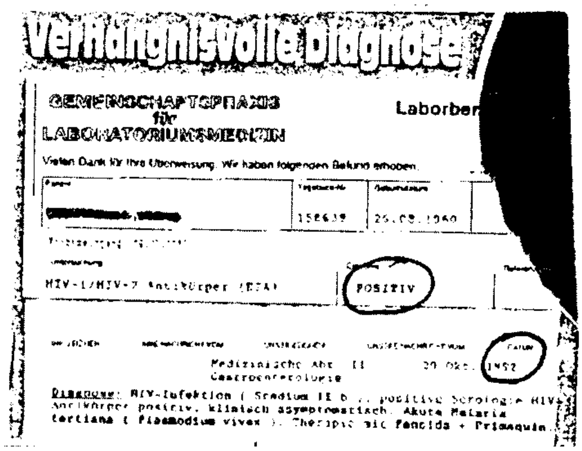
Immunoblotting negativ
Keine Antikörper gegen HIV nachweisbar.

29. OKT. 1993

AIDS-Zentrum

Datum

Unterschrift


Verhängnisvolle Diagnose

GEMEINSCHAFTSPRAXIS
für
LABORATORIUMSMEDIZIN

Laborber

Vielen Dank für Ihre Überweisung. Wir haben folgenden Befund erhoben.

[redacted]

26.05.1960

HIV-1/HIV-2 Antikörper (EIA) POSITIV

Medizinische Abt. II 20. Okt. 1992
Gastroenterologie

Diagnose: HIV-Infektion (Stadium II b), positive Serologie HIV-Antikörper positiv, klinisch asymptomatisch. Akute Malaria tertiana (Plasmodium vivax). Therapie mit Fansidar + Primaquin.

Das Ergebnis der Berechnungen unter 8. ist, dass in rund 91 % ein Irrtum vorliegt. Das ist nicht akzeptabel! Eine Person, der „positiv“ als Testergebnis gemeldet wird, muss sich darauf verlassen können, dass dieses Urteil zumindest mit hoher Zuverlässigkeit gilt!
Hier aber ist sogar mit übergroßer Deutlichkeit das Gegenteil wahr.
Was soll so ein Testergebnis dann noch? Es ist nicht tauglich!
Wenn das Resultat alles ist, was ein solcher Test liefert, dann lässt man ihn besser!

Aufgaben

1. Woran liegt das nicht akzeptable Ergebnis unter 8.?
   Untersuche dazu den Term, mit dem die Wahrscheinlichkeit berechnet wurde!
   - Was steht im Zähler? Runde die Zahl auf eine geltende Ziffer! Welche Bedeutung hatte diese Zahl in den Ausgangsdaten? Wieso haben die anderen Zahlen praktisch keine Bedeutung?
   - Runde entsprechend das Ergebnis des Nenners und benenne die Wahrscheinlichkeit gemäß der Ausgangsdaten! Wie ist es hier mit dem Einfluss der anderen vorkommenden Zahlen?
2. Zwei zentrale Wahrscheinlichkeiten beeinflussen das Testergebnis. Welche sind das?
   Wie beeinflussen diese das Testergebnis? Überprüfe deine Vermutung!
3. Woran liegt es, dass der Test so schlechte Ergebnisse liefert, obwohl seine Sensitivitäts- und Spezifitätswerte ausgezeichnet sind?
4. Gib einen Kommentar zu den bisherigen Ergebnissen!
   Gehe dabei besonders auf die folgenden Fragen ein:
   Wann tritt immer dieses Problem in Testen auf?
   Wo gilt es Vorsicht walten zu lassen bei - auch flächendeckend geforderten - Tests?
5. Das Ergebnis ist trotz eines ziemlich guten Testverfahrens schlecht. So weit, so schlecht. Trotzdem weiß man nach dem Test mehr als vorher:
   Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, für einen zufällig aus der deutschen Bevölkerung herausgegriffenen Menschen, mit HIV infiziert zu sein ?
   Wie hoch ist dieselbe Wahrscheinlichkeit, nachdem das „positive“ Testergebnis vorliegt?
   Wie hoch ist die Steigerung der „Gewissheit“?
   Hilft diese Gewissheitssteigerung dem Betroffenen?

4.2.8 Materialien zum Hepatitis C - Test

Verliebt, verlobt, verheiratet . . .

Eine Geschichte von Peter und Penelope, wie sie das Leben schrieb

(nach Lit. [5])

Peter ist 15 Jahre alt, ein dunkelblonder, ewig zu allen möglichen Späßen aufgelegter, sportlicher Junge vom Syker Geestrücken. Seit drei Jahren besucht er das Gymnasium. Mit Beginn des neuen Schuljahres hat er sich extra in eine Parallelklasse versetzen lassen. In dieser ist Penelope, die nicht nur gut Mathe kann, sondern auch noch ein unheimlich nettes Mädchen ist.

Penelope ist ebenfalls 15 Jahre alt, kurze schwarze Haare, in Deutschland geborene Tochter einer griechischen Gastarbeiterfamilie.

Es hat einige Zeit gebraucht, bis Peter mit Penelope näheren Kontakt bekam. Da sie an seinem Sport nicht interessiert schien und er nicht den Mut hatte, mit seinen beiden linken Beinen einfach in ihrem Rock&Roll-Kurs aufzutauchen, war das gar nicht so einfach. Da blieb ihm nichts anderes übrig, als nach schulischen Anknüpfungspunkten zu suchen. Als sie sich in einer ausgefallenen Mathestunde gemeinsam ein paar Aufgaben angeschaut hatten, und auch Penelope eingestehen musste, dass es zu zweit viel mehr Spaß machte, bildeten sie eine Arbeitsgruppe. Seitdem sehen sie sich öfter und Peter kann wenigstens bei den Englischvorbereitungen sein lädiertes Selbstbewusstsein wieder aufpolieren.

Eine verantwortungsvolle Partnerschaft zwischen zwei Menschen zwingt natürlich auch dazu, sich mit den Risiken auseinander zu setzen. Daher sind sich Peter und Penelope sofort einig, als sie beim samstäglichen Bummel durch Sykes Innenstadt einen Info-Stand zum Thema Hepatitis C sehen: „Da gehen wir hin.“

Nachdem sie ihre anfängliche Hemmung überwunden haben, sind sie schnell in ein intensives Gespräch mit einer Beraterin verwickelt.

Diese gibt den beiden eine ganze Menge an Informationen:

An Leberkrankheit Hepatitis C sterben mehr Menschen als an Aids

FRANKFURT a.M., 8. Dezember.
Am Hepatitis-C-Virus (HCV) sterben in Deutschland weit mehr Menschen als an der Immunschwächekrankheit AIDS. Hauptübertragungsquelle für die Leberkrankheit sind die mit dem Hepatitis-C-Virus verseuchten Blutkonserven und Blutprodukte. Die Sicherheit von Blut und Plasma ist bisher aber vor allem im Hinblick auf den Aids-Erreger HIV diskutiert worden. HCV fand nur wenig Beachtung, obwohl es viel mehr Menschen betrifft. (...)
Bis 1990 war der HC-Virus unbekannt, es gab nur die harmlosen Varianten Hepatitis A und Hepatitis B. Nicht zuzuordnende Viren wurden Non-A-Non-B genannt. Heute weiß man, dass sich dahinter zu zwei Dritteln das hochgefährliche C-Virus verbirgt. (...)

Frankfurter Rundschau, 09.12.1993

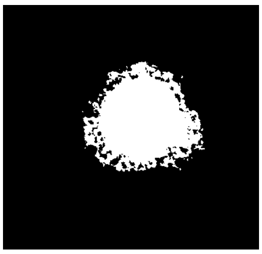
Hepatitis C
gilt als eine der gefährlichsten Arten der von Viren erzeugten Leberentzündungen, da sie im Vergleich zu Hepatitis A und B nur sehr schlecht ausheilt. Als Spätfolgen drohen häufig Leberzirrhose und Leberkrebs. In Deutschland sind rund 150000 Menschen mit Hepatitis C infiziert, jährlich kommen 10000 Infektionen hinzu. Häufige Übertragungsart sind Bluttransfusionen. Die Gefahr einer Ansteckung liegt hier bei eins zu 5000. Wesentlich geringer ist mit eins zu 50000 das Risiko einer Ansteckung mit Hepatitis B oder mit eins zu einer Million eine Infektion mit dem Aidsvirus HIV.

Aus: Plasmapräparat soll mit Hepatitis-Virus verseucht sein
Frankfurter Rundschau vom 23.02.1994

Wie auch bei AIDS ist die Erkrankungsrate in der „Normal"bevölkerung niedriger als bei Risikogruppen. Canada hat nach einem Bericht von Dr. Sherman, Hepatologe aus Toronto, eine Infektionsrate von etwa 1,2 %. Dagegen wurden z.B. bei Gefängnisinsassen (25%-40%) und Drogenabhängigen, die spritzen, (82%) sehr viel höhere Werte gefunden.

Auch der ELISA II -Test ist unterschiedlich zuverlässig: Bei Blutspendern hat man eine falsch-positive Rate von 2% festgestellt, bei Personen mit Immunschwäche dagegen von rund 20%.

Aus dem Internet



Hepatitis C - Virus

Der Blutspendedienst des Deutschen Roten Kreuzes hat sich bereits für das neue Testverfahren entschieden. Nachdem in einer Versuchsphase in Nordrhein-Westfalen durch die Untersuchung auf Hepatitis B- und C-Viren mittels PCR von 650000 Blutkonserven weitere 75 Proben (darunter 69 HCV-positive) identifiziert wurden, die nach dem konventionellen Verfahren als unbedenklich eingestuft worden wären, werden in Kürze auch bundesweit alle Blutspender diesem zusätzlichen Test unterzogen.

Aus: Blut ist ein besond'rer Saft
Frankfurter Rundschau vom 12.07.1997

Aufgaben

1. Erläutere mit den Texten oben, dass in Deutschland im Jahre 1998 insgesamt 190.000 HCV -Fälle vorlagen.

   Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus den 81 Millionen Deutschen zufällig ausgewählte Person das „Hepatitis C“-Virus trägt !

   Nach den Daten des Robert-Koch-Instituts in Berlin liegt die Zahl der gemeldeten AIDS-Fälle in Deutschland zur Zeit bei 235,11 pro 1 Million Einwohner.

   Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus den 81 Millionen Deutschen zufällig ausgewählte Person an AIDS erkrankt ist und vergleiche die Ansteckungsrisiken!
2. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nicht-Infizierter beim HCV-Test auch als solcher erkannt wird, heißt Spezifität. In diesem Fall kann man dieses kurz mit $P(T-|HCV-)$ beschreiben. Erschließe aus den Texten oben, wie groß die Spezifität für Blutspender beim ELISA II-Test ist.

   Für den ELISA II-Test gilt: $P(T+ \mid HCV+) = 0{,}99$. Dieses Wahrscheinlichkeit heißt Sensitivität. Beschreibe die Sensitivität mit Worten.
3. Peter hat sich nach einem Auslandsaufenthalt bei seinem Arzt auf HCV untersuchen lassen. Der Antikörpertest zeigt eine Infektion an.

   Stelle den Testvorgang in einem zweistufigen Baumdiagramm dar!

   Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei Peter tatsächlich eine Infektion vorliegt und deute das Ergebnis!
4. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufällig ausgewählten Person bei negativem Testergebnis tatsächlich keine Infektion vorliegt!

   Beschreibe im Lichte dieser beiden Ergebnisse, was der Test leistet und was er nicht leistet!
5. Peter hat aus seinen Schultagen noch in Erinnerung, dass sein Mathe-Lehrer immer gesagt hat: „Mache in diesem Fall einen zweiten Test.“

   Peter lässt also nach dem positiven Test einen zweiten Test machen.

   Stelle auch diesen Testvorgang in einem zweistufigen Baumdiagramm dar!

   Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Peter tatsächlich HCV-positiv ist, wenn beide Tests dieses anzeigen!
6. Penelope, die Freundin von Peter, hat mehr Glück. Nach einem ersten positiven Test ist der zweite negativ. Wie sicher kann sie sich sein, tatsächlich nicht infiziert zu sein?

4.2.9 Aufgabe zur Bayes-Formel

Quesi im Land der Bolteken

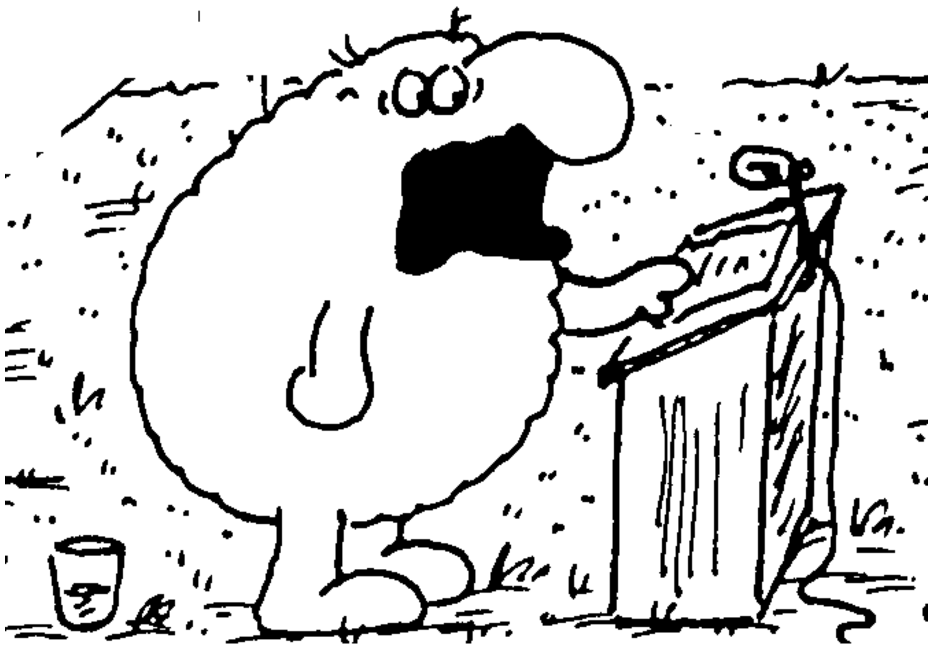
Ein Reisender besucht das Land der Bolteken, deren Lieblingsgetränk Lurti heißt.

Leider ist Lurti so heiß begehrt, dass 65% aller Bolteken zuviel davon trinken.

Infolge dieses Übergenusses bildet sich in 90% dieser Fälle eine Krankheit, ein gut sichtbarer Quesi aus.

Allerdings haben auch 2% der Bolteken, die nicht zuviel Lurti trinken, die Krankheit Quesi.

1. Zeichne ein Baumdiagramm, das die Lurti-Quesi-Abhängigkeit darstellt!
2. Wie viele der Bolteken haben Quesi, wenn das Volk der Bolteken 50 Millionen zählt?
3. Der Reisende trifft einen Bolteken mit Quesi.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit trinkt dieser Bolteke dennoch nicht zuviel Lurti?
4. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, dass ein quesiloser Bolteke dennoch lurtisüchtig ist?
5. Kläre an diesem Beispiel den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit!



4.2.10 Literatur

[1] Cukrowicz, J., Zimmermann, B. (Hrsg): MatheNetz 9, Ausgabe N. Westermann Verlag, Braunschweig 2001.
[2] Lambacher Schweizer: LS 9, Ausgabe Nordrhein-Westfalen. Klett Verlag, Stuttgart 2001.
[3] PROST - Problemorientierte Stochastik. Stochastik-Sammlung 1, MUED-Schriftenreihe Materialsammlungen. Appelhülsen 1999. [www.mued.de]
[4] Blum, W., König, G., Schwehr, S. (Hrsg.): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 4. Franzbecker Verlag, Hildesheim 1997.
[5] Hefendehl-Hebeker, L. (Hrsg.): mathematik lehren, Heft 86. Friedrich Verlag, Seelze 1999.

4.2.11 Kontakt

Jürgen Stelling	*juergen.stelling@t-online.de*
Wolfgang Hunze	*Whunze@aol.com*
Ulf-Hermann Krüger	*ulf-hermann.krueger@web.de*
Susanne Schläger	*s.schläger@surfeu.de*
Richard Hansen	*rihan@t-online.de*

4.3 Bayes Iteration

Anhand einer Aufgabe aus dem Glücksspielbereich soll durch iteratives Nutzen neuer Information (wiederholtes Anwenden der Regel von Bayes) die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit einer zu treffenden Entscheidung erhöht werden. Generell gesehen ist die Situation vergleichbar mit der eines Laien, der zwischen zwei Alternativen zu wählen hat. Zunächst sind beide Alternativen gleichwahrscheinlich. Durch Expertenbefragung(en), Test(s)/Versuchsdurchführung(en) wird er versuchen, die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit seiner Entscheidung mehr und mehr zu erhöhen. Die folgende Aufgabe soll die Schülerinnen und Schüler zur mehrfachen Benutzung des Bayes-Diagramms anregen. Der dabei schnell anwachsende Rechenaufwand lässt den Einsatz technischer Hilfsmittel sinnvoll erscheinen.	
Besondere Materialien/Technologie: Iteration legt einen Rechnereinsatz nahe: TR, GTR, CAS, Tabellenkalkulation	**Dauer der Unterrichtseinheit:** 3 - 4 Unterrichtsstunden, je nach Vorkenntnissen und Einsatz neuer Technologien

Gliederung

4.3.1 Aufgabenstellung und mögliche Schülerlösung

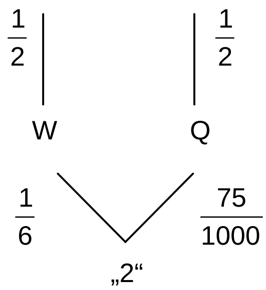
Beim Würfeln mit einem 4er-Legostein gelten folgende Wahrscheinlichkeiten:

Augenzahl	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
P(Augenzahl)	**7,5%**	**7,5%**	**43%**	**27%**	**7,5%**	**7,5%**

Dieser Lego-Quader wird mit einem üblichen Laplace-Würfel verglichen.
Ohne von den Mitschülerinnen und Mitschülern beobachtet werden zu können, wählt Lisa einen der beiden Würfel aus, würfelt und teilt den anderen das Ergebnis ihres Wurfes mit. Die Mitschülerinnen und Mitschüler sollen beurteilen, welchen Würfel Lisa gewählt hat.

a) Lisa teilt mit, dass sie eine „2“ gewürfelt hat. Zeichne ein zweistufiges Bayes-Diagramm, in das du alle Informationen einträgst. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Lisa den Laplace-Würfel bzw. den Lego-Quader gewählt?

