Staatsinstitut
für Schulpädagogik
und Bildungsforschung

München

Arbeitskreis
Computeralgebrasysteme und
Computergeometrieprogramme

September 2001

Flächenparkettierung

Mosaike und Vielecke

Der vorliegende Baustein gibt Anregungen für die Gestaltung des Wahlpflichtgebiets „Einsatz von Computeralgebrasystemen und Computergeometrieprogrammen“ im Rahmen von Schulversuchen in den Jahrgangsstufen 9 und 10.

Nach der Definition regulärer Vielecke und deren Bestimmungsgrößen werden mit Hilfe des CGP *Euklid-DynaGeo* Konstruktionsmakros für die verschiedenen regulären n-Ecke erstellt (n aus $\mathbb{N}$, n Teiler von 360 und $n > 3$).

Mit den erstellten Makros parkettieren die Schüler experimentell Flächen und entdecken, dass nur mit dem gleichseitigen Dreieck, dem Quadrat und dem regulären Sechseck ein lückenloses Mosaik mit einer einzigen Art von Vielecken ohne Überlappungen erreicht werden kann. Aus der graphisch gewonnenen Erkenntnis wird die algebraische Begründung abgeleitet.

Zur Erweiterung werden Mosaike betrachtet, die aus zwei oder mehreren verschiedenen Arten von regulären Vielecken gebildet werden. Die Schüler sollen aus den bisherigen Erkenntnissen Bedingungen aufstellen für die verschiedenen Möglichkeiten und diese Anordnungen mit Hilfe der erstellten Makros überprüfen.

Inhalt	Ziele
1 Einführung **2** Konstruktion der regulären Vielecke - Makros **3** Parkettierung mit regulären Vielecken **4** Literatur	Die Schüler lernen mit Hilfe der Makro-Erstellung die geometrische Konstruktion als algorithmischen Vorgang kennen. Die Schüler entdecken experimentell und begründen mathematisch, dass das gleichseitige Dreieck, das Quadrat und das reguläre Sechseck die einzigen regulären Vielecke sind, mit denen die Fläche mit einer einzigen Art von Vielecken lückenlos parkettiert werden kann. Die Schüler stellen Bedingungen auf für die Parkettierung mit verschiedenen regulären Vielecken und realisieren diese z. T. graphisch.

1 Einführung

Ornamente oder geflieste Böden bzw. Wände enthalten sehr häufig wegen ihres ästhetischen Reizes regelmäßige Vielecke. Auch in der Natur kommt z. B. bei den Bienenwaben die Form des regulären Sechseckes *(Abb. 1)* vor.

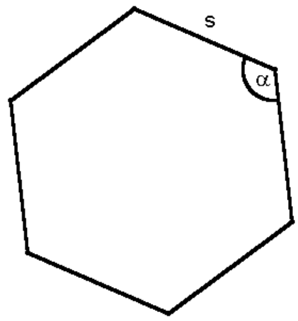

Abb. 1: reguläres Sechseck

Definition:

Ein Vieleck heißt regulär (regelmäßig) wenn alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß sind.

Jedes reguläre Vieleck (n-Eck) besteht aus n kongruenten gleichschenkligen Dreiecken. Ein solches Dreieck nennt man Bestimmungsdreieck (*Abb. 2*).

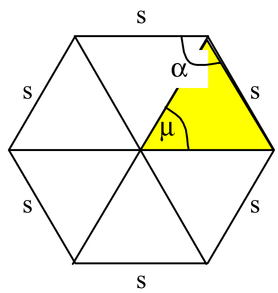

Abb. 2: Bestimmungsdreieck im regulären Sechseck

Es gilt : $\mu = \frac{360°}{n}$; $\alpha = 180° - \mu = 180° - \frac{360°}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$.

2 Konstruktion der regulären Vielecke - Makros

Mit einem CGP, das die Erstellung von Makros erlaubt (z. B. *EUKLID-DynaGeo*) werden die verschiedenen regulären Vielecke konstruiert und der Konstruktionsvorgang zu einem Makro zusammengefasst. Eine Möglichkeit für die Konstruktion der Vielecke ist das wiederholte Antragen der Innenwinkel α und Abtragen der beliebig vorgegebenen Strecke s.

