In diesem Lernbereich werden Exponentialfunktionen zur Basis e eingeführt sowie ihre Verknüpfungen und Verkettungen mit Polynomunktionen. Diese Funktionen werden abgeleitet und entsprechende Exponentialgleichungen werden gelöst. Dieses Onlinematerial gibt Hinweise zur Komplexität der zu behandelnden Gleichungen, zu der Frage, was davon hilfsmittelfrei beherrscht werden sollte und wie die Hilfsmittel zur Lösung eingesetzt werden. Außerdem wird der notwendige Umfang der Behandlung der natürlichen Logarithmusfunktion erläutert. Schließlich wird eingegrenzt, was unter einfachen Fällen additiver und multiplikativer Verknüpfung zu verstehen ist.

Exponentialgleichungen lösen

Im eA sollten in folgenden Fällen Gleichungen auch hilfsmittelfrei gelöst werden können:

1) Nullstellenprobleme, wenn der Term bereits faktorisiert ist und ein Faktor der Term einer Polynomfunktion höchstens vom Grad 2 ist oder sich durch Ausklammern der Variablen eine solche Form herstellen lässt.

   Beispiele: $0 = x^2 \cdot e^x + x \cdot e^x \iff 0 = (x^2 + x) \cdot e^x \implies x = 0 \vee x = -1$

   $$0 = (x^3 - 4 \cdot x) \cdot e^x \iff 0 = x \cdot (x^2 - 4) \cdot e^x \implies x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$$

2) Gleichungen, die sich durch Term- und Äquivalenzumformungen einschließlich Logarithmieren auflösen lassen. Dabei stehen höchstens lineare Terme oder ganzzahlige Potenzen von x im Exponenten und keine Variablen in der Basis. Beispiele:

   $$4 = 2 \cdot e^{x^2};\ \ e^2 = e^{3 \cdot x - 4}$$

Weitere Beispiele dazu finden sich im Onlinematerial zu den hilfsmittelfreien Fertigkeiten.

Zur Behandlung des natürlichen Logarithmus

1) Für Gleichungen der Art: $e^x = 2$ wird der „Umkehroperator“ ln zum Auflösen nach dem Exponenten x verwendet. Dabei ist beispielsweise $x = \ln(2) \approx 0{,}693$ der Wert des Exponenten von e, der die Potenz 2 ergibt. Einen Näherungswert bestimmt der Taschenrechner. Ob in diesem Zusammenhang die natürliche Logarithmusfunktion (s.u.) thematisiert wird, hängt davon ab, ob der Lernbereich zur Integralrechnung bereits behandelt worden ist. In diesem Fall wäre die Logarithmusfunktion bereits als Stammfunktion der Kehrwertfunktion eingeführt und man könnte daran anknüpfen und hier vertiefen. Im anderen Fall könnte man es hier auch zuerst bei der Operatorvorstellung belassen und im Sinne eines Spiralcurriculums die Funktionseigenschaften im Lernbereich zur Integralrechnung wieder aufgreifen.
2) Mithilfe dieses Operators können dann auch Gleichungen der Art: $e^{3 \cdot x + 1} = 2$ in der Form: $3 \cdot x + 1 = \ln(2) \implies x = \frac{\ln(2) - 1}{3}$ gelöst werden, wobei ln(2) ein fester Zahlenwert ist.
3) Etwa zur hilfsmittelfreien Bildung der Ableitung ist es u.U. erforderlich, dass Exponentialfunktionen mit einer anderen Basis als e mithilfe des natürlichen Logarithmus in eine e-Funktion umgewandelt werden.

Die natürliche Logarithmusfunktion

Wie oben beschrieben, muss dieser Abschnitt nicht hier, sondern kann auch im Lernbereich Integralrechnung behandelt werden. Hier sind unter einfachen Fällen der Verknüpfung oder Verkettung solche mit einer nicht zu komplexen Polynomfunktion zu verstehen.

Beispiele:

$f(x) = \ln(e^2 - x)$, $f(x) = \ln(3 \cdot x - 1) + 2$, $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

Verkettung und Verknüpfung mit Polynomunktionen

Im Gegensatz zum gA können hier auch Quotienten von Funktionen auftreten und im Exponenten können Polynomfunktionen mit einem Grad größer als 1 vorkommen. Im Falle von Quotienten von Funktionen wird nicht erwartet, dass die Quotientenfunktion hilfsmittelfrei mit der Quotientenregel abgeleitet wird.