Eine mögliche Schülerlösung mit dem Bayes-Diagramm könnte so aussehen:



A-priori-Wahrscheinlichkeiten:

$P(W) = \frac{1}{2}$

$P(Q) = \frac{1}{2}$

$P(2 \text{ mit L-Würfel}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

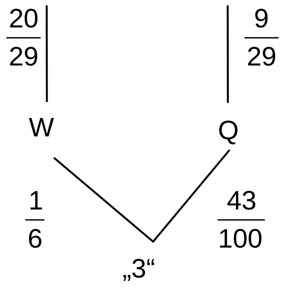
$P(2 \text{ mit Quader}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{75}{1000} = \frac{75}{2000}$

Für die „a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten“ (nach dem Experiment) ergibt sich:

$P(\text{L-Würfel W wurde benutzt}) = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{75}{2000}} = \frac{20}{29}$ $\quad P(\text{Quader Q wurde benutzt}) = 1 - \frac{20}{29} = \frac{9}{20}$

b) Lisa soll noch einmal mit demselben Würfel würfeln, damit die Frage, mit welchem Würfel sie gewürfelt hatte, treffsicherer beantwortet werden kann. Sie würfelt eine „3“. Berechne wiederum die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sie mit dem Laplace-Würfel bzw. mit dem Lego-Quader würfelt. Achte darauf, dass in deinem neuen Bayes-Diagramm die „a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten“ aus a) nun im 2. Diagramm die „a-priori-Wahrscheinlichkeiten“ (vor dem Experiment) sind. Notiere die Ergebnisse geeignet in einer Tabelle.

Eine mögliche Schülerlösung könnte so aussehen:



A-priori-Wahrscheinlichkeiten:

$P(W) = \frac{20}{29}$

$P(Q) = \frac{9}{29}$

$P(3 \text{ mit Würfel}) = \frac{20}{29} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{87}$

$P(3 \text{ mit Quader}) = \frac{9}{29} \cdot \frac{43}{100} = \frac{387}{2900}$

Für die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten ergibt sich:

$$P(\text{L-Würfel wurde benutzt}) = \frac{\frac{20}{29} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{20}{29} \cdot \frac{1}{6} + \frac{9}{29} \cdot \frac{43}{100}} = \frac{1000}{2161}$$

$$P(\text{Quader wurde benutzt}) = 1 - \frac{1000}{2161} = \frac{1161}{2161}$$

Tabelle auf der Basis von „2“, „3“ , „4“ , „5“ als den ersten Würfelergebnissen:

gewürfelte Augenzahl	**P(L-Würfel)**	**P(Quader)**
vorher	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
„2“	$\frac{20}{29}$	$\frac{9}{29}$
„3“	$\frac{1000}{2161}$	$\frac{1162}{2161}$
„4“	0,347123	0,652877
„5“	0,541604	0,458396

(<u>Anmerkung:</u> Die Leserin/Der Leser bzw. das Verhalten der Lerngruppe und deren Wünsche mögen darüber entscheiden, ob bei Fortsetzen des Experimentes über die ersten beiden Würfelaktionen hinaus das Kalkül einige weitere Male mit Arbeit im Heft bzw. an der Tafel durchlaufen oder ob schon nach den ersten Durchläufen der Rechnereinsatz vorbereitet werden soll.)

c) **Die Berechnungen bei weiteren Würfen laufen nun immer wieder nach demselben Schema ab. Solche Routinearbeit überträgt man gerne dem PC oder einem Taschenrechner. Die folgende Tabelle mag dir bei der Umsetzung mithilfe einer Tabellenkalkulation helfen:**

Nr.	**Gewürfelte Augenzahl, Indiz**	**P(Würfel)**	**P(Quader)**	**Nebenrechnungen**		
				Pfadw. 1	**Pfadw. 2**	**P(Indiz)**
1	**vorher**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
2	**„2“**	$\frac{20}{29}$	$\frac{9}{29}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{75}{2000}$	$\frac{29}{240}$
3	**„3“**	$\frac{1000}{2161}$	$\frac{1162}{2161}$	$\frac{10}{87}$	$\frac{387}{2900}$	$\frac{2161}{8700}$
4	**„4“**	0,347123	0,652877			
5	**„5“**					

zu c):

Auch GTRs (mit und ohne CAS) bieten die Möglichkeiten der *Automatisierung*.

Durch schrittweises Nachspielen der Iteration im Home-Bereich (1-Zeilen-Programm) auf Basis der oben dargestellten Bayes-Diagramme kann direkt die geänderte Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit einer denkbaren Entscheidung ermittelt werden.
Im Unterricht wird man mit einem GTR oder einem CAS ein solches Kurzprogramm im HOME-Fenster gemeinsam erstellen. Dabei werden die Bayes-Formel, die Bedeutung von a-priori- und a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten vertiefend wiederholt und schließlich ein Instrument für das Auswerten wiederholten Würfelns bereitgestellt.
Nun kann eine Schülerin oder ein Schüler verdeckt mit einem der Würfel werfen und die Resultate nennen. Die jeweils über den Rechner ermittelten Wahrscheinlichkeiten können dann für Tipps genutzt werden.
Zu den entsprechenden Rechnereingaben bei Verwendung des TI-83 bzw. des TI-89/92 finden sich im Folgenden detaillierte Vorschläge.

4.3.2 Kommentierte Screens von TI-83 und TI-92

<u>TI-83</u>

Liste LQQ gibt die Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen des Quaders an.
Liste LWW gibt die Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen des 2. Würfelobjektes (hier des Laplace-Würfels) an.

In Q und W werden die ersten a-priori-Wahrscheinlichkeiten gespeichert.

```
2→Z:Q*ʟQQ(Z)/(Q*
ʟQQ(Z)+W*ʟWW(Z))
→Q:1-Q→W
          .6896551724
```

Das Ergebnis „2“ des ersten Wurfes wird in Z gespeichert. Anschließend werden nach Bayes die neuen a-priori-Wahrscheinlichkeiten berechnet und als neue Werte in Q und W gespeichert. Die Doppelpunkte erlauben das Anbinden der einzelnen Befehle aneinander. Nur dank der Doppelpunkte entsteht ein als Ganzes abrufbarer Iterationsblock.

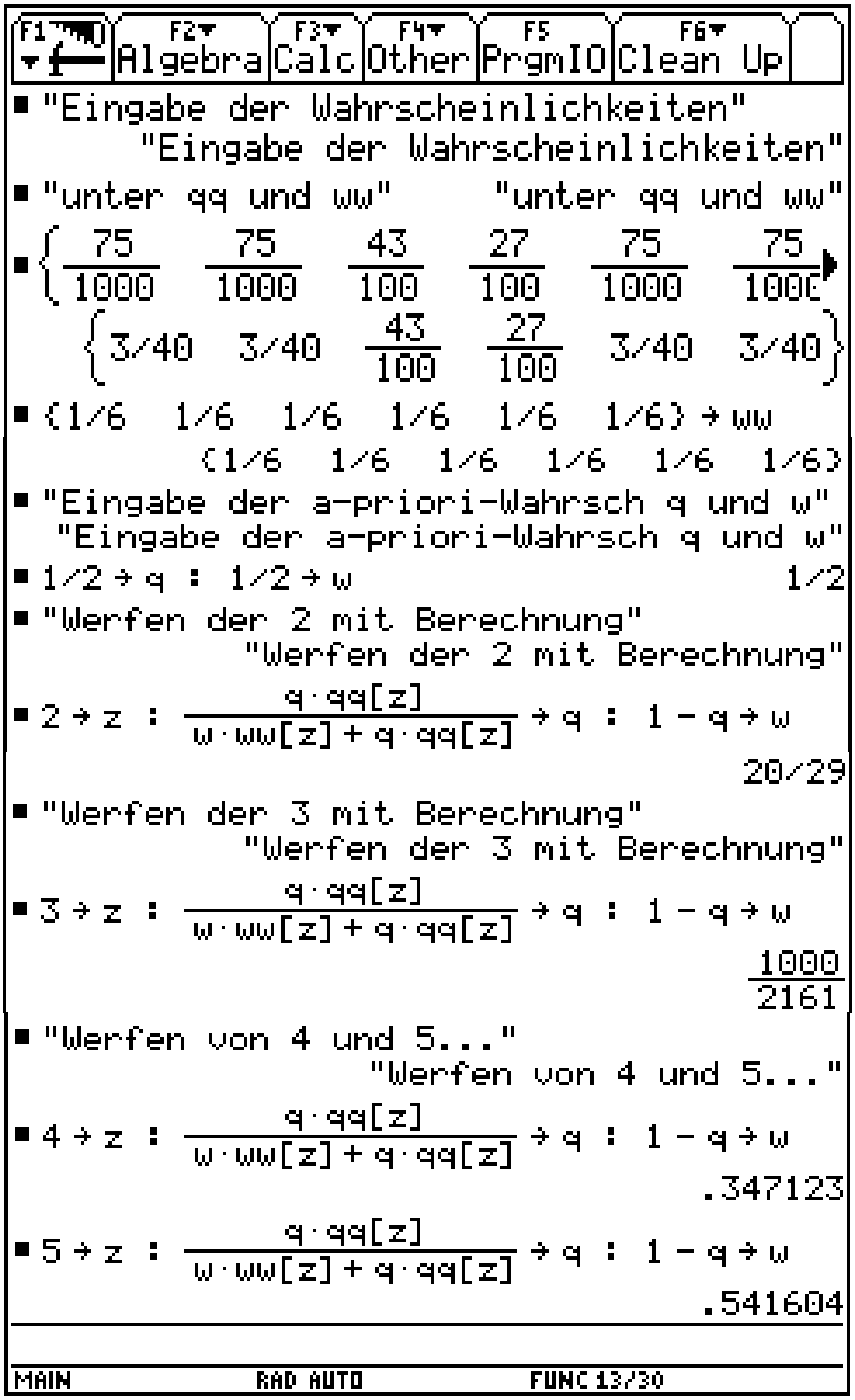
```
3→Z:Q*ʟQQ(Z)/(Q*
ʟQQ(Z)+W*ʟWW(Z))
→Q:1-Q→W
          .4627487274
```

Mit 2nd<Entry> wird der eben benutzte Iterationsblock zum Abändern bereit gestellt.
Auf Z wird das aktuelle Würfelergebnis (hier ‚3') abgespeichert (die alte 2 mit einer 3 überschreiben!). Die Berechnung der neuen a-priori-Wahrscheinlichkeiten erfolgt mit dem Iterationsblock nun einfach durch ENTER-Drücken.

<u>Anmerkungen</u>

1. Hat man mit dem Doppelpunkt verbunden mehrere Befehle auf einmal durch ENTER bestätigt, so bezieht sich die Geräte-*Answer* auf den letzten Befehl des Blockes. Will man nun beide Wahrscheinlichkeiten ausgeben lassen, so kann man an den bisherigen Befehlsblock den Ausgabebefehl: {w,q} anfügen.
2. Der TI-83 akzeptiert mehrbuchstabige Listennamen, aber keine mehrbuchstabigen Variablennamen. Dies kann eine Bezeichnungsvergabe wie die oben aufgeführte motivieren. Bei den Geräten TI-89/92 bestehen derlei Einschränkungen nicht. Um den Vergleich zu erleichtern, werden nun im Folgenden bei den entsprechenden Angaben zum TI-89/92 dennoch die gleichen (nicht besonders glücklichen) Bezeichnungen wie gerade beim TI-83 genutzt.

TI92/89

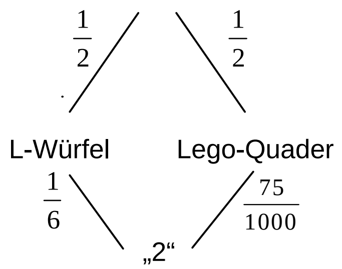

F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up
"Eingabe der Wahrscheinlichkeiten"
"Eingabe der Wahrscheinlichkeiten"
"unter qq und ww" "unter qq und ww"
{75/1000 75/1000 43/100 27/100 75/1000 75/1000
{3/40 3/40 43/100 27/100 3/40 3/40}
{1/6 1/6 1/6 1/6 1/6 1/6} → ww
{1/6 1/6 1/6 1/6 1/6 1/6}
"Eingabe der a-priori-Wahrsch q und w"
"Eingabe der a-priori-Wahrsch q und w"
1/2 → q : 1/2 → w
1/2
"Werfen der 2 mit Berechnung"
"Werfen der 2 mit Berechnung"
2 → z : q·qq[z] / (w·ww[z] + q·qq[z]) → q : 1 − q → w
20/29
"Werfen der 3 mit Berechnung"
"Werfen der 3 mit Berechnung"
3 → z : q·qq[z] / (w·ww[z] + q·qq[z]) → q : 1 − q → w
1000/2161
"Werfen von 4 und 5..."
"Werfen von 4 und 5..."
4 → z : q·qq[z] / (w·ww[z] + q·qq[z]) → q : 1 − q → w
.347123
5 → z : q·qq[z] / (w·ww[z] + q·qq[z]) → q : 1 − q → w
.541604
MAIN RAD AUTO FUNC 13/30

Mit diesem „1-Zeilen-Programm" lässt sich ein Würfelergebnis direkt eingeben, und die veränderte Wahrscheinlichkeit dafür, dass mit dem L-Würfel gewürfelt wurde, kann abgelesen werden. Auch eine vollständige Simulation ist mit diesen Rechnern oder anderer Software möglich.

4.3.3 Hinweise zu einer Variation der Herangehensweise

Verzichtet man im Aufgabenteil b) auf den Hinweis auf ein neues Bayes-Diagramm bzw. stellt man im Unterricht freie Überlegungen zur Auswertung eines wohl von den Schülerinnen und Schülern geforderten weiteren Würfelergebnisses an, so ist es durchaus denkbar, dass die Gruppe Baumdiagramme wie die folgenden entwickelt.

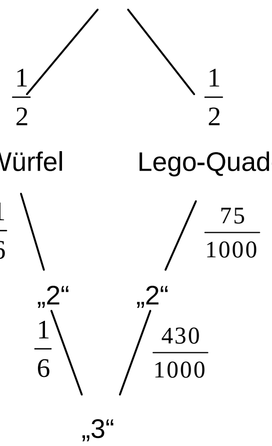
Auswertung des Würfelergebnisses „2“



Nach dem Würfelergebnis „2“ ist

$$P(\text{L-Würfel}) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{75}{1000}}$$

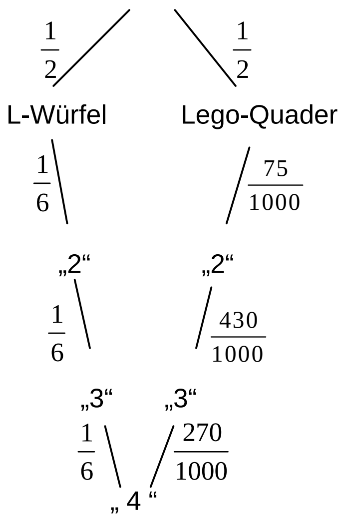
Auswertung von „2“ und „3“ als ersten Ergebnissen



Nach den Würfelergebnissen „2“ und „3“ ist

$$P(\text{L-Würfel}) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{75}{1000}\cdot\frac{430}{1000}\right)}$$

Auswertung nach Ergebnisfolge „2“, „3“, „4“



$$P(\text{L-Würfel}) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{75}{1000}\cdot\frac{430}{1000}\cdot\frac{270}{1000}\right)}$$

Hier wird das Gesamtdiagramm als ein einziges Bayes-Diagramm aufgefasst, das alle bisher gesammelte Information ohne Vorab-Auswertung darstellt, und die aktuellen a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten werden durch einmalige Anwendung der Bayes’schen Aussage bestimmt. Die Schülerinnen und Schüler werden allerdings die hier in Klammern gesetzten Produkte wohl sofort „ausrechnen“ (vgl. S. 168 unten). Bei dieser Herangehensweise steht nun der Rollenwechsel bisher ermittelter Werte (bei dem oben dargestellten Vorgehen wurden bei jedem neuen Würfeln aus den bisherigen a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten neue a-priori-Wahrscheinlichkeiten) nicht im Vordergrund; der hier vorgestellte Weg verlangt weniger Abstraktionsvermögen und ermöglicht das Entdecken eines *expliziten Bildungsgesetzes*.