Hilfreich ist dabei folgende Tabelle:

Anzahl der Ecken n	3	4	5	6	8	9	10	12
Innenwinkel α	60°	90°	108°	120°	135°	140°	144°	150°

Methodischer Hinweis: Die verschiedenen Vielecke können auch arbeitsteilig konstruiert werden.

Wichtiger Hinweis: Für die spätere Anwendung der Makros zur Parkettierung muss die Konstruktion der Eckpunkte des Vielecks entgegen dem Uhrzeigersinn erfolgen.

Nach der Konstruktion des jeweiligen regulären Vielecks wird das zugehörige Makro erstellt. Bei den meisten CGP erfolgt dies durch Angabe der Startobjekte und Zielobjekte sowie eines Namens z. B. "6_Eck". Wird das Makro mit dem jeweiligen Namen aufgerufen und das bereits vorhandene Startobjekt (Strecke s) angeklickt, so werden alle Konstruktionsschritte, die zur Zielfigur führen, automatisch abgearbeitet und das gewünschte reguläre Vieleck angezeigt.

3 Parkettierung mit regulären Vielecken

3.1 Parkettierung mit nur einer Sorte von Vielecken

Aufgabenstellung:

Mit welchen regulären Vielecken kann eine Fläche lückenlos und ohne Überschneidungen ausgelegt (parkettiert) werden?

Versuche aus deinen experimentellen Versuchen mit dem CGP (verwende die erstellten Makros) eine algebraische Begründung abzuleiten.

Ergebnis:

Eine lückenlose Parkettierung ohne Überschneidungen ist nur mit den regulären n-Ecken für n = 3, 4, 6 möglich (*Abb 3*).

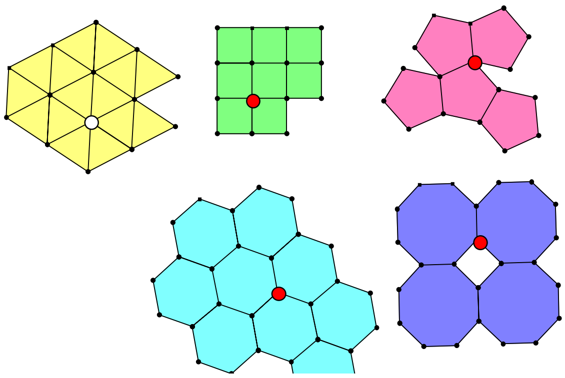

Abb. 3: Parkettierung mit gleichen Vielecken

Betrachtet man einen Punkt der Ebene (Eckpunkt eines Vielecks), so gruppieren sich um diesen Punkt z reguläre n-Ecke. Bei einer lückenlosen Überdeckung der Ebene muss folgende Beziehung zwischen der Anzahl z und dem Innenwinkel des n-Ecks gelten:

$z \cdot \alpha = 360°$

$$z \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot 180° = 360° \quad \rightarrow \quad z = \frac{2 \cdot n}{n-2}$$

n (Anzahl der Ecken)	3	4	5	6
z (Anzahl der n-Ecke)	6	4	$\notin \mathbb{N}$	3

Vielecke mit einer größeren Eckenzahl als 6 müssen nicht betrachtet werden, denn für $z \geq 3$ muss der Innenwinkel α des n-Ecks kleiner als 120° sein, also muss $n \leq 6$ sein. Daraus folgt, dass es nur für n = 3, 4, 6 eine lückenlose Parkettierung der Ebene mit dem entsprechenden regulären n-Eck gibt.

3.2 Parkettierung mit verschiedenen Vielecken

3.2.1 Erweiterte Problemstellung

Mosaike können auch gebildet werden, indem reguläre Vielecke mit unterschiedlicher Eckenanzahl auf eine solche Weise aneinander gelegt werden, dass gleiche Vielecke in gleicher zyklischer Ordnung einen Eckpunkt umgeben (*Abb. 4*).

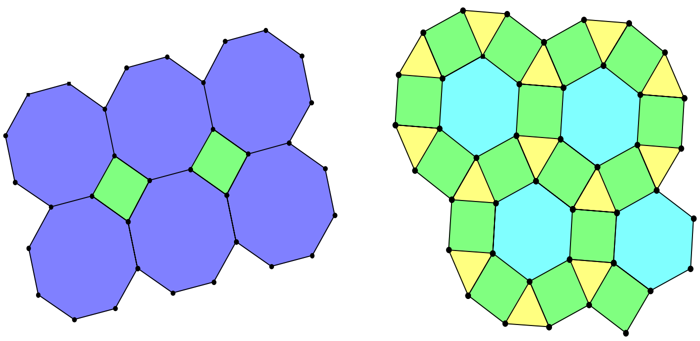

Abb. 4: Parkettierung mit verschiedenen Vielecken

Aufgabe

Begründe, dass solche Mosaike mindestens drei und höchstens 6 reguläre n-Ecke an einem Eckpunkt haben.