Beispiele zusätzlich zu den oben angegebenen Beispielen:

$f(x) = k \cdot x \cdot e^{-x^2}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$, logistisches Wachstum: $f(x) = \frac{20}{2+8 \cdot e^{-0,8 \cdot x}}$

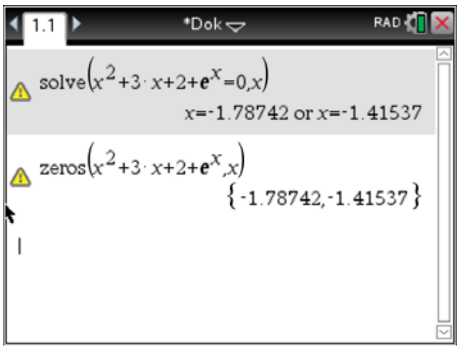
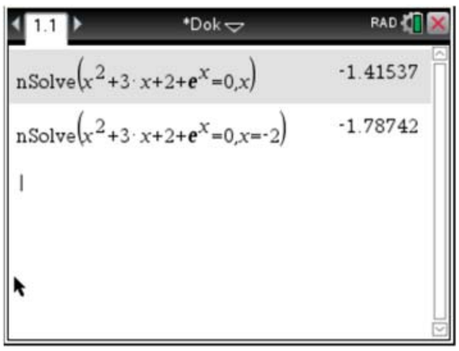
Angemessene Verfahren zum Lösen von Gleichungen

Im Allgemeinen ist es angebracht, sich zuerst einen Überblick mithilfe des oder der Graphen der Terme zu verschaffen, um zu klären, ob es mehrere Lösungen geben kann. Das funktioniert nur bei einem Verständnis des Globalverhaltens, etwa mithilfe von Überlegungen zu möglichen Vorzeichenwechseln. Bei tieferem Verständnis der vorliegenden Terme kann eine Argumentation den graphischen Überblick ersetzen, etwa in den oben beschriebenen „einfachen Fällen".

Beispiel:

$0 = \mathrm{x}^2 + 3 \cdot \mathrm{x} + 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$.

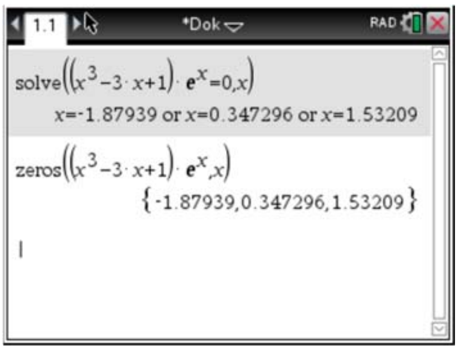
Hier hat der rationale Anteil des Terms Nullstellen bei $\mathrm{x} = -2$ und $\mathrm{x} = -1$ und ist nach oben geöffnet, während die e-Funktion stets positiv ist. Also kann es höchstens zwei Nullstellen im Bereich $-2 \leq \mathrm{x} \leq -1$ geben. Ein numerisches Lösungswerkzeug müsste also mit entsprechend verschiedenen Startwerten eingesetzt werden.

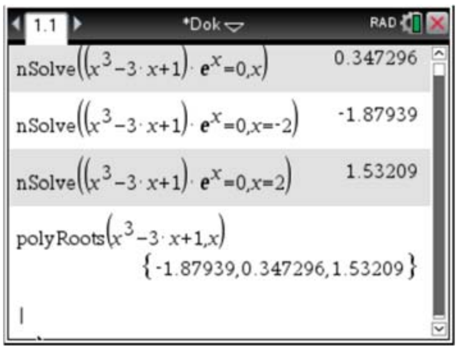
CAS	GTR (jeweils unvollständig)
	

Die Warnung kann aufgrund obiger Vorüberlegung verworfen werden.

Wenn eine Faktorisierung des Nullstellenproblems möglich ist, bieten sich etwa beim GTR die Polynomwerkzeuge an, um alle Lösungen zu finden. In diesem Fall sollte das Problem durch Betrachtung der einzelnen Faktoren in mehrere einfachere Nullstellenprobleme zerlegt werden.

Beispiel: $0 = (x^3 - 3 \cdot x + 1) \cdot e^x$

<table>
<tr><th>CAS-Lösungsmöglichkeiten</th><th>GTR-Lösungsmöglichkeiten</th></tr>
<tr><td>


Das Gerät liefert mit jedem Lösungswerkzeug die vollständigen Lösungen.
</td><td>


Das Gerät liefert mit dem Löse-Befehl nur eine von drei Lösungen. Nach Zerlegung in die Faktoren liefert das Polynomwerkzeug alle Lösungen.
</td></tr>
</table>

Es sollte ein Bewusstsein dafür geschaffen werden, dass numerische und graphische Lösungswerkzeuge bzw. -verfahren häufig nur eine Lösung bestimmen, die unter Umständen abhängig vom Startwert ist und deshalb unvollständig sein kann. Dieses führt auf die oben beschriebene Betrachtung des Graphen zurück.