Die zur Verfügung stehenden Informationen werden auf beiden Wegen letztlich in gleicher Weise genutzt, wie hier bezüglich der ersten Schritte in abstrakter Form (für die Leserin/den Leser) gezeigt werde:

Es seien wü bzw. qu die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der L-Würfel bzw. der Lego-Quader gewählt wird (hier beide 0,5). Mit w1, w2 bzw. w3 seien jene Wahrscheinlichkeiten bezeichnet, mit denen bei Verwendung des L-Würfels das 1., das 2. bzw. das 3. Ergebnis erzielt wird. Entsprechend sind die Bezeichnungen q1, q2 bzw. q3 zu verstehen. Nach dem oben auf den ersten Seiten dargestellten Weg iterativer Nutzung von Bayes-Diagrammen erhält man

- als **erste** a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten

- $\dfrac{wü \cdot w1}{wü \cdot w1 + qu \cdot q1}$ für das Gewähltsein des L-Würfels

bzw. $1 - \dfrac{wü \cdot w1}{wü \cdot w1 + qu \cdot q1} = \dfrac{qu \cdot q1}{wü \cdot w1 + qu \cdot q1}$ für das Gewähltsein des Quaders

- als **zweite** a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten dann:

$$\frac{\dfrac{wü \cdot w1}{wü \cdot w1 + qu \cdot q1} \cdot w2}{\dfrac{wü \cdot w1}{wü \cdot w1 + qu \cdot q1} \cdot w2 + \dfrac{qu \cdot q1}{wü \cdot w1 + qu \cdot q1} \cdot q2} = \frac{wü \cdot w1 \cdot w2}{wü \cdot w1 \cdot w2 + qu \cdot q1 \cdot q2}$$ „für den L-Würfel"

bzw. $1 - \dfrac{wü \cdot w1 \cdot w2}{wü \cdot w1 \cdot w2 + qu \cdot q1 \cdot q2} = \dfrac{qu \cdot q1 \cdot q2}{wü \cdot w1 \cdot w2 + qu \cdot q1 \cdot q2}$ „für den Quader"

- als **dritte** a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten:

$$\frac{\dfrac{wü \cdot w1 \cdot w2}{wü \cdot w1 \cdot w2 + qu \cdot q1 \cdot q2} \cdot w3}{\dfrac{wü \cdot w1 \cdot w2}{wü \cdot w1 \cdot w2 + qu \cdot q1 \cdot q2} \cdot w3 + \dfrac{qu \cdot q1 \cdot q2}{wü \cdot w1 \cdot w2 + qu \cdot q1 \cdot q2} \cdot q3} = \frac{wü \cdot w1 \cdot w2 \cdot w3}{wü \cdot w1 \cdot w2 \cdot w3 + qu \cdot q1 \cdot q2 \cdot q3}$$

bzw. $1 - \dfrac{wü \cdot w1 \cdot w2 \cdot w3}{wü \cdot w1 \cdot w2 \cdot w3 + qu \cdot q1 \cdot q2 \cdot q3}$,

usw. Die auf den beiden Wegen erhaltenen Terme stimmen also überein.

Sollten die Schülerinnen und Schüler den zweiten Weg gehen, so ist nicht zu erwarten, dass sie die Terme ohne Produktwertberechnung in oben aufgeführter ausführlicher Form (S. 169) stehen lassen und sofort auf das explizite Bildungsgesetz abheben. Zur Berechnung der jeweils aktuellen a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten (und für entsprechende Tipp-Abgabe) kann auch hier im HOME-Bereich des Rechners mit den Schülerinnen und Schülern eine Mini-Iteration aufgebaut werden:

TI-83: { 0.075, 0.075, 0.43, 0.27, 0.075, 0.075} $\longrightarrow$ LQQ

0.5 $\longrightarrow$ W **:** 0.5 $\longrightarrow$ Q

Iterationsblock: Würfelergebnis $\longrightarrow$ Z **:** W ·1/6 $\longrightarrow$ W **:** Q · LQQ (Z) $\longrightarrow$ Q **:** W / (W+Q)

TI-89/92: Listenelement mit eckigen Klammern aufrufen.

4.3.4 Literatur

[1] Cukrowicz, J., Zimmermann, B. (Hrsg.): Mathenetz 9, Ausgabe N. Westermann Verlag, Braunschweig 2001.

[2] Lambacher Schweizer: LS 9, Ausgabe Nordrhein-Westfalen. Klett Verlag, Stuttgart 2001. Aufgabe 5, S. 194.

4.3.5 Kontakt

Elke Baumann *Bm-EuH@t-online.de*

Christian Bräuer *Braeuer@josephinum-hildesheim.de*

Josef Rolfs *Josef.Rolfs@t-online.de*

4.4 Einsatz von Tabellenkalkulation und GTR

Excel-Datei zur Bayes-Statistik/Anwendung auf dem TI-83: Die Beschäftigung mit der Bayes-Statistik fordert geradezu den Einsatz von Programmen heraus, da der Vorgang der Berechnung jeder einzelner Schritte gut algorithmisiert werden kann. Hier werden Realisierungen mit Excel und mit dem GTR TI-83 vorgestellt, die Programme sind im Anhang elektronisch verfügbar bzw. vom *NiBiS*-Server herunterladbar.	
Besondere Materialien/Technologie: PC mit Excel/TI 83	**Dauer der Unterrichtseinheit:** max. 2 Unterrichtsstunden

Gliederung

4.4.1 Bayes-Statistik mit Excel

Generelle Vorbemerkungen zu den Excel-Tabellen

Auf die Verwendung von aufwändigen Makros oder Visual-Basic-Strukturen wird in allen Tabellen verzichtet, zum Verständnis der Anweisungen müssen die Schülerinnen und Schüler neben Excel-Grundanweisungen den Unterschied zwischen absoluter und relativer Zelladressierung und die Wenn()-Anweisung kennen. Die Komplexität der Anweisungen nimmt von Arbeitsblatt zu Arbeitsblatt zu.

Bayes-Eingabetabelle

Das Arbeitsblatt dient zur Eingabe der Aufgabensituation. Mögliche Eingabezellen sind farbig hinterlegt. Um versehentliche Änderungen durch die Benutzerin/den Benutzer zu verhindern, sind die übrigen Zellen schreibgeschützt. Der Schutz des Arbeitsblatts lässt sich über den Menüpunkt „Extras", „Schutz" aufheben bzw. wieder einschalten.

Drei Urnen mit weißen oder schwarzen Kugeln sind vorgegeben. Beim klassischen Urnenmodell erfolgt die Ziehung aus den Urnen mit der gleichen Grundwahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{3}$. Um auch Aufgaben bearbeiten zu können, bei denen die Wahrscheinlichkeit von der Anzahl der Elemente pro Urne abhängt (z. B. LS 9, S.188, Aufgabe 13, siehe Anhang), kann die Benutzerin/der Benutzer zwischen diesen beiden Modellen auswählen. Ebenso kann die Verteilung der Kugeln auf die einzelnen Urnen eingegeben werden.

Im ersten Schritt ermittelt die Excel-Tabelle die a-priori-Wahrscheinlichkeiten für die Ziehung einer weißen bzw. schwarzen Kugel aus der jeweiligen Urne.

Excel-Arbeitsblatt:

Bayes-Simulation

Eingabezellen: farbig hinterlegt

Klassisches Urnenmodell: jeweils gleiche Ziehungsw. pro Urne (j/n) oder Urnenwahrscheinlichkeit bezogen auf die Elementanzahl				n			
	Urne 1: Kugeln		Urne 2: Kugeln		Urne 3: Kugeln		
	weiß	10	weiß	3	weiß	0	
	schwarz	0	schwarz	3	schwarz	4	
a-priori-Wahrscheinlichkeit für							Summen
weiß		0,50		0,15		0,00	0,65
schwarz		0,00		0,15		0,20	0,35
	Summen	0,50		0,30		0,20	
gezogene Kugel (w oder s)	w						
a-posteriori-Wahrscheinlichkeit		0,77		0,23		0,00	

Die Benutzerin/der Benutzer kann die im ersten Zug gezogene Kugel festlegen, in der Tabelle wird dann die erste a-posteriori-Wahrscheinlichkeit berechnet.

Iteration: Ziehung einer weißen Kugel

In diesem Arbeitsblatt wird die wiederholte Ziehung einer weißen Kugel angenommen und die zugehörigen a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten werden berechnet.

Die Startwerte stammen aus der Bayes-Eingabetabelle. Entscheidend ist die Zeile 8. Durch „Herunterziehen“ dieser Zeile kann man die gewünschte Anzahl von Wiederholungen von Ziehungen der weißen Kugel erzeugen.

Das Blatt ist nicht geschützt, man sollte deshalb in und vor Zeile 8 keine Löschungen vornehmen.

Bayes-Iteration: mehrfaches Ziehen einer weißen Kugel

Ziehungnummer	gez. Kugel	ww	sw	ss	Pfadw. ww	Pfadw. sw	Pfadw. ss	totale W.
Vorüberlegung:	w				1	0,5	0	
n-te Ziehung einer w Kugel								
	Start	0,50	0,30	0,20				
1		0,7692308	0,2307692	0	0,5	0,15	0	0,65
2		0,8695652	0,1304348	0	0,7692308	0,115385	0	0,88461538
3		0,9302326	0,0697674	0	0,8695652	0,065217	0	0,93478261
4		0,9638554	0,0361446	0	0,9302326	0,034884	0	0,96511628
5		0,9815951	0,0184049	0	0,9638554	0,018072	0	0,98192771
6		0,9907121	0,0092879	0	0,9815951	0,009202	0	0,99079755
7		0,9953344	0,0046656	0	0,9907121	0,004644	0	0,99535604
8		0,9976617	0,0023383	0	0,9953344	0,002333	0	0,99766719
9		0,9988295	0,0011705	0	0,9976617	0,001169	0	0,99883087
10		0,9994144	0,0005856	0	0,9988295	0,000585	0	0,99941475
11		0,9997071	0,0002929	0	0,9994144	0,000293	0	0,9997072
12		0,9998535	0,0001465	0	0,9997071	0,000146	0	0,99985356
13		0,9999268	7,324E-05	0	0,9998535	7,32E-05	0	0,99992677
14		0,9999634	3,662E-05	0	0,9999268	3,66E-05	0	0,99996338
15		0,9999817	1,831E-05	0	0,9999634	1,83E-05	0	0,99998169

Iteration: Ziehung einer beliebigen Kugel

Auch dieses Blatt bezieht die Startwerte aus der Bayes-Eingabetabelle, berechnet werden die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die gezogene Kugel aus Urne 1, 2 oder 3 stammt. Die relevante Anweisungszeile ist Zeile 10, durch entsprechendes „Herunterziehen“ dieser Zeile kann die gewünschte Anzahl von Wiederholungen erzeugt werden. Die möglichen Eingabezellen sind farbig hinterlegt, die Benutzerin/der Benutzer kann eingeben, ob eine weiße (Eingabe w) oder schwarze Kugel gezogen wird („ideale“ Eingabe s, es erfolgt aber nur die Abfrage auf „Eingabe = w“).

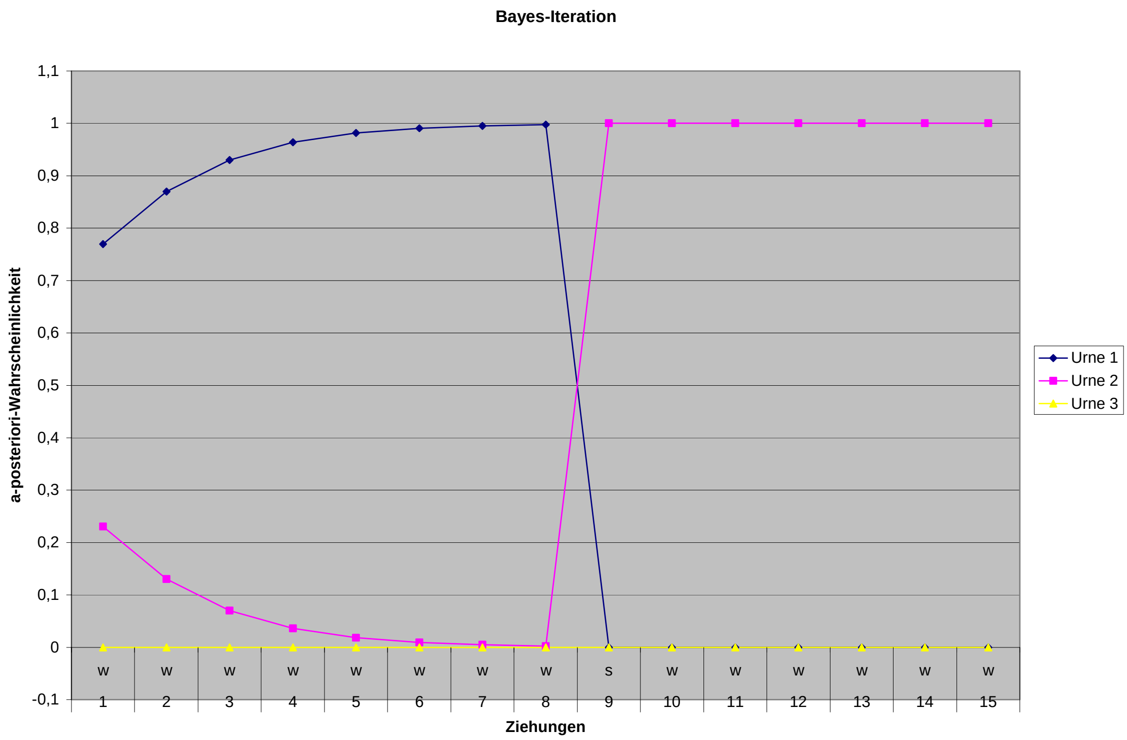
Um unbeabsichtigte Löschungen zu verhindern, ist das Arbeitsblatt mit Ausnahme der Eingabezellen schreibgeschützt. Der Schutz lässt sich wieder über den Punkt „Extras“, „Schutz“ abschalten.

In Diagramm 1 werden die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten aus der obigen Tabelle wiedergegeben

Bayes Iteration: Ziehen bel. Farben

Eingabezellen: farbig hinterlegt

Ziehungnummer	gez. Kugel (w/s)	ww	sw	ss	Pfadw. ww	Pfadw. sw	Pfadw. ss	totale W.
Vorüberlegung:	w				1	0,5	0	
	s				0	0,5	1	
	Start	0,50	0,30	0,20				
1	w	0,76923	0,23076923	0	0,5	0,15	0	0,65
2	w	0,86957	0,13043478	0	0,76923077	0,11538462	0	0,88461538
3	w	0,93023	0,06976744	0	0,86956522	0,06521739	0	0,93478261
4	w	0,96386	0,03614458	0	0,93023256	0,03488372	0	0,96511628
5	w	0,9816	0,01840491	0	0,96385542	0,01807229	0	0,98192771
6	w	0,99071	0,00928793	0	0,98159509	0,00920245	0	0,99079755
7	w	0,99533	0,00466563	0	0,99071207	0,00464396	0	0,99535604
8	w	0,99766	0,00233827	0	0,99533437	0,00233281	0	0,99766719
9	s	0	1	0	0	0,00116913	0	0,00116913
10	w	0	1	0	0	0,5	0	0,5
11	w	0	1	0	0	0,5	0	0,5
12	w	0	1	0	0	0,5	0	0,5
13	w	0	1	0	0	0,5	0	0,5
14	w	0	1	0	0	0,5	0	0,5
15	w	0	1	0	0	0,5	0	0,5



Schulbuchaufgabe (siehe Lit. [1])

Die im Text genannte Tabelle entspricht bis auf die Zeilenzahl dem obigen Arbeitsblatt.

Ein Beutel enthält zehn Chips. Fünf sind beiderseitig weiß (ww), zwei sind beiderseitig schwarz (ss). Die übrigen drei sind schwarz-weiß (sw). Ein zufällig gezogener Chip wird wiederholt geworfen. Achtmal fällt weiß, beim neunten Mal fällt schwarz, dann noch zweimal weiß.

a) Rechne im Heft nach, dass die Angaben der Zeilen 1 und 2 der Tabelle stimmen.

b) Erkläre anschaulich den Sprung der a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten nach dem achten Wurf.

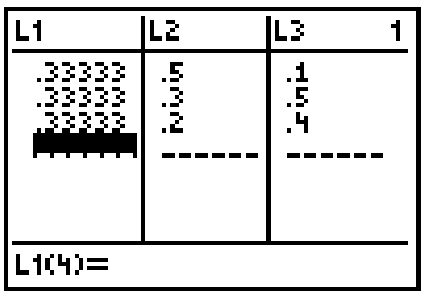
c) Welche Bedeutung hat das starke Anwachsen der totalen Wahrscheinlichkeit auf über 99 %? Warum bleibt sie nach dem Auftreten von „schwarz" konstant bei 0,5?