Lösung

Da die Innenwinkel α bei allen regulären n-Ecken kleiner als 180° sind, muss ein Eckpunkt mindestens drei Vielecken angehören. Der kleinste vorkommende Innenwinkel ist 60° (gleichseitiges Dreieck). Deshalb können maximal sechs (6 · 60° = 360°) Vielecke, in diesem Fall sechs gleichseitige Dreiecke, um einen Eckpunkt angeordnet werden.

3.2.2 Parkettierung mit drei Vielecken

Aufgabe

Welche Bedingung muss für ein Mosaik erfüllt sein, wenn drei reguläre Vielecke mit jeweils x, y bzw. z Ecken sich einen Eckpunkt teilen?

Lösung

Da die Winkelsumme um jeden Eckpunkt 360° betragen muss, ist eine solche Anordnung nur möglich, wenn gilt:

$$\left(\frac{x-2}{x}+\frac{y-2}{y}+\frac{z-2}{z}\right)\cdot 180° = 360°$$

Hieraus ergibt sich: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

Aufgabe

Bestimme die Werte für x, y und z mit $x, y, z \in \mathbb{N}$, $x, y, z > 2$ und $x, y, z \mid 360$ so, dass die obige Gleichung erfüllt ist und überprüfe die Ergebnisse mit Hilfe der erstellten Makros.

Lösung

Aufgrund der Nebenbedingungen sind alle Teiler von 360 größer als 2 mögliche Werte für x, y, z . Die Bestimmung dieser möglichen Werte mit Hilfe eines CAS (z. B. *Derive*) ergibt:

```
SELECT(MOD(360, n) = 0, n, 3, 360)
[3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36,
  40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360]
```

Auflösen der in Aufgabe 1 hergeleiteten Gleichung nach einer Variablen, z. B. z, ergibt:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{2\cdot x\cdot y}{x\cdot(y-2)-2\cdot y}$$

Der Wert für z hängt von den Werten der Variablen x und y ab. Für einen vorgegebenen x-Wert aus den oben ermittelten möglichen Werten (Teiler von 360 und größer 2) können durch Einsetzen aller möglichen Werte für y die passenden Werte (Teiler von 360 und größer 2) für z ermittelt werden.

Für x = 3 ergibt sich Folgendes: (CAS)

$$z=\frac{2\cdot 3\cdot y}{3\cdot(y-2)-2\cdot y}$$

$$z=\frac{6\cdot y}{y-6}$$

Einsetzen aller möglichen y-Werte ergibt die z-Werte.

$$\mathrm{TABLE}\left(z = \frac{6 \cdot y}{y - 6},\ y,\ [3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360]\right)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & z = -6 \\ 4 & z = -12 \\ 5 & z = -30 \\ 6 & z = \pm\infty \\ 8 & z = 24 \\ 9 & z = 18 \\ 10 & z = 15 \\ 12 & z = 12 \\ 15 & z = 10 \\ 18 & z = 9 \\ 20 & z = \frac{60}{7} \\ 24 & z = 8 \\ 30 & z = \frac{15}{2} \\ 36 & z = \frac{36}{5} \\ 40 & z = \frac{120}{17} \\ 45 & z = \frac{90}{13} \\ 60 & z = \frac{20}{3} \\ 72 & z = \frac{72}{11} \\ 90 & z = \frac{45}{7} \\ 120 & z = \frac{120}{19} \\ 180 & z = \frac{180}{29} \\ 360 & z = \frac{360}{59} \end{bmatrix}$$

Die mit dem CAS erstellte Tabelle enthält alle algebraischen Lösungen. Für die obige Problemstellung fallen alle Lösungen, die keine natürliche Zahl sind, weg. Lösungen, die im Sinne der Parkettierung gleich sind, wie z. B. y = 10, z = 15 und y = 15, z = 10, werden zusammengefasst.

Damit ergeben sich für x = 3 insgesamt folgende Lösungen:

Kombination	x	y	z
1	3	8	24
2	3	9	18
3	3	10	15
4	3	12	12

Das gleiche Verfahren für x = 4, x = 5 und x = 6 ergibt noch folgende zusätzliche Lösungen:

Kombination	x	y	z
5	4	5	20
6	4	6	12
7	4	8	8
8	5	5	10
9	6	6	6

Aufgabe

Generiere mit Hilfe der erstellten Makros einige der Mosaike, bei denen drei reguläre Vielecke einen Punkt der Ebene flächendeckend umschließen. Gibt es dabei auch Kombinationen, die nicht die gesamte Ebene abdecken?

Lösung

Die Kombinationen 1, 2, 3, 5 und 8 decken nicht die gesamte Fläche ab.

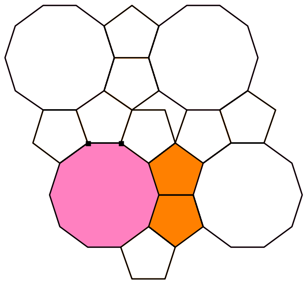

Abb. 5: Kombination 8

3.2.3 Parkettierung mit vier, fünf oder sechs Vielecken

Ähnliche Überlegungen wie für die in Kapitel 3.2.2 beschriebenen Mosaike mit drei Vielecken führen auf folgende Bedingungen für die Parkettierung mit vier, fünf oder sechs Vielecken:

n_i = Anzahl der Ecken des jeweiligen Vielecks

4 Vielecke: $$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1$$

5 Vielecke: $$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}$$

6 Vielecke: $$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2$$

Daraus ergeben sich noch folgende mögliche Kombinationen von Vielecken [1]:

Kombination	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
10	3	3	4	12		
11	3	3	6	6		
12	3	4	4	6		
13	4	4	4	4		
14	3	3	3	4	4	
15	3	3	3	3	6	
16	3	3	3	3	3	3

Aufgabe

Probiere einige der Kombinationen mit Hilfe der Makros aus.

Lösungshinweise:

Die Kombination 10 deckt nur in Verbindung mit Kombination 4 oder 14 die gesamte Ebene ab.

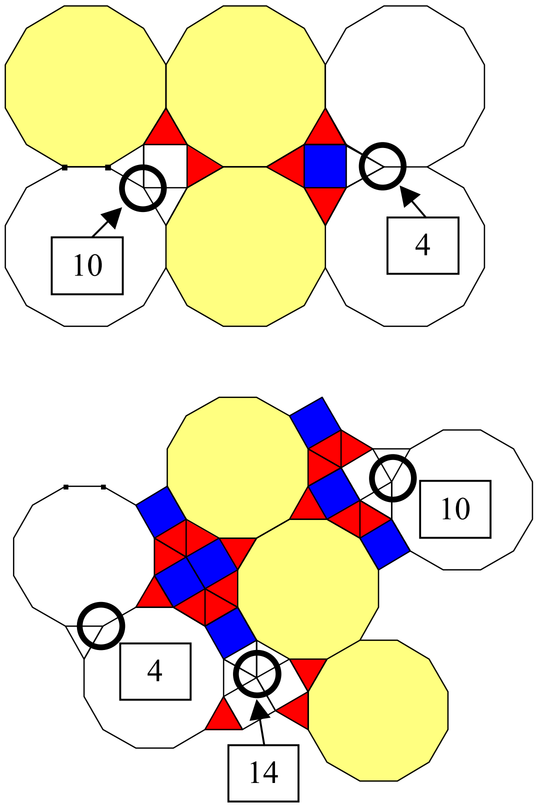

Abb. 6: Kombination 10 mit Kombination 4 und mit Kombination 14

Die Kombination 11 hat zwei mögliche Anordnungen.

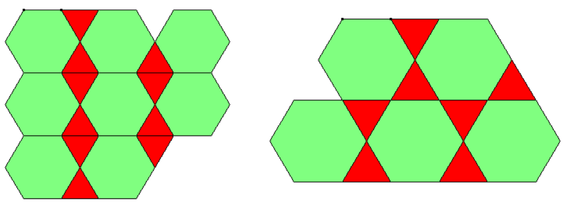

Abb. 7: Kombination 11 hat 2 Lösungen

4 Literatur

[1] Alfred S. Posamentier, Arbeitsmaterialien Mathematik, Ernst Klett Schulbuchverlag Stuttgart 1994, S.122 ff