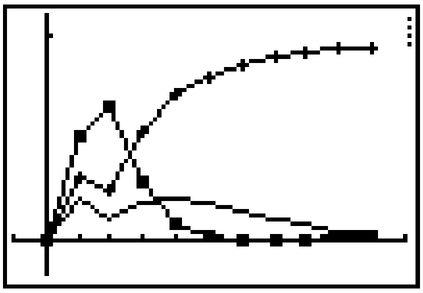
4.4.2 Bayes-Statistik mit dem TI-83

Erläuterungen zu den einzelnen Programmen

Es werden 3 Programme unterschiedlicher Komplexität vorgestellt, mit denen man die Bayes-Statistik auf einem TI-83 simulieren kann: BAYLIGHT geht von nur 2 Urnen aus, BAYMED von 3 Urnen, und bei BAYES ist die Anzahl der Urnen (fast) unbegrenzt. Zusätzlich gibt es noch das Programm ZIEH-URNE, mit dem man das Ziehen aus einer bestimmten Urne simulieren kann.
Ausgangspunkt ist grundsätzlich eine Urnen-Situation. Jede Urne kann eine beliebige Anzahl von schwarzen oder weißen Kugeln enthalten; die Anzahl der Kugeln muss bekannt sein. Eine beliebige Urne wird (verdeckt) ausgewählt und eine Kugel daraus gezogen. Dann wird die Kugel wieder zurückgelegt. Dieser Vorgang wird mit immer derselben Urne wiederholt. Aus den Ergebnissen erhält man nun eine Wahrscheinlichkeit dafür, aus welcher Urne gezogen wurde.

Die a-priori-Wahrscheinlichkeiten (meist untereinander gleich wie beim nebenstehenden Bild) müssen vor dem Programstart manuell in die Liste L1 eingetragen werden (2 Werte bei BAYLIGHT, 3 bei BAYMED und bis zu 900 bei BAYES). Ferner werden in die Liste L2 die relativen Häufigkeiten für „weiß" pro Urne eingetragen und in L3 die für „schwarz". Urne 1 enthält im Beispiel also weiße und schwarze Kugeln im Verhältnis 5:1. Die Listen müssen jeweils die gleiche Anzahl von Elementen haben.





Alle Programme berechnen nun nach dem vereinfachten Satz von Bayes die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten dafür, dass eine gezogene Kugel aus der ausgewählten Urne stammt. Diese Wahrscheinlichkeit ersetzt die a-priori-Wahrscheinlichkeiten und wird in einem weiteren Durchgang zum Ausgangspunkt einer neuen Berechnung. Es können beliebig viele Iterationen durchgeführt werden. Die jeweils aktuellen Werte für die Wahrscheinlichkeiten werden nach jedem Durchlauf in L1 gespeichert, gehen also bei einer erneuten Berechnung verloren. Das Programm BAYES speichert diese Werte in den Listen A2 bis A4 für die ersten 3 Kugeln ab und ermöglicht darüber hinaus eine graphische Darstellung des Verlaufs der Wahrscheinlichkeiten.

Das Ziehen der Kugel muss zufällig erfolgen in Abhängigkeit von der Füllung der gewählten Urne. Das Programm ZIEHURNE simuliert eine solche Ziehung; die Befüllung der Urne mit weißen und schwarzen Kugeln muss vorher angegeben werden.

Bemerkungen

Die Programmierung kann durchaus mit interessierten Schülerinnen und Schülern nachvollzogen werden. Hierbei handelt es sich aber - ebenso wie bei den Berechnungen mit Excel - um ein optionales Angebot, dass allerdings gut für eine Veranschaulichung der Bayes-Statistik eingesetzt werden kann.

Programmlistings

BAYLIGHT

```
Lbl 1
Me-
nu("BEOBACHTUNG","WEISS",W,"SCHWA
RZ",S)
Lbl W
L   *L,/sum(L   *L,)üL
Goto 2
Lbl S
L   *Lƒ/sum(L   *Lƒ)üL
Lbl 2
ClrHome
Disp "A-POSTERIORI"
Disp "P(W)",L   (1)
Disp "P(S)",L   (2)
Pause
Menu("","WEITER",1,"ENDE",3)
Lbl 3
```

BAYMED

```
Lbl D
Menü("MUENZE","WEISS",A,"SCHWARZ",B)
Lbl A
L1*L2→L4
Goto C
Lbl B
L1*L3→L4
Lbl C
L4/Summe(L4)→L1
Anz. "A POSTERIORI"
Anz. L1(1)
Anz. L1(2)
Anz. L1(3)
Pause
Menü("WIEDERHOLEN","JA",D,"NEIN",E)
Lbl E
```

BAYES

```
ClrHome
Disp "BAYESSTATISTIK"
Disp "L1:AúPRIORI"
Disp "L2:P(WEISS)"
Disp "L3:P(SCHWARZ)"
Disp "MAX. 6 ELEMENTE"
Pause
{0}üáA1
{0}üáA2
{0}üáA3
{0}üáA4
0üM
Lbl 1
Me-
nu("BEOBACHTUNG","WEISS",W,"SCHW
ARZ",S)
Lbl W
L   *L,/sum(L   *L,)üL
Goto 2
Lbl S
L   *Lƒ/sum(L   *Lƒ)üL
```

```
augment(áA1,{M})üáA1
augment(áA2,{L   (1)})üáA2
augment(áA3,{L   (2)})üáA3
augment(áA4,{L   (3)})üáA4
ClrHome
Disp "A-POSTERIORI"
For(N,1,dim(L   ))
Disp L   (N)
End
Pause
Lbl 5
Menu("","WEITER",1,"GRAFIK",3,"ENDE",4)
Lbl 3
Plot1(xyLine,áA1,áA2,Ð)
Plot2(xyLine,áA1,áA3,Ñ)
Plot3(xyLine,áA1,áA4,Ò)
ZoomStat
Pause
Goto 5
Lbl 4
```

ZIEHURNE

```
ClrHome
Disp "SIMULATION DES"
Disp "ZIEHENS VON"
Disp "S/W KUGELN AUS"
Disp "EINER URNE"
Input "WEISS    ",W
Input "SCHWARZ  ",S
{1}üáWW
{0}üáSS
For(N,0,W-2)
augment(áWW,{1})üáWW
End
For(N,0,S-2)
augment(áSS,{0})üáSS
End
If W=0
Then
áSSüáLZ
Else
augment(áWW,áSS)üáLZ
End
If S=0
Then
áLWüáLZ
Else
```

```
If S=0
Then
áLWüáLZ
Else
augment(áWW,áSS)üáLZ
End
W+SüM
Lbl X
ClrHome
Me-
nu("AUSWAHL","ZIEHEN",Y,"BEENDEN",Z)
Lbl Y
randInt(1,M)üK
If áLZ(K)=1
Then
Disp "W EISS"
Else
Disp "S CHWARZ"
End
Pause
Goto X
Lbl Z
```

4.4.3 Literatur

[1] Cukrowicz, J., Zimmermann, B. (Hrsg.): Mathenetz 9, Ausgabe N. Westermann Verlag, Braunschweig 2001.
[2] Lambacher Schweizer: LS 9, Ausgabe Nordrhein-Westfalen. Klett Verlag, Stuttgart 2001. S. 188, Nr. 13
[3] Texas Instruments: Handbuch TI 83/83 Plus.

4.4.4 Kontakt

Excel

Frank Ueckert *ueckert@vr-web.de*

TI-83

Jürgen Enders *aj.enders@t-online.de*

4.5 Vom Problem zum Werkzeug

<table>
<tr><td colspan="2">Die Möglichkeit, von einem Ereignis auf ein anderes rückzuschließen, ist im Alltag von grundlegendem Interesse. Dabei treten häufig Fehlschlüsse auf, die dem Lernenden bewusst werden müssen. Die Bearbeitung solcher Problemstellungen erfordert Werkzeuge, die in dieser Unterrichtsreihe erarbeitet und angewandt werden sollen. Baumdiagramme und Mehrfeldertafeln ermöglichen auf intuitive Weise unterschiedliche Zugänge und erweitern so das Methodenrepertoire der Lernenden.</td></tr>
<tr><td>Unterrichtsorganisation:
• Problemorientierung, Realitätsbezug, Modellierung, Verbalisierung
• Öffnen von Lernsituationen, variationsreiches Üben verbunden mit Eigentätigkeit
• Präsentation von Arbeitsergebnissen unter Verwendung der neuen Werkzeuge</td><td>Dauer der Unterrichtseinheit:
5 - 6 Unterrichtsstunden</td></tr>
<tr><td>Besondere Materialien:
keine</td><td>Notwendige Vorkenntnisse:
Baumdiagramm und Pfadregeln</td></tr>
</table>

Gliederung

4.5.1 Motivation zur Beschäftigung mit Bayes-Statistiken

„Erstens kommt es anders und zweitens als man denkt.“
Die Verwechslung von Bedingung und Ereignis ist ein weit verbreiteter Irrtum, der manchmal wohl auch bewusst zur Irreführung oder auch der Sensation willen begangen wird. Dabei ist die sprachliche Formulierung von entscheidender Bedeutung.

Beispiele:

- 70 % der Unfälle passieren tagsüber! Schlagzeile: Autofahren ist tags gefährlicher als nachts.
- In der Wohnung werden nachts absolut gesehen mehr Verbrechen begangen als im Stadtpark! Schlagzeile: Man schläft nachts im Park sicherer als in der Wohnung!

Bereits in einfachen Bäumen oder Vierfeldertafeln kann man die wirklichen Verhältnisse klarstellen und damit auch quantitative Aussagen gewinnen. Diese einfachen Werkzeuge erlauben es, Anwendungssituationen des Satzes von Bayes ohne wahrscheinlichkeitstheoretischen Formalismus schon auf dieser Klassenstufe verstehbar zu machen und stochastisches Denken zu fördern.

4.5.2 Modellieren von Bayes-Problemen

Statistische Informationen können auf verschiedene Weise repräsentiert werden:

- Prozentwerte, Dezimalbrüche (30 %, 0,3)
- Bruchzahlen ($\frac{3}{10}$)
- Absolute Häufigkeiten (3 von 10)
- Chancenverhältnisse (3:7)

„Natürliche“ Algorithmen für statistisches Denken bauen auf Informationen in absoluten Häufigkeiten auf, da diese den Strukturen realer Umweltinformationen entsprechen.
Daher sollte die Formulierung für ein erstes Beispiel zum Einstieg in die Bayes-Problematik absolute Häufigkeiten benutzen. Die Verwendung absoluter Häufigkeiten vermeidet eine oft auftretende Fehlerquelle bei der Verwendung von relativen Häufigkeiten/Wahrscheinlichkeiten: Missachtung der Bezugsgröße.
Die Darstellung der Bayes-Problematik im Baumdiagramm knüpft an Bekanntes an. Darüber hinaus bieten Baumdiagramme gegenüber der Vierfeldertafel die Möglichkeit, die einfließenden Informationen in zwei verschiedenen Sichtweisen darzustellen und zu interpretieren. Führt man beide Sichtweisen zu einem Diagramm zusammen, so wird anschaulich klar, wie die gegebenen Informationen die Gesamtheit von Baumstufe zu Baumstufe aufteilen, und zwar von beiden Seiten unter einem anderen Aspekt. Gleichzeitig eröffnet diese Zusammenschau ein tieferes Verständnis für die Aussagekraft einer Vierfeldertafel.
Das Modellieren mit Baumdiagrammen unter Verwendung von Wahrscheinlichkeiten eröffnet durch den Rückgriff auf die bekannten Pfadregen die direkte Berechnung gesuchter Wahrscheinlichkeiten. In Anlehnung an die Berechnung der bekannten Laplace-Wahrscheinlichkeiten bestimmt man mit Hilfe der Produkt- und der Summenregel die Wahrscheinlichkeiten, die für die Ursache „günstig“ bzw. für

das beobachtete Ergebnis „möglich“ sind und bildet den entsprechenden Quotienten. Eine Exaktifizierung dieser Vorgehensweise ist nicht angestrebt, vielmehr soll eine kontextbezogene Plausibilitätsbetrachtung zum Aufbau eines altersgemäßen Verständnisses beitragen.
Zur Abrundung der Thematik sollen die Lernenden erfahren, dass neue Einsichten oder Beobachtungen zu der Erkenntnis führen, dass Entscheidungen revidiert werden müssen. Dies führt zur Idee der Iteration.

4.5.3 Die Unterrichtseinheit

Zu Beginn der Unterrichtseinheit kann - je nach Lerngruppe und Vorliebe der Lehrkraft - die Analyse der Aussagen vorgelegter Zeitungsartikel stehen.
Es ist aber auch möglich, direkt über Spiele den Einstieg zu gestalten.
Diese Unterrichtseinheit umfasst 2 Stufen der Hinführung zur Bayes-Problematik.

Von absoluten Daten zur Vierfeldertafel und zu Baumdiagrammen

Die folgende Problemstellung bietet sich als Ausgangspunkt an.

Bei Infektionskrankheiten ist es wichtig, dass man schnell die Art der Krankheit erkennt, damit man sie bekämpfen kann. Hierzu führt man Schnelltests durch, die allerdings Mängel haben: Manchmal wird eine Krankheit angezeigt, obwohl sie nicht vorliegt; gelegentlich wird eine Krankheit nicht angezeigt, obwohl sie vorhanden ist.
129 von 15748 untersuchten Personen haben eine seltene Krankheit. Bei 118 der 129 Personen, die tatsächlich krank sind, wird die Krankheit mit dem Testverfahren auch erkannt. Bei 412 der restlichen 15619 Personen, die nicht erkrankt sind, weist das Testverfahren fälschlicherweise dennoch auf das Vorliegen der Krankheit hin.

Sie hat einerseits einen relevanten Realitätsbezug und ermöglicht andererseits mit der Frage nach einer Wiederholung des Tests einen Einstieg in die iterative Betrachtungsweise.
Es wird an dieser Stelle bewusst auf die Nennung einer konkreten Krankheit verzichtet, um individuelle Betroffenheit einzelner Schülerinnen und Schüler zu vermeiden.
In der Anlage und in der genannten Literatur finden sich konkrete Beispiele zu diesem Thema, die gegebenenfalls alternativ eingesetzt werden können.
Um eine möglichst offene Unterrichtssituation zu erzeugen, sollen die Lernenden zunächst eine subjektive Einschätzung vornehmen, z. B.:

In der Schule wird ein solcher Test durchgeführt. In welche Situation kannst du als teilnehmende Person kommen?

Muss sich eine positiv getestete Person große Sorgen machen. Kreuze auf der Skala an:

große Sorgen	mittlere Sorgen	keine Sorgen

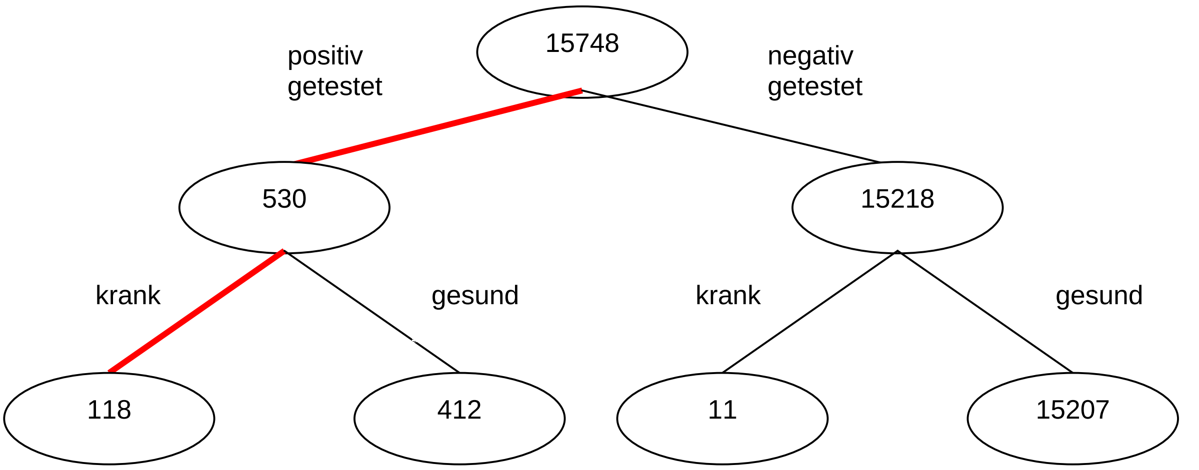
Diese subjektive Einschätzung der Situation soll im weiteren Unterrichtsverlauf mit mathematischen Methoden erhärtet oder widerlegt werden.
Dazu ist eine übersichtliche Aufbereitung der vorliegenden Daten hilfreich. Somit bietet es sich an, die Vierfeldertafel als neue Darstellungsform an dieser Stelle einzuführen.

Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten

	positiv getestet	negativ getestet	Summe
krank	**118**	**11**	**129**
gesund	**412**	**15207**	**15619**
Summe	530	15218	**15748**

Mit Hilfe der Tabelle können die Lernenden eine erste Bewertung ihrer subjektiven Einschätzung vornehmen. Es bietet sich aber auch an, auf das bekannte Werkzeug Baumdiagramm zurückzugreifen, da davon auszugehen ist, dass der Umgang mit derartigen Tabellen noch ungewohnt ist. Auch hier sollte man zunächst nur mit absoluten Häufigkeiten arbeiten. Zwei Darstellungen im Baumdiagramm sind möglich. Diagramm 1 führt unmittelbar zur Beantwortung des Eingangsproblems, da ein Schätzwert für die interessierende Wahrscheinlichkeit direkt ermittelt werden kann. Diagramm 2 erfordert weiterführende Überlegungen, die auch in Form eines Baumdiagramms dargestellt werden können (Diagramm 3).

Diagramm 1



<u>Auswertung</u>

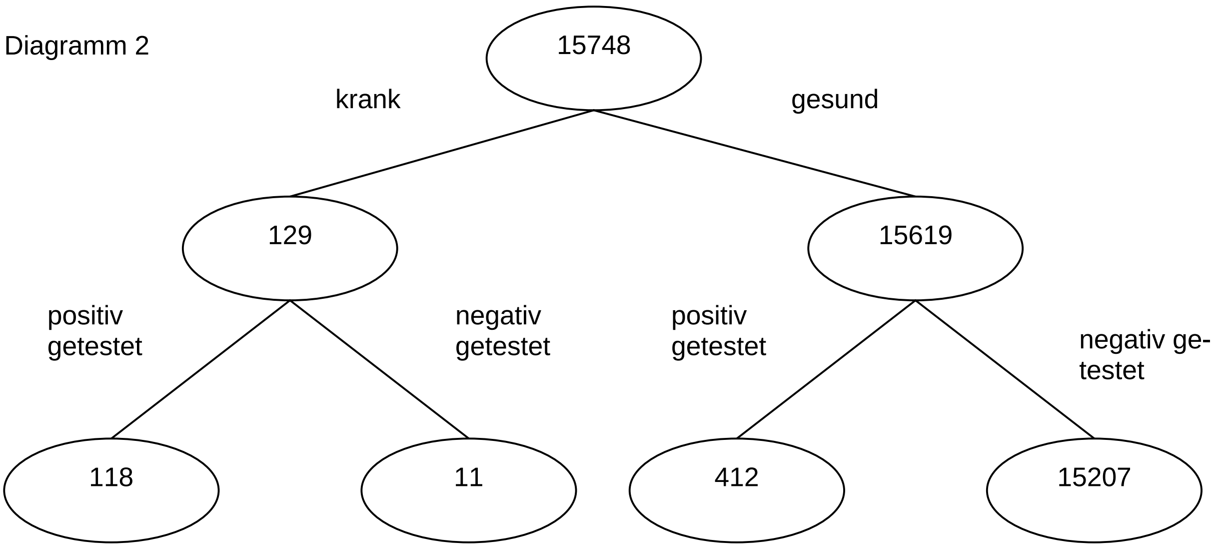
118 von 530 positiv getesteten Personen sind krank. Das sind ungefähr 22,3 %.

412 von 530 positiv getesteten Personen sind gesund. Das sind ungefähr 77,7 %.

Es gibt somit viel mehr positiv getestete gesunde Personen als positiv getestete kranke Personen.

(Vermutlich hat der Lernende dieses Ergebnis nicht erwartet und einen sehr viel höheren Grad der Besorgnis angekreuzt.)

Diagramm 2



Auswertung

118 von 129 kranken Personen werden positiv getestet. Das sind ungefähr 91,5 %.

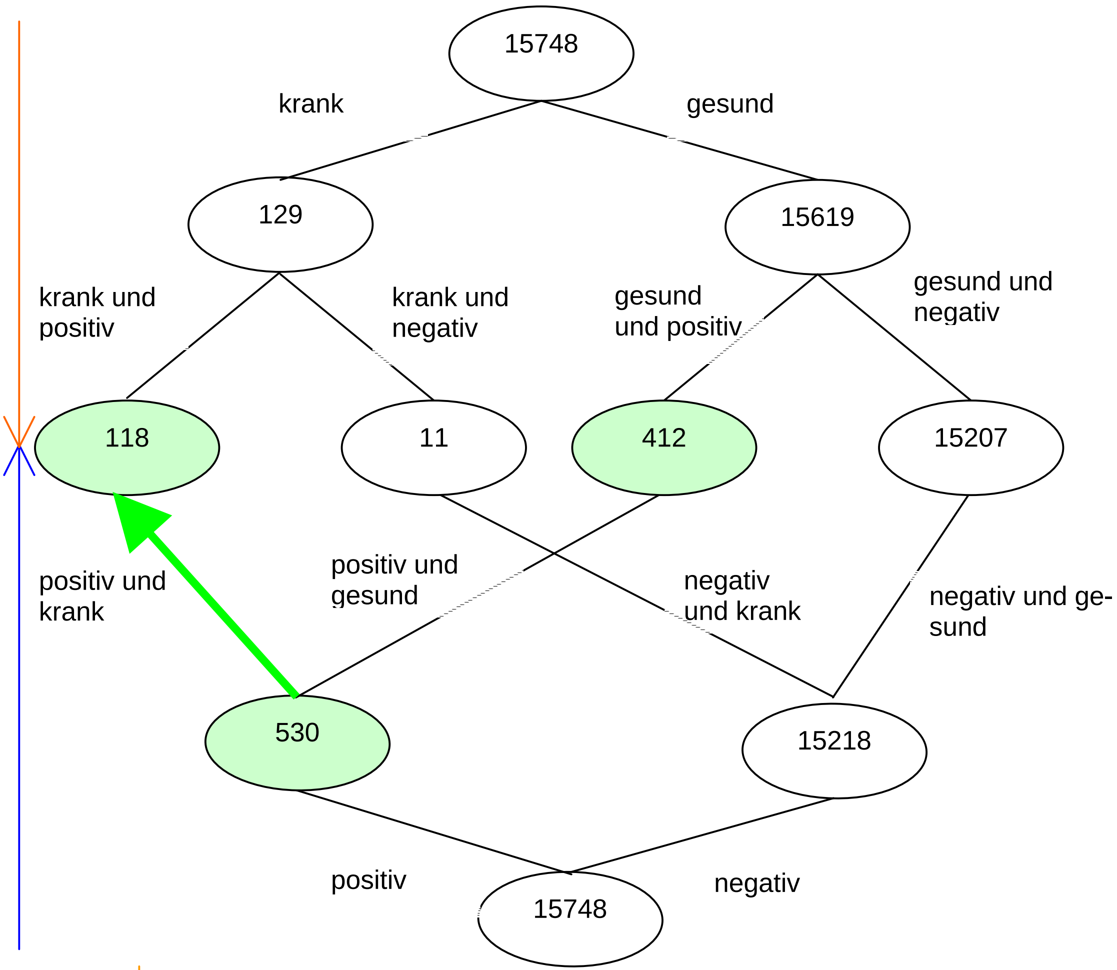
11 von 129 kranken Personen werden negativ getestet. Das sind ungefähr 8,5 %.

412 von 15619 gesunden Personen werden positiv getestet. Das sind ungefähr 2,6 %.

15207 von 15619 gesunden Personen werden negativ getestet. Das sind 97,4 %.

(Der Grad der Besorgnis lässt sich aus dieser Auswertung nicht unmittelbar erkennen.)

Diagramm 3



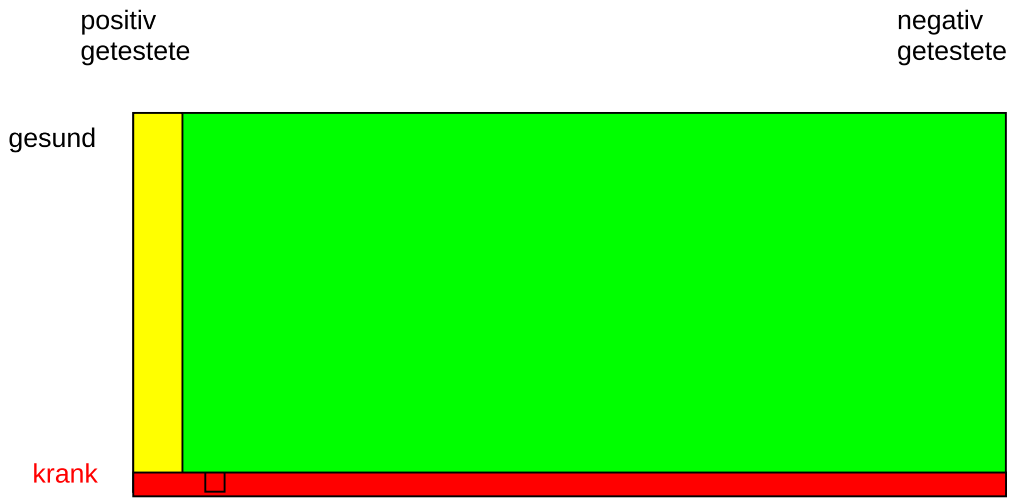
Merkmalsausprägung krank/gesund auf Stufe 1.

Merkmalsausprägung positiv/negativ auf Stufe 1.

118 von 530 positiv getesteten Personen sind tatsächlich krank.

Die Ergänzung des Diagramms 2 zum Diagramm 3 nimmt die Informationen aus Diagramm 1 auf und ermöglicht so eine Antwort auf die direkte sowie die umgekehrte Fragestellung. Der Ausbau zum Diagramm 3 erfolgt durch die Zusammenfassung der positiv bzw. negativ getesteten Personen. Damit ergeben sich zwei Eingänge in das Diagramm, die die Umkehrung der Merkmalsausprägung auf der jeweils ersten Stufe in einer Zusammenschau verdeutlichen.
Diese Umkehrung der Sichtweise wird besonders deutlich, wenn im Diagramm Pfeile verwendet werden.
Ein Vergleich des erweiterten Baumdiagramms mit der Vierfeldertafel führt zu der Erkenntnis, dass beide Darstellungen gleichermaßen geeignet sind, die Ausgangsproblematik zu modellieren.
Die Frage nach der Güte von Testergebnissen führt zu analogen Betrachtungsweisen für Wahrscheinlichkeiten.

Zur Vermeidung von Fehleinschätzungen bei derartigen Testverfahren sollten alle Pfade der beiden Baumdiagramme analysiert und in der folgenden Weise visualisiert werden.

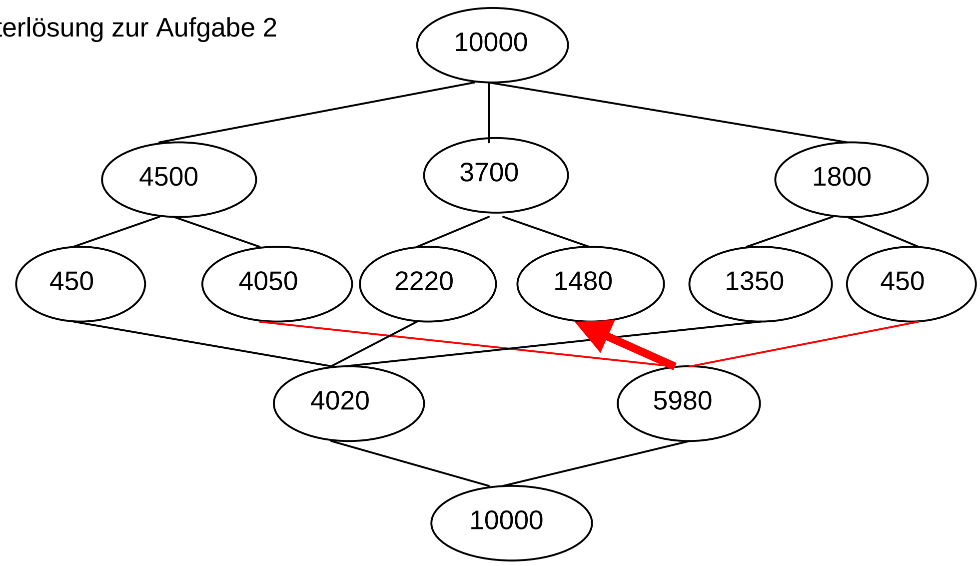


Die Lernenden erkennen so, dass die Krankheit bei „sehr vielen" der tatsächlich Erkrankten auch erkannt wird und nur bei „sehr wenigen" der Gesunden fälschlich diagnostiziert wird; es aber trotzdem „ein Vielfaches mehr" gesunde Personen als kranke mit positiven Testergebnis gibt. Auch der Grund hierfür wird offensichtlich, dass es nämlich ganz einfach „grundsätzlich viel mehr Gesunde als Kranke gibt". Auf der Grundlage dieser Erkenntnis kann auch über den Nutzen flächendeckender Vorsorgeuntersuchungen diskutiert werden (vergleiche z. B. Zeitungsartikel [7]).

Weiterführende Aufgaben zur Übung und Festigung

1. →Vierfeldertafel wird übersetzt
2. →ist der Schüler mit rotem Pullover aus Klasse 9a (Umfrage)
3. Man kann heute davon ausgehen, dass etwa 0,1 % der Bevölkerung der Bundesrepublik HIV-infiziert ist. Die vorliegenden Testverfahren zum Nachweis der Infektion haben mittlerweile eine hohe Sicherheit: bei 99,9 % der tatsächlich Infizierten erfolgt eine positive Testreaktion; nur bei 0,3% der nicht infizierten Testpersonen wird irrtümlich eine Infektion angezeigt. Wie viele von 100000 Testpersonen haben beim Vorliegen eines positiven Testergebnisses tatsächlich eine HIV-Infektion. Mache eine Aussage zur Güte dieses Testverfahrens.
4. Drei Lokalzeitungen A, B, und C haben Marktanteile von 45 %, 37 % und 18 %. Bei Zeitung A erfolgt 10 % des Verkaufs an Abonnenten, bei Zeitung B sind dieses 60 % und bei Zeitung C 75 %.
   Pro Tag werden insgesamt 10000 Exemplare ausgeliefert.
   An einem Kiosk wird gerade eine Lokalzeitung verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies Zeitung B?
5. „Eltern wünschen höheren Bildungsabschluss für Kinder"
   37 % aller 10- bis 16jährigen besuchen derzeit die Schulform Gymnasium. Jedoch nur 35% dieser Jugendlichen haben Eltern, die selbst zum Gymnasium gingen. Umgekehrt findet man unter den Schülerinnen und Schülern, die eine Haupt- oder Realschule besuchen, nur 8 %, deren Eltern ein Gymnasium absolvierten.
   Zeichne ein umgekehrtes Baumdiagramm und formuliere die darin enthaltenen Informationen als Zeitungsnotiz. Wähle eine schlagkräftige Überschrift.

Musterlösung zur Aufgabe 2



Von 5980 Nichtabonnenten beziehen 1480 die Zeitung B, d. h. mit einer Wahrscheinlichkeit von p= $\frac{1480}{5980} = 0,247$ erwirbt der Käufer die Zeitung B.

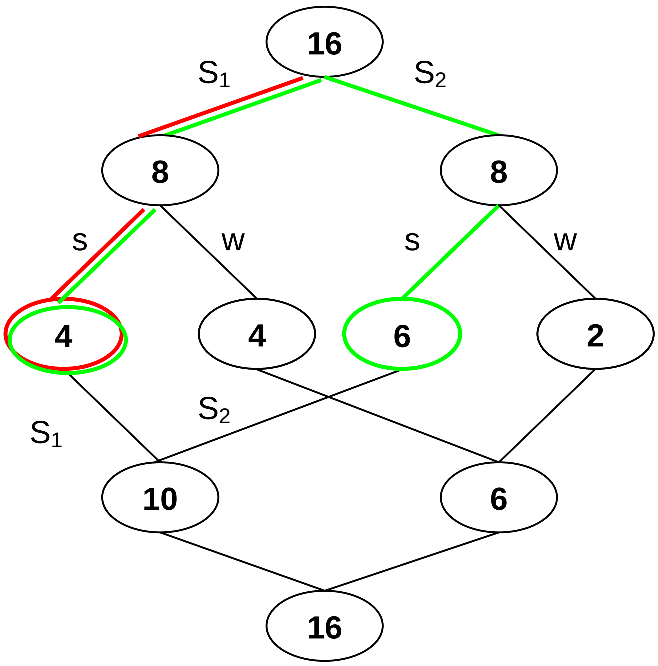
Von relativen Häufigkeiten/Wahrscheinlichkeiten zur „formelmäßigen“ Berechnung

Mit den Schülern kann folgender Versuch durchgeführt werden:

Auf einem Tisch liegen zwei für den Zuschauer nicht unterscheidbare Socken, von denen er aber weiß, dass die erste (S_1) vier schwarze und vier weiße Kugeln und die zweite (S_2) sechs schwarze und zwei weiße Kugeln enthält. Es wird eine Socke zufällig ausgewählt und dieser eine Kugel entnommen. Die Kugel ist z. B. schwarz.

Die Schülerinnen und Schüler sollen einen Tipp abgeben, welcher Socke die Kugel entnommen wurde.

Die Schülerinnen und Schüler sollen ein Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten im Heft oder auf dem Arbeitsblatt erstellen, in dem der günstige Fall und die möglichen Fälle farbig markiert werden. Außerdem soll der Baum durch den Umkehrbaum ergänzt werden.



P(S_1, wenn Kugel schwarz)=$\frac{4}{10}$

P(S_2, wenn Kugel schwarz)=$\frac{6}{10}$

Anknüpfend an das Vorwissen aus dem 8. Schuljahr soll jetzt das Problem mit einem Baumdiagramm unter Verwendung der auftretenden Wahrscheinlichkeiten untersucht werden.

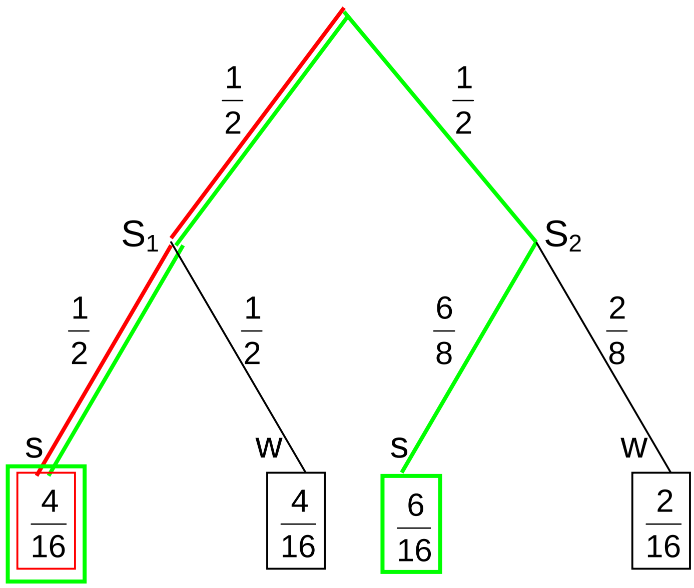
Ziele dabei sind:
- eine Vereinfachung des Diagramms
- eine Hinführung zur vereinfachten Bayes-Formel
- die Möglichkeit zur Anwendung der Iteration

$P(S_1 \text{ und schwarz}) = \frac{4}{16}$

$P(S_1 \text{ und weiß}) = \frac{4}{16}$

$P(S_2 \text{ und schwarz}) = \frac{6}{16}$

$P(S_2 \text{ und weiß}) = \frac{2}{16}$



Pfadwahrscheinlichkeiten $\rightarrow$

$$P(S_1, \text{wenn Kugel schwarz}) = \frac{P(S_1 \text{ und schwarze Kugel})}{P(\text{schwarze Kugel})} = \frac{\frac{4}{16}}{\frac{4}{16} + \frac{6}{16}} = \frac{4}{10}.$$

Die Sicherheit für Socke 1 beträgt somit 40 %, die Irrtumswahrscheinlichkeit 60 %.

Die zusätzliche Information der gezogenen schwarzen Kugel ergibt eine größere Wahrscheinlichkeit für die Wahl der Socke.
Die Auswertung des Baumdiagramms unter Verwendung der Anzahlen führt zum gleichen Ergebnis wie die Auswertung unter Nutzung der Wahrscheinlichkeiten.

Allgemein lernen die Schülerinnen und Schüler an diesem Beispiel durch Bildung des Quotienten ähnlich wie bei der Laplace-Wahrscheinlichkeit eine vereinfachte Form der Bayes-Regel kennen:

$$\frac{P(\text{"günstig für das Ereignis"})}{P(\text{"möglich für das Ereignis"})}$$

Weiterführende Aufgaben zur Übung

1. Erstelle zu dem bearbeiteten Problem eine Vierfeldertafel.
2. Welche anderen Fälle sind möglich? Berechne Wahrscheinlichkeit und Irrtumswahrscheinlichkeit.
3. Verändere die Zusammensetzung der Kugeln in den Socken und bearbeite dieses Problem.

Mögliche weitere Vorgehensweise

- Verbesserung der Prognosesicherheit bzw. Verminderung der Irrtumswahrscheinlichkeit durch Wiederholung des Experimentes (Iteration mit oder ohne Zurücklegen)
- Durchführen eines ähnlichen Experimentes mit drei Socken (Schränken, Maschinen, ...)

.

Arbeitsblatt: Analyse eines Schnelltests zum Erkennen einer seltenen Krankheit

Bei Infektionskrankheiten ist es wichtig, dass man schnell die Art der Krankheit erkennt, damit man sie bekämpfen kann. Hierzu führt man Schnelltests durch, die allerdings Mängel haben: manchmal wird eine Krankheit angezeigt, obwohl sie nicht vorliegt; gelegentlich wird ein Krankheit nicht angezeigt, obwohl sie vorhanden ist.

129 von 15748 untersuchten Personen haben eine seltene Krankheit. Bei 118 der 129 Personen, die tatsächlich krank sind, wird die Krankheit mit dem Testverfahren auch erkannt. Bei 412 der restlichen 15619 Personen, die nicht erkrankt sind, weist das Testverfahren fälschlicherweise dennoch auf das Vorliegen der Krankheit hin.

In der Schule wird ein solcher Test durchgeführt. In welche Situation kannst du als teilnehmende Person kommen?

Muss sich eine positiv getestete Person große Sorgen machen. Kreuze auf der Skala an:

große Sorgen **mittlere Sorgen** **keine Sorgen**

Fülle folgende Tabelle aus und versuche, deine Einschätzung zu bestätigen oder zu widerlegen.

	positiv getestet	negativ getestet	Summe
krank			
gesund			
Summe			

4.5.4 Literatur

[1] Strick, H. K.: Vierfeldertafel im Stochastikunterricht der Sek. I und II. PM Heft 2/April 1999, S. 49 ff.
[2] Strick, H. K.: Pressemeldungen (10): Über die Schwierigkeiten, verständlich über Vorsorgemaßnahmen zur Krebsfrüherkennung zu informieren, PM, Heft 6/Dezember 2000, S. 247 ff.
[3] Wassner, C. u. a.: Muss der Satz von Bayes schwer verständlich sein? PM Heft 1/ Februar 2002, S. 12 ff.
[4] Barth, F.: Erstens kommt es anders und zweitens als man denkt. Paradoxien im Umfeld der bedingten Wahrscheinlichkeit In: Berichte über Mathematik und Unterricht, No. 94-03, ETH Zürich.
[5] Wirths, H.: Stochastik: Unterrichtsbeispiele und Aufgaben. Oldenburger Vor-Drucke 362, Oldenburg 1989.
[6] Cukrowicz, J., Zimmermann, B. (Hrsg.): Mathenetz 9, Ausgabe N. Westermann Verlag, Braunschweig 2001.
[7] Ver.di: Zu Risiken fragen Sie Ihren Statistiker. VER.DI Publik 01, Februar 2002.

4.5.5 Kontakte

Uwe Brauns	*brauns@t-online.de*
Horst Doebler	*Horst-Doebler@t-online.de*
Bernd Eichert	
Dr. Frieder Lewerenz	*f.lewerenz@nwz.de*
Alheide Röttger	*RoettgerHase@t-online.de*
Hartmut Wolf	

4.6 Schätzen und Berechnen von Bayes-Wahrscheinlichkeiten

<table>
<tr><td colspan="2">Auf der Basis des heuristischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs (Wahrscheinlichkeiten als bestmögliche Prognosen relativer Häufigkeiten in langen Versuchen) sollen die Schülerinnen und Schüler Wahrscheinlichkeiten vor und nach bekannt gegebenen Zusatzinformationen schätzen und anschließend die Güte ihrer Schätzungen durch Rechnung überprüfen.</td></tr>
<tr><td>Unterrichtsorganisation:
Partnerarbeit, Gruppenarbeit</td><td>Dauer der Unterrichtseinheit:
ca. 6 Unterrichtsstunden</td></tr>
<tr><td>Besondere Materialien:
Graphikfähiger TR, Tabellenkalkulation</td><td>Notwendige Vorkenntnisse:
Baumdiagramme, Pfad- und Summenregel</td></tr>
</table>

Gliederung

4.6.1 Motivation zur Beschäftigung mit Bayes-Statistiken

1. **Zu Beginn der Unterrichtseinheit kann - je nach Lerngruppe und Vorliebe der Lehrkraft - die Analyse der Aussagen vorgelegter Zeitungsartikel stehen.**
   Sie soll dazu dienen den Schülerinnen und Schülern vorzustellen, dass sie in der folgenden Unterrichtseinheit befähigt werden sollen, real existierende Problemstellungen in Teilprobleme zu zerlegen und Werkzeuge „an die Hand zu bekommen“, mit denen sie damit zusammenhängende Fragen präzise und begründet beantworten können.
2. **Es ist aber auch möglich, direkt über Spiele den Einstieg zu gestalten und später reale Anwendungsaufgaben zu behandeln.**

zu 1.:

Zeitungsartikel:

- „Stoiber-Weisheit“ zu Heroinabhängigen (s. u.)
- Panikreaktionen nach positiven Testergebnissen bzgl. unheilbarer Krankheiten
- „Zahnpasta-Doping“
- Klassenzusammensetzungen mit/ohne Alkoholerfahrung
- „Viele Jugendliche ohne Hauptschulabschluss“ (s. u.)
- „CDU/CSU kann sich auf ältere Wähler verlassen (s. u.)

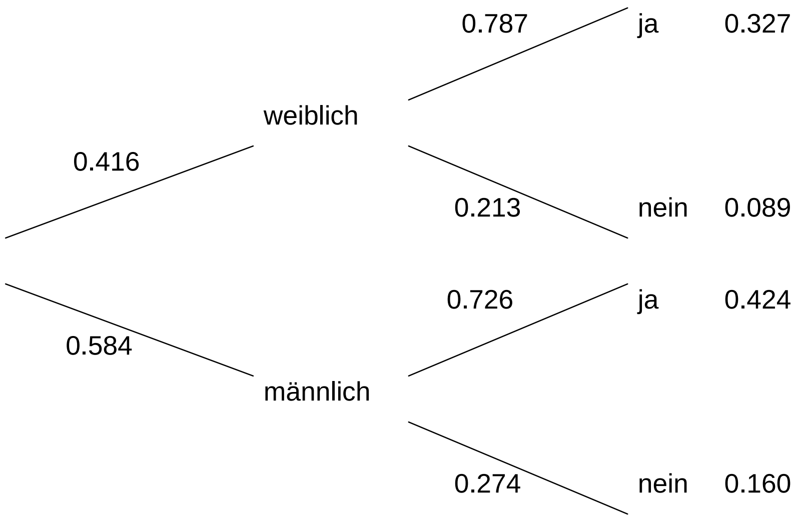
<table>
<tr><td colspan="2">Heftiger Streit um Legalisierung von Drogen
Vor einigen Jahren fand die bayrische Polizei in einer statistischen Erhebung, dass 60 % der Heroinabhängigen Haschisch geraucht hatten, bevor sie heroinabhängig wurden. Der bayrische Innenminister (Anm.: Edmund Stoiber) betrachtet das als Beweis dafür, dass Haschisch eine „Einsteigerdroge“ ist. Wenn jemand Haschisch raucht, so argumentiert er, wird er später (ungefähr mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%) als Heroinabhängiger enden.
Mittelbayrische Zeitung vom 28.2.1992 (zitiert nach Lit. [3])</td></tr>
<tr><td>Viele Jugendliche ohne Hauptschulabschluss
Am Ende des letzten Schuljahres verließen 291 418 Jugendliche die von ihnen bis dahin besuchte weiterführende Schule, weil die Schulpflicht beendet war (nach der 9. bzw. 10. Klasse, darunter 121 174 Mädchen).
72 443 von diesen Jugendlichen hatten keinen schulischen Abschluss erreicht, davon 25 762 Mädchen.</td><td>CDU/CSU kann sich auf ältere Wähler verlassen
Bei der Bundestagswahl 1994 erreichte die CDU/CSU einen Anteil von 41.5 % der abgegebenen gültigen Zweitstimmen. Diese Stimmen kamen überwiegend von Wählerinnen und Wählern über 45 Jahren: 65 % der CDU/CSU-Wähler gehören dieser Altersgruppe an. Bei den Wählern der übrigen Parteien macht diese Altersgruppe im Mittel nur 48 % des Stimmenanteils aus.</td></tr>
</table>

4.6.2 Darstellung von Informationen mithilfe von Baumdiagrammen und Mehrfeldertafeln

Die Beschäftigung mit derartigen Inhalten legt Schülerinnen und Schüler, die Baumdiagramme aus Klassenstufe 8 noch nicht kennen, vermutlich eher die tabellarische Darstellung der einzelnen Angaben nahe und würde zum Anlegen einer Mehrfeldertafel führen:

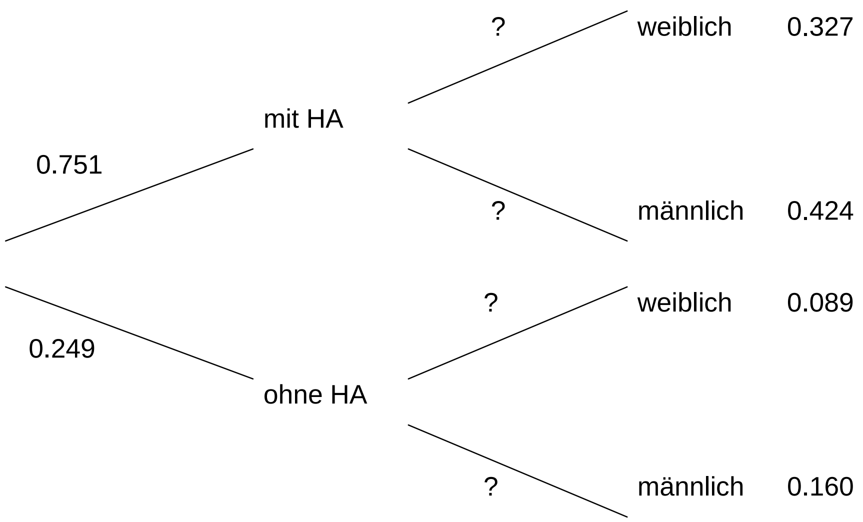
Schulabschluss		Hauptschulabschluss ja	Hauptschulabschluss nein	gesamt
Geschlecht	**weiblich**	95412	25762	121174
	männlich	123563	46681	170244
	gesamt	218975	72443	291418

Schülerinnen und Schüler, denen aus Klassenstufe 8 Baumdiagramme bekannt sind, würden vielleicht eher ein Baumdiagramm erstellen und daraus Fragestellungen formulieren



An dieser Stelle wäre es möglich, dass es Schülerinnen und Schüler gibt, die schon an dieser Stelle auf die Idee kommen, das Baumdiagramm in umgekehrter Schlussrichtung aufzuschreiben.

Die obige Tabelle (Vierfeldertafel) könnte dazu motivieren.



Die „Und-Wahrscheinlichkeiten“ als Produkte der Wahrscheinlichkeiten längs der Pfade müssen mit denen des ersten Baumes übereinstimmen.

Die „?“ erhält man durch Division oder aus der Tafel.

Die Vierfelder-Tafel ist zwischen beiden Bäumen das verbindende Element. Darauf wird unter „Berechnung von Bayes-Wahrscheinlichkeiten“ weiter unten genauer eingegangen.

Beide Zugänge sind geeignet, zunächst einmal kompliziertere Zusammenhänge zu strukturieren und in Teilprobleme zu zerlegen. Je nach Lerngruppe werden beide auftauchen, oder es wird nur einer oder vielleicht auch keiner auftauchen.

Bei sehr geringer „Ausbeute“ wäre es möglich, die Zeitungsartikel im Großformat an die Pin-Wand im Klassenraum zu heften, so dass das Ziel der Unterrichtseinheit, nämlich die Lösung der enthaltenen Fragestellungen, während der dazwischen liegenden Stunden stets optisch präsent ist.

An dieser Stelle wäre es angebracht, zumindest mögliche interessante Fragestellungen, die sich aus den Informationen ergeben, anzudiskutieren. Eventuell gibt es Schülerinnen und Schüler, die Vermutungen anstellen, die u. U. zu diesem Zeitpunkt in der Lerngruppe noch nicht geklärt werden können.
Diese sollten notiert werden, damit sie später - nach Erarbeitung des „Werkzeuges“ - wieder aufgegriffen und überprüft werden können.
Es ist aber auch möglich, dass schon hier gewisse Fragen über die Vierfeldertafel oder die Bäume beantwortet werden.

4.6.3 Experimentieren und Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

Die Schülerinnen und Schüler sollen in diesem Kapitel spielerisch auf „lebensnahe Situationen“ vorbereitet werden: Sie werden mit Aussagen/Statistiken/Glücksspielverlockungen konfrontiert und müssen spontan und „aus dem Bauch heraus“ für sich eine Aussage/Statistik beurteilen oder sich für oder gegen das Mitspielen im Glückspiel entscheiden.

Die Schülerinnen und Schüler sollen intuitiv erfahren, wie sie eine Situation ohne jede Vorinformation einschätzen würden und welche Rahmenbedingungen ihre Einschätzung beeinflussen.
Sie sollen insbesondere erfahren, wie das Ändern der Rahmenbedingungen - zum Beispiel durch Ergänzung zusätzlicher Informationen - ihre Einschätzung verändert.
Anschließend wird es nötig sein, die Güte der gemachten Schätzungen rechnerisch zu überprüfen.

Die folgenden Beispiele können beide in Gruppenarbeit bearbeitet werden. Es ist aber auch möglich, das erste Beispiel mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam zu erarbeiten, um ihnen einen Einblick in die anschließend anzuwendende Methode zu geben.

Beispiel 1 (vgl. Lit. [1], S. 66, E 1)

Ein Eisenwarenhändler erhält eine Lieferung von 2 Kisten mit Schrauben. Die Kiste mit Schrauben der Qualität A enthält 10 % Ausschuss, die Kiste der Qualität B enthält 30 % Ausschuss.
Beim Transport sind die Schilder auf den Kisten, die die Qualitäten A bzw. B kennzeichnen, beschädigt worden, so dass nicht klar ist, welche Kiste welche Qualität enthält.
Da die Anzahl der Schrauben in den Kisten sehr groß ist, ist es unmöglich, alle Schrauben zu prüfen.

a) Was meint Ihr zu der Idee, die eine Kiste einfach mit „A“ oder aber „B“ zu beschriften?
b) Der Eisenwarenhändler entnimmt der Kiste eine Probe von 10 Schrauben, von denen eine defekt ist. - Wie soll er sich jetzt entscheiden?
c) Der Auszubildende des Eisenwarenhändlers meint, er müsse nur oft genug ziehen, um sicher die Qualität der Schrauben bestimmen zu können.

Probe	Defekte	A	B
-	-	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1		
2	0		
3	5		
4			

Nach mehrmaligem Ziehen hat er sich entschieden, die Kiste mit „Qualität A“ zu beschriften.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er sich geirrt?

d) Die 10 Schrauben werden zurückgelegt, die Kiste durchgerüttelt, und es werden wiederum 10 Schrauben entnommen, von denen keine defekt ist. Diskutiert, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Schrauben jetzt aus „Kiste A“ stammen.
Nach nochmaligem Zurücklegen, Durchrütteln und Ziehen sind 5 Schrauben defekt.
Was schätzt Ihr nun, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Schrauben aus „Kiste A“ stammen?

Die Schätzwerte sollen sukzessive in die gegebene Tabelle eingetragen werden.

Weitere (theoretische) Ziehungen mit Zurücklegen und die Auswirkung des erhaltenen Ergebnisses auf die nächste geschätzte Wahrscheinlichkeit können vorgenommen und diskutiert werden.
Es ist auch möglich, die Entwicklung der geschätzten Wahrscheinlichkeiten schon hier beim ersten Beispiel graphisch zu visualisieren, z. B. durch einen von Hand gezeichneten Graphen oder mit Hilfe eines graphikfähigen Rechners:

Auf der Rechtsachse wird die Nummer der entnommenen Proben angetragen, auf die Hochachse die geschätzten Wahrscheinlichkeiten, z. B. $P_i(A)$ mit roter Farbe und $P_i(B)$ in grüner Farbe.

Für das zweite Beispiel, das die Schülerinnen und Schüler anschließend selbstständig in Gruppen bearbeiten sollen, ist die Visualisierung der Entwicklung der Schätzwerte von vorn herein vorgesehen.

Beispiel 2

Es gibt zwei gleiche und nicht durchsichtige Tüten 1 und 2.
Tüte 1 enthält 3 rote und 7 gelbe Gummibärchen; Tüte 2 enthält 6 rote und 4 gelbe Gummibärchen.
Eine Tüte wird gewählt und ein Gummibärchen wird entnommen.
Gefragt ist die Wahrscheinlichkeit, mit der das gezogene Gummibärchen aus Tüte 1 bzw. Tüte 2 stammt, und zwar

- ohne Kenntnisse der Gummibärchenfarbe
- mit Kenntnis der Gummibärchenfarbe
- mit Kenntnis der Farbe nach mehrmaligem Ziehen eines Gummibärchens mit Zurücklegen aus derselben gewählten Tüte
  (vgl. Arbeitsblatt 1, Seite 203)

<u>Mögliche Vorgaben für die Gruppenarbeit:</u> eine Schülerin/ein Schüler übernimmt das verdeckte Ziehen und die Bekanntgabe der Zusatzinformation „rot“, „rot“, „gelb“ usw. Jedes Gruppenmitglied füllt für sich die beiden ersten Spalten der Tabelle auf dem Arbeitsblatt aus, wobei die „geschätzten Wahrscheinlichkeiten“ in der Gesamtgruppe ausdiskutiert werden sollen. Mit der Forderung, sich auf eine Wahrscheinlichkeit zu einigen, wird erreicht, dass die „Schätzstrategie“ begründet wird.

mögliches Gruppenergebnis

n-ter Zug des Gummibärchens	**Ergebnis**	**Wahrscheinlichkeit, dass Tüte 1 gewählt wurde**	**Wahrscheinlichkeit, dass Tüte 2 gewählt wurde**	**berechnete Werte** $P_i(1)$	$P_i(2)$
vor dem Ziehen	nicht bekannt	0.5	0.5		
1.	rot	0.3	0.7		
2.	rot	0.2	0.8		
3.	gelb	0.3	0.7		
4.	gelb	0.4	0.6		
…					

Veranschaulichung des Schätzprozesses

Die Schülerinnen und Schüler werden angeregt, ihre geschätzten Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von den Zusatzinformationen aus den einzelnen Zügen graphisch darzustellen, wobei auf der Rechtsachse die Zugnummer und auf der Hochachse die P_i verschiedenfarbig abgetragen werden. Verbindet man die einzelnen Punkte, so entstehen zwei Graphen, die sich immer wieder überschneiden.
Damit erfolgt eine Visualisierung des Schätzprozesses; andererseits wird dadurch die graphische Darstellung von Iterationen, die später folgen soll, intellektuell besser erfassbar.

Mögliche Lösungen sind in der „Lösung zu AB 1“ im Anhang zu finden.

Die einzelnen Arbeitsgruppen sollten Ihre Gruppenergebnisse präsentieren. Im Plenum werden Schwierigkeiten besprochen, wenn nötig, Begründungen noch einmal formuliert und Erfahrungen ausgetauscht.

An dieser Stelle bietet es sich an, die Begriffe

- **a-priori-Wahrscheinlichkeit („Vorher-Wahrscheinlichkeit“)**
- **a-posteriori-Wahrscheinlichkeit („Nachher-Wahrscheinlichkeit“) und**
- **„Irrtumswahrscheinlichkeit“**

  zu definieren, schriftlich festzuhalten und an den durchgeführten Beispielen zu verifizieren.

Festigung der definierten Begriffe anhand des Beispiels 2

1. <u>Vor</u> dem ersten Ziehen bzw. vor Bekanntgabe des ersten Zugergebnisses ist die (erste) a-priori-Wahrscheinlichkeit 0.5, denn es gibt keine Informationen über das Gummibärchen.
2. <u>Nach</u> der Information „erstes gezogenes GB ist rot“ neigt man eher zu der Annahme, dass das GB aus Tüte 2 stammt, weil diese mehr rote GB enthält als die erste Tüte.
   Die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit schätzen wir für Tüte 2 auf 0.7.
3. Diese Wahrscheinlichkeit von 0.7 ist <u>vor</u> dem 2. Ziehen die neue, zweite a-priori-Wahrscheinlichkeit. Es wird das zweite Mal gezogen mit dem Ergebnis „rot“.
4. <u>Nach</u> dieser neuen Information erscheint es noch wahrscheinlicher, dass es sich hier um Tüte 2 handelt. Meine neue, dritte Wahrscheinlichkeit ist die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit, die auf 0.8 geschätzt wird. Sie wird <u>vor</u> dem dritten Ziehen zu meiner neuen a-priori-Wahrscheinlichkeit.
   Entsprechend setzt sich die Entwicklung der geschätzten Wahrscheinlichkeiten sukzessive fort.

Es ist zu vermuten, dass die Schülerinnen und Schüler nun das Bedürfnis äußern, nach durchgeführten Schätzungen nun wirklich berechnen zu wollen, wie gut ihre Schätzungen waren.

Das gibt Anlass, sie zu beauftragen, mit den ihnen zur Verfügung stehenden Mitteln zu versuchen, für das Beispiel 2 die geschätzten a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten nach Bekanntgabe des ersten Zugergebnisses und anschließend nach Bekanntgabe des zweiten Zugergebnisses exakt zu berechnen.

Die Aufgabenstellung findet sich auf dem 1. Arbeitsblatt unten.

Mit diesem Arbeitsauftrag erfolgt der Übergang zum nächsten Kapitel.

4.6.4 Berechnung von Bayes-Wahrscheinlichkeiten

Die den Schülerinnen und Schülern zur Problemlösung zur Verfügung stehenden Hilfsmittel sind

- Mehrfeldertafeln und
- Baumdiagramme

1. Mehrfeldertafel für Beispiel 2

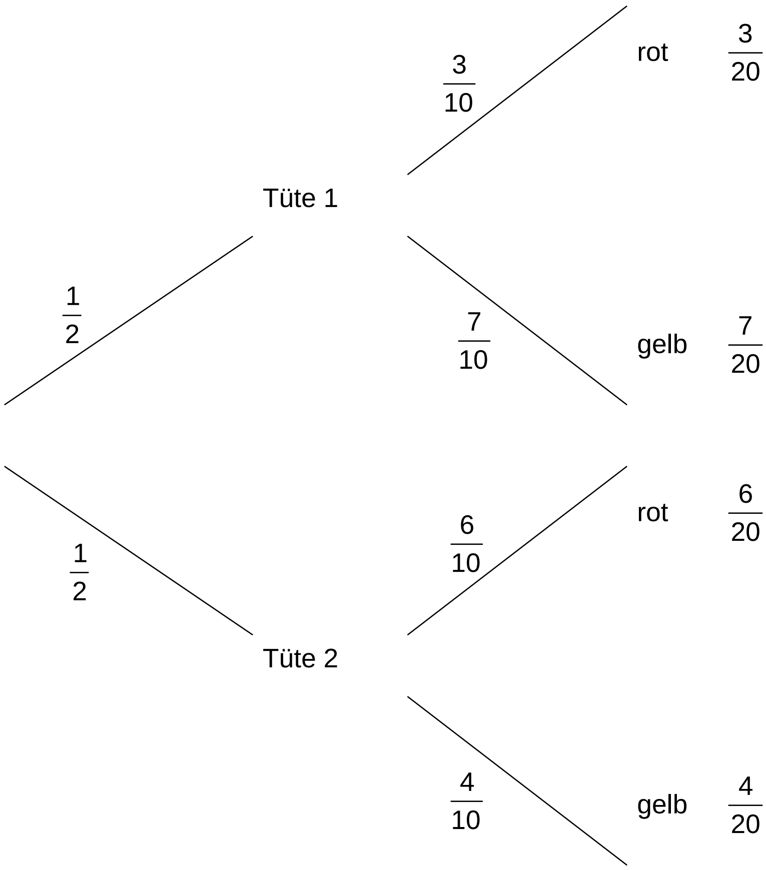
Die gesuchte erste a-priori-Wahrscheinlichkeit ist direkt der Tabelle zu entnehmen: $P_{rot}(Tüte1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

	rot	**gelb**	**Summe**
Tüte 1	3	7	10
Tüte 2	6	4	10
Summe	9	11	20

Weitere Wahrscheinlichkeiten lassen sich formulieren und recht einfach berechnen.

2. Rückschließen über das Umkehren von Baumdiagrammen

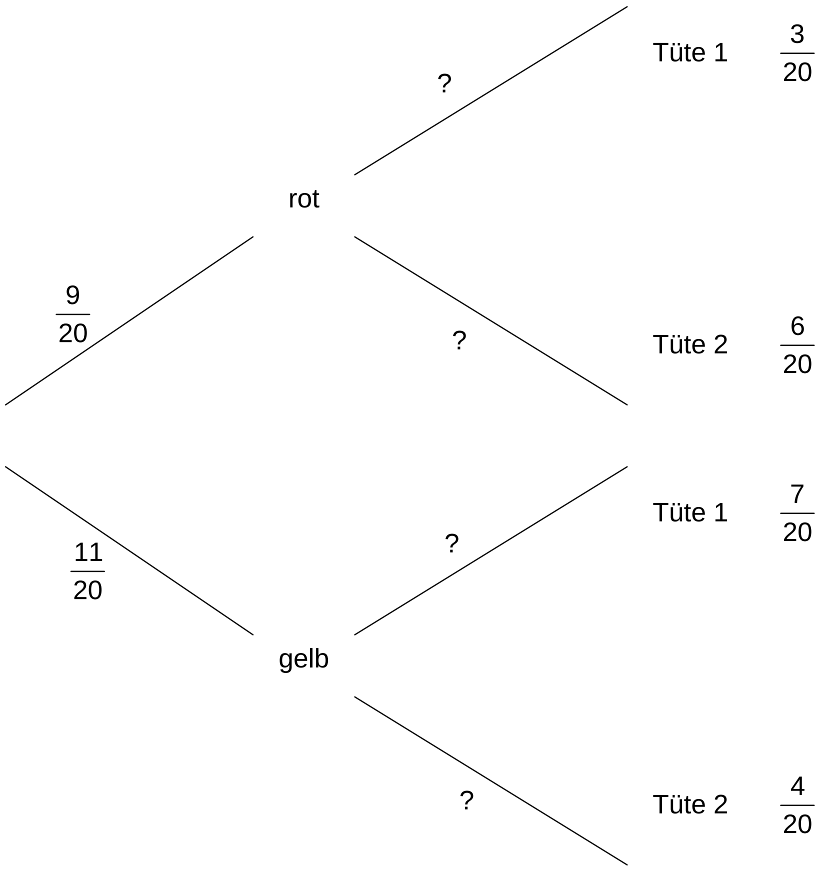
2.1 Baumdiagramm „vorwärts“



Das Aufstellen und Beschriften dieses „Vorwärtsbaumes“ wird den Schülerinnen und Schülern kaum Schwierigkeiten bereiten, auch ohne eine Vierfeldertafel angelegt zu haben.

Die in Klasse 8 erlernten Fertigkeiten werden wiederholt und gefestigt.

2.2. Baumdiagramm „rückwärts“



Die Produktwahrscheinlichkeiten bzw. „Und-Wahrscheinlichkeiten“ entsprechen denen des „Vorwärtsbaumes“. Hier wird das „Umkehren“ auch dadurch deutlich, dass die Berechnung durch Division erfolgt.

Mit diesem Werkzeug werden die Schülerinnen und Schüler befähigt, durch mehrmaliges Wiederholen der Berechnungen der a-priori- bzw. a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten und Vergleich mit ihren zuvor geschätzten Werten, die Güte ihrer Schätzungen zu überprüfen.

Zur Festigung der Verfahrensweise und zur Verdeutlichung grundlegender Iterationsideen können die Schülerinnen und Schüler auch die Güte ihrer Schätzung der dritten und vierten „a-posteriori-Wahrscheinlichkeit“ rechnerisch überprüfen.

Die wiederholten umfangreichen Rechnungen mit jeweils neuer Ausgangswahrscheinlichkeit legen nahe, ein Programm „Bayes“ für den graphikfähigen Rechner oder für Excel zu schreiben, mit dessen Hilfe weitere Iterationen durchgeführt werden können.
Fertige Programme lassen sich auch aus dem Internet herunterladen.

Das Arbeitsblatt 2 (Seite 207) enthält eine weitere Aufgabe zum Schätzen und Überprüfen der Schätzungen. Die Schülerinnen und Schüler sollen das Spiel „Minimax“ in Gruppen spielen und das Arbeitsblatt bearbeiten. Anschließend werden die Ergebnisse verglichen und besprochen.

Modellieren von Bayes-Problemen

Die Stochastik lebt davon, gegebene Problemstellungen auf bekannte zurückzuführen. Die Problemstellungen werden „modelliert“. Die Schülerinnen und Schüler haben vermutlich bereits das „Urnenmodell“ in den vorherigen Jahrgangsstufen kennengelernt und erfahren in Klassenstufe 9, dass alle Bayes-Aufgaben von der Struktur her demselben Modell entsprechen wie die „Gummibärchenaufgabe“.
Durch Hinzunahme weiterer „Tüten“ oder Ergänzung zusätzlicher Merkmalsausprägungen bleibt die Vorgehensweise prinzipiell erhalten, doch erhöht sich die Anzahl der Felder in der Mehrfeldertafel bzw. die Anzahl der Zweige bzw. Verzweigungen in den Baumdiagrammen.

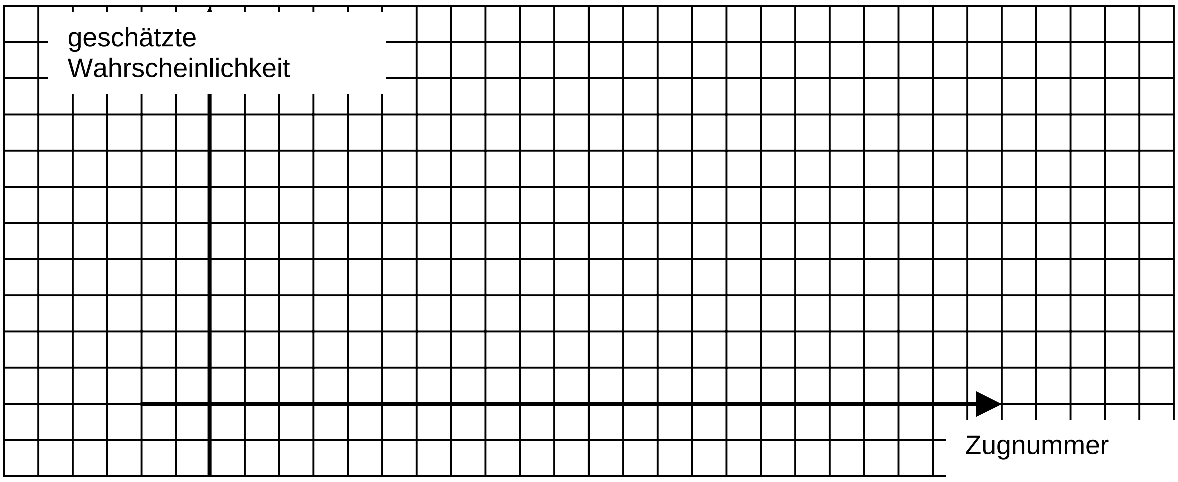
4.6.5 Arbeitsblätter

Arbeitsblatt 1: Experimentieren mit Gummibärchen - Entscheidung unter Unsicherheit

Es soll folgendes Experiment betrachtet werden:
In zwei gleichen und nicht durchsichtigen Tüten 1 und 2 befinden sich Gummibärchen. Tüte 1 enthält 3 rote und 7 gelbe Gummibärchen, Tüte 2 enthält 6 rote und 4 gelbe Gummibärchen.
Eine Schülerin wählt eine Tüte zufällig aus und entnimmt ein Gummibärchen, zeigt es und legt es in die Tüte zurück. Es soll nun erraten werden, welche Tüte die Schülerin ausgewählt hat. Um die Ratechancen zu verbessern, wird das Experiment mehrfach durchgeführt, wobei das Gummibärchen natürlich immer aus derselben Tüte gezogen wird.

Nummer	Farbe des gezogenen Gummibärchens	geschätzte Wahrscheinlichkeit - Tüte 1	geschätzte Wahrscheinlichkeit - Tüte 2	berechnete Wahrscheinlichkeit - Tüte 1	berechnete Wahrscheinlichkeit - Tüte 2
0	–	0,5	0,5	0,5	0,5
1					
2					
3					
4					
5					
6					

1. **1.** Bildet Gruppen zu je 4 bis 5 Schülerinnen/Schülern. Ein Gruppenmitglied übernimmt das verdeckte Ziehen und die Bekanntgabe des Ziehungsergebnisses. Die anderen Gruppenmitglieder schätzen die Wahrscheinlichkeiten für Tüte 1 und 2, diskutieren und begründen nach jedem Zug ihre Entscheidung und füllen schrittweise die Spalten 2 bis 4 der Tabelle aus. Wann würdet ihr euch für eine der beiden Tüten entscheiden?
2. **2.** Stellt eure geschätzten Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von der Zugnummer graphisch dar.



3. **3.** Berechnet nun die Wahrscheinlichkeit für Tüte 1 und Tüte 2 nach dem ersten Zug unter der Kenntnis der zusätzlichen Information. Vergleicht euer Ergebnis mit eurer Schätzung.
4. **4.** Überlegt und beschreibt, wie man die nach dem ersten Zug bestimmte Wahrscheinlichkeit für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit nach dem zweiten Zug verwenden kann. Formuliert euer Ergebnis allgemein und berechnet die Wahrscheinlichkeiten für die Tüten 1 und 2 nach dem zweiten, dritten und vierten Zug. Vergleicht wieder mit euren geschätzten Wahrscheinlichkeiten.

Programme

Das folgende Beispiel zeigt das TI-92-Programm bayes1 zu dem Gummibärchen-Experiment. Die wesentlichen Zeilen mit den Versuchsdaten und der Berechnung der Nachher-Wahrscheinlichkeiten sind grau markiert. Nach Aufruf des Programms mit bayes1() im Home-Bildschirm können menügesteuert die Ergebnisse des durchgeführten Gummibärchen-Experimentes eingegeben werden. Das Programm berechnet die zugehörigen Nachher-Wahrscheinlichkeiten und stellt die Ergebnisse tabellarisch und graphisch dar.

```
bayes1()
Prgm
ClrIO
setMode("Display Digits","Float 3")
¨ Vorgabe der Versuchsdaten
{"rot","gelb"}»merkmal
{.3,.6}»prot
{.7,.4}»pgelb
{.5,.5}»pfach
¨ Initialisierung
1»janein
0»i
{0}»nummer
{"-"}»indiz
{pfach[1]}»pfach1
{pfach[2]}»pfach2
¨ Iteration und Berechnung der Nachher-Wahrscheinlichkeiten (a-posteriori)
While janein=1
  Dialog
    Title "Feststellen des Indizes"
    DropDown "Gummibärchenfarbe:",merkmal,merkgez
  EndDlog
  If merkgez=1 Then
    pfach*prot»ppfad
    Else
    pfach*pgelb»ppfad
  EndIf
  ppfad/(sum(ppfad))»pfach
  i+1»i
  augment(nummer,{i})»nummer
  If merkgez=1 Then
    augment(indiz,{"rot"})»indiz
    Else
    augment(indiz,{"gelb"})»indiz
  EndIf
  augment(pfach1,{pfach[1]})»pfach1
  augment(pfach2,{pfach[2]})»pfach2
  Disp augment({i,indiz[i+1]},pfach)
  Pause
  Dialog
    Title "Auswahl"
    DropDown "Noch ein Zug?",{"Ja","Nein"},janein
  EndDlog
```

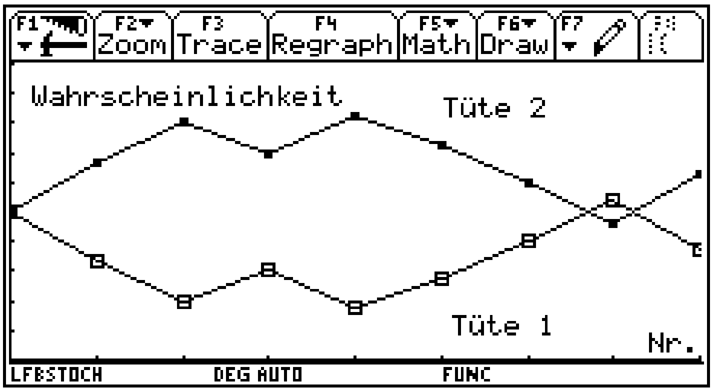
```
EndWhile
¨ Tabellarische und graphische Darstellung
NewData gummib,nummer,indiz,pfach1,pfach2
ClrGraph
0»xmin
i»xmax
1»xscl
0»ymin
1»ymax
.1»yscl
NewPlot 1,2,nummer,pfach1,,,,1
NewPlot 2,2,nummer,pfach2,,,,4
Pause
setMode("Display Digits","Float 12")
DispG
EndPrgm
```

Lösungen und mögliche Ergebnisse

1.

Nummer	Farbe des gezogenen Gummibärchens	geschätzte Wahrscheinlichkeit - Tüte 1	geschätzte Wahrscheinlichkeit - Tüte 2	berechnete Wahrscheinlichkeit - Tüte - 1	berechnete Wahrscheinlichkeit - Tüte - 2
0	–	0,5	0,5	0,5	0,5
1	rot	0,3	0,7	0,33	0,67
2	rot	0,2	0,8	0,2	0,8
3	gelb	0,3	0,7	0,3	0,7
4	rot	0,15	0,85	0,18	0,82
5	gelb	0,25	0,75	0,28	0,72
6	gelb	0,4	0,6	0,40	0,60
7	gelb	0,65	0,35	0,54	0,46
8	rot	0,6	0,4	0,37	0,63

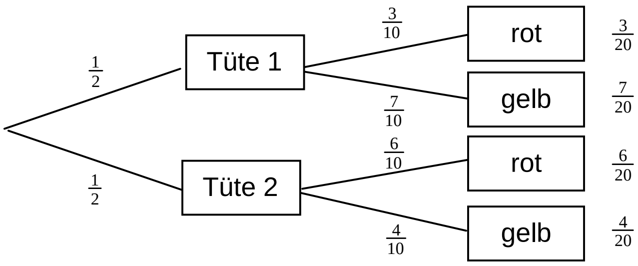
2. Berechnete Wahrscheinlichkeit mit dem TI-92-Programm bayes1:



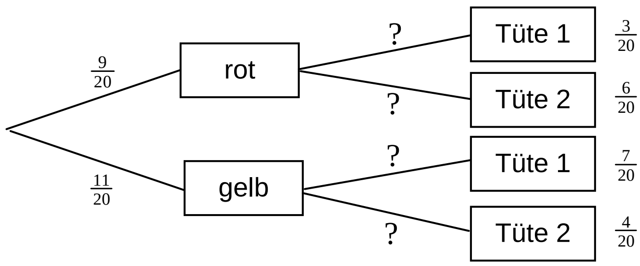
3. **Die Schülerinnen und Schüler müssen das Experiment als zweistufiges Zufallsexperiment erkennen und sollen die Informationen mithilfe einer Vierfeldertafel bzw. von Baumdiagrammen ordnen. Eine mögliche Lösung mithilfe der Vierfeldertafel wäre z. B.:**

	rot	gelb	gesamt
Tüte 1	3	7	10
Tüte 2	6	4	10
gesamt	9	11	20

Zum Versuch gehört das folgende Baumdiagramm, dass man mit der Pfadregel bestimmen kann:

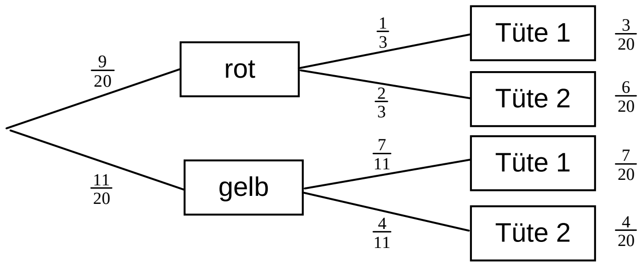


Um nun die Frage zu beantworten, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein rotes Gummibärchen im ersten Zug aus Tüte 1 stammt, müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass dieses Baumdiagramm hierüber keinen Aufschluss gibt. Zu der Vierfeldertafel gehört aber auch ein umgekehrtes Baumdiagramm. Dies wurde bereits zu Beginn der Unterrichtseinheit besprochen. Man erhält dann:



Dabei ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten in der 1. Stufe durch Anwendung der Additionsregel im ersten Baumdiagramm, die Endwahrscheinlichkeiten der Pfade ändern sich nicht: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gummibärchen rot und aus Tüte 1 ist, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass ein Gummibärchen aus Tüte 1 und rot ist.

Da sich die Endwahrscheinlichkeiten nach der Pfadregel als Produkte ergeben, kann man also umgekehrt die gesuchten Wahrscheinlichkeiten als Quotient aus Endwahrscheinlichkeit des Pfades und der Wahrscheinlichkeit auf der 1. Stufe berechnen. Daraus ergibt sich (vgl. auch die Tabelle zu Aufgabe 1):



Diese Wahrscheinlichkeiten bzw. relativen Häufigkeiten ergeben sich auch durch Auswertung der entsprechenden Spalten in der Vierfeldertafel.

An dieser Stelle können nun die Begriffe Vorher- und Nachher-Wahrscheinlichkeit (a-priori und a-posteriori), Irrtumswahrscheinlichkeit und die Methode von Bayes zur Berechnung der Nachher-Wahrscheinlichkeit eingeführt werden.

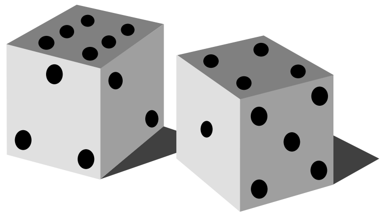
4. **Die Berechnung erfolgt analog Aufgabe 3. Dabei werden die zuvor berechneten Nachher-Wahrscheinlichkeiten bei einer neuen Berechnung als Grundlage, d. h. als Vorher-Wahrscheinlichkeiten, zur Berechnung der neuen Nachher-Wahrscheinlichkeit verwendet. Die gerundeten Ergebnisse sind in der Tabelle zu Aufgabe 1 dargestellt.**

Die Wahrscheinlichkeiten nach den weiteren Zügen lassen sich auch mit Hilfe eines Computer- bzw. Taschenrechnerprogramms berechnen, z. B. mit Excel oder für den TI-92 mit dem Programm bayes1.
Das Programm lässt sich durch Abwandlung des Modells, insbesondere der grau markierten Zeilen im Quellcode, auch auf andere Problemstellungen übertragen. Ein Beispiel dafür stellt das TI-92-Programm bayes2 dar.

Arbeitsblatt 2: Das Spiel „Minimax“ - Entscheidung mit Computerhilfe

Für das folgende Experiment in Partnerarbeit benötigt ihr:

- zwei verschiedenfarbige Würfel, z. B. rot und weiß
- drei Karteikarten, die mit den Worten *rot*, ***Mini****mum* und ***Max****imum* beschriftet werden
- den TI-92 mit dem installierten Programm bayes2 oder einen PC mit Programm zur Bayes-Statistik



Das Spiel verläuft folgendermaßen:
Eine Spielerin, z. B. Maria, wirft beide Würfel gleichzeitig. Als Ergebnis wird entweder stets die Augenzahl des roten Würfels (Regel „rot“) oder stets die kleinere der beiden Augenzahlen (Regel „Minimum“) oder stets die größere der beiden Augenzahlen (Regel „Maximum“) genannt. Die Regel nach der die Augenzahl genannt wird, wird vorher durch das zufällige Ziehen einer der drei Karten festgelegt.
Der Spielpartner, z. B. Laurent, kennt die gezogene Karte und damit die festgelegte Regel nicht. Er soll auf Grund von Indizien eine Entscheidung über die Regel treffen, nach der Maria die Augenzahl nennt.

Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeiten an, mit der die Augenzahlen nach den obigen Regeln genannt werden:

genannte Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Regel „rot“	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Regel „Minimum“	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$
Regel „Maximum“	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

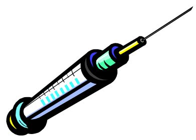
1. a) Bestätige die in der Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten.

b) Angenommen Maria würfelt zweimal mit beiden Würfeln. Sie nennt nacheinander die Augenzahlen „4“ und „5“. Berechne die Nachher-Wahrscheinlichkeiten für die drei Regeln. Kontrolliere mit dem TI-92-Programm bayes2 bzw. einem PC-Programm.

2. Führt das Experiment in Partnerarbeit durch. Einer übernimmt dabei „Marias“ Rolle. Der Partner übernimmt „Laurents“ Rolle und versucht, mithilfe des Programms bayes2 die benutzte Antwortregel mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner als 0,2 herauszufinden. Schätzt dabei nach jedem Indiz zunächst die Wahrscheinlichkeit.
Wie viele Fehlentscheidungen hattet ihr bei 10 Durchführungen des Experiments?

4.6.6 Vorschlag für eine Klassenarbeitsaufgabe zur Bayes-Statistik

Eine Pharmafirma entwickelte eine Testflüssigkeit, um ein neues Dopingverfahren zu erkennen. Untersuchungen ergaben folgende Gütekriterien des Tests:



&

?

(A) Ist ein Sportler gedopt, so kann dies mit 96 %iger Wahrscheinlichkeit erkannt werden.

(B) Ist ein Sportler nicht gedopt, so kann dies mit 94 %iger Wahrscheinlichkeit bestätigt werden.

Ferner geht der nationale Sportverband davon aus, dass 2 % der Sportler das neue Dopingverfahren anwenden.

Bearbeite die folgenden Fragestellungen, indem du die Modellierung dieses Problems auf ein dir bekanntes zurückführst und die dort angewandten Verfahren und Programme abwandelst und anwendest.

a) Untersuche, ob zwei positive Testergebnisse genügen, um mit mindestens 90 %iger Sicherheit einen Sportler als gedopt zu entlarven.

b) Kann eine höhere Sicherheit des Testverfahrens eher über eine Steigerung der Trefferquote (A) oder eine Steigerung der Ausschlussquote (B) erreicht werden?

Anmerkung: Den Schülerinnen und Schülern soll bei der Bearbeitung ein bekanntes und zuvor besprochenes Programm zur Verfügung stehen, z. B. auf dem TI-83, TI-92 oder PC (Excel).

Lösungsskizze

a) Modellierung des Problems gemäß des Gummibärchen-Experimentes:

Gummibärchen-Modell		*Dopingtest-Modell*	
Ausgangswahrscheinlichkeit für Tütenwahl		Dopingwahrscheinlichkeit	
P(Tüte 1) 0,5	P(Tüte 2) 0,5	P(gedopt) 0,02	P(nicht gedopt) 0,98
Tüte 1 3 rote 7 gelbe	Tüte 2 6 rote 4 gelbe	P(gedopt) 0,96 Test positiv 0,04 Test negativ	P(nicht gedopt) 0,06 Test positiv 0,94 Test negativ

Die Rechnung mit einem Programm liefert:

Testanzahl	Indiz	P(gedopt)	P(nicht gedopt)
0	–	0,020	0,980
1	Test positiv	0,246	0,754
2	Test positiv	0,839	0,161
3	Test positiv	0,988	0,012

Es müssen mindestens drei positive Tests durchgeführt werden, damit der Sportler mit mindestens 90 %iger Sicherheit als Dopingsünder entlarvt wird.

b) Erhöht man die Trefferquote (A) z. B. um 2 %, dann werden auch mindestens drei positive Tests benötigt. Die Wahrscheinlichkeiten P(gedopt) ändern sich kaum.

Erhöht man dagegen die Ausschlussquote (B) um 2 %, kann bereits nach zwei positiven Tests mit ca. 92 %iger Sicherheit auf einen gedopten Sportler geschlossen werden.

4.6.7 Literatur

[1] Cukrowicz, J., Zimmermann, B. (Hrsg.): Mathenetz 9, Ausgabe N. Westermann Verlag, Braunschweig 2001.
[2] Lambacher Schweizer: LS 9, Ausgabe Nordrhein-Westfalen. Klett Verlag, Stuttgart 2001. Aufgabe 5, S. 194.
[3] Anregungen zum Stochastikunterricht. Franzbecker Verlag, Hildesheim.

4.6.8 Kontakt

Ute Hilmer-Gabcke *u.hilmer@gabcke.de*
Ralf Kreibohm *r.kreibohm@t-online.de*
Klaus Sibum *KlausSibum@t-online.